SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES — Págs. 90 a 109

Página 90

1. Actividad personal.

Página 92

2. $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$

$\vec{w} = 3\vec{u} - \vec{v}$

Página 94

3. **a)** (1, 3, 3)
   b) (3, 5, –1)
   c) (7, 16, –2)
   d) (4, 5, –2)

4. Se debe cumplir:

$-1 = h$

$k = 2$

Página 95

5. **a)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \to$ linealmente independientes

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to$ linealmente dependientes

c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \to$ linealmente independientes

Página 96

6. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3 \cdot 4 \cdot \cos 30° = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$

7. $\left|\text{proy}_{\vec{v}}\ \vec{u}\right| = \dfrac{6\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Como $\vec{u}\cdot\vec{v} > 0$, $\text{proy}_{\vec{v}}\ \vec{u}$ tiene el mismo sentido que $\vec{v}$, por lo tanto:

$$\text{proy}_{\vec{v}}\ \vec{u} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot\vec{v}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\vec{v}$$

8. El trabajo (W) no es más que el producto escalar entra la fuerza (F) y la distancia (d) recorrida por el objeto. W se expresa en julios (J):

$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = 60 \cdot 4 \cdot \cos 60 = 240 \cdot 0{,}5 = 120$ J

Página 97

9. **a)** –6
   b) 11
   c) 26
   d) (3, 3, 1) · (–3, –5, 3) = –21

10. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \to$ Son ortogonales.

11. **a)** $\left(\vec{i}+\vec{j}\right)\cdot\left(\vec{j}-\vec{k}\right) = \left(\vec{i}+\vec{j}\right)\cdot\vec{j} - \left(\vec{i}+\vec{j}\right)\cdot\vec{k} =$

$= \vec{i}\cdot\vec{j} + \vec{j}\cdot\vec{j} - \vec{i}\cdot\vec{k} + \vec{j}\cdot\vec{k} = 0 + 1 - 0 - 0 = 1$

b) (2, –1, 0) (1, 0, 3) = 2

Página 98

12. $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{2+9+25} = \sqrt{36} = 6$

$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{2+0+2} = \sqrt{4} = 2$

$\left|\vec{w}\right| = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$

13. Cualquiera de estos dos:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{3}{6}, \frac{-5}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{1}{2}, \frac{-5}{6}\right)$$

$$-\left(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{3}{6}, \frac{-5}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right)$$

14. $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \dfrac{-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + 3\cdot 0 - 5\cdot\sqrt{2}}{6\cdot 2} = -0{,}7559$

El ángulo que buscamos es de 139° 6'.

Página 99

15. $2 \cdot 6 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 6 \cdot \sqrt{2}$

16. $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\dfrac{1}{4}+1+\dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$

$$\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \dfrac{-\dfrac{1}{2}+1+0}{\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot\sqrt{2}} = 0{,}2887 \rightarrow$$

→ Los vectores forman un ángulo de 73° 13' 12''.

Por lo tanto:

$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \sqrt{\dfrac{3}{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot$ sen (73° 13' 12'') $= \sqrt{3}\cdot 0{,}957 =$
$= 1{,}66$

Página 101

17. $A = \left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot \text{sen } 60 = 6\cdot 3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 9\cdot\sqrt{3}\ \text{u}^2$

18. El ángulo que buscamos es:

$$A = \dfrac{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot \text{sen}\left(\vec{u},\vec{v}\right)}{2} = \dfrac{4\cdot 5\cdot \text{sen}30}{2} = \dfrac{4\cdot 5\cdot 0{,}5}{2} = 5\ \text{u}^2$$

19. **a)** (14, –1, –22)

b) (5, 0, 15)

20. $\vec{u}\times\vec{v} = (-2, -2, -2x-2)$

Por lo tanto, se debe cumplir:

$-2x - 2 = -6 \rightarrow x = 2$

21. $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \dfrac{3-8}{\sqrt{9+1+16}\cdot\sqrt{1+4}} = \dfrac{-5}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{5}} = -0{,}4385$

$\widehat{\vec{u},\vec{v}} = 116°$

Por lo tanto:

$A = \sqrt{26}\cdot\sqrt{5}\cdot$ sen (116°) $= 11{,}40\cdot 0{,}8988 = 10{,}25\ \text{u}^2$

La primera diagonal del paralelogramo es:

$\vec{u}+\vec{v} = (4, 1, 2)$

Mientras que la segunda es un vector $\vec{w}$ tal que:

$\vec{u}+\vec{w} = \vec{v} \rightarrow \vec{w} = \vec{v}-\vec{u} = (-2, -1, -6)$

22. $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = \dfrac{-2+1-12}{\sqrt{4+1+9}\cdot\sqrt{1+1+16}} = \dfrac{-13}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}} =$
$= -0{,}8189$

$\widehat{\vec{u},\vec{v}} = 144°\ 58'\ 12''$

Por lo tanto:

$$A = \dfrac{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}\cdot\text{sen}(144°\ 58'12'')}{2} = 7{,}94\ \cdot\ 0{,}5739 =$$
$= 4{,}56\ \text{u}^2$

El lado que falta es un vector $\vec{w}$ tal que:

$\vec{u}+\vec{w} = \vec{v} \rightarrow \vec{w} = \vec{v}-\vec{u} = (3, 0, -7)$

Calculamos ahora el ángulo $\widehat{\vec{u},\vec{w}}$:

$$\cos\left(\vec{u},\vec{w}\right) = \dfrac{-6-21}{\sqrt{4+1+9}\cdot\sqrt{9+49}} = -0{,}9475$$

$\widehat{\vec{u},\vec{w}} = 161°\ 21'$

El ángulo que buscamos, sin embargo, es 180° – 161° 21' = 18° 39' o lo que es lo mismo, el ángulo $\widehat{\vec{u},-\vec{w}} = -\widehat{\vec{u},\vec{w}}$

El ángulo que falta es $\widehat{\vec{v},\vec{w}}$ = 180° – 18° 39' – 144° 58' 12'' = 180° – 163° 37' 12'' = 16° 22' 48''.

Página 102

- Es imposible la tercera, $\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\times\left(\vec{w}\cdot\vec{z}\right)$, ya que el producto vectorial sólo es posible entre vectores pero $\vec{u}\cdot\vec{v}$ y $\vec{w}\cdot\vec{z}$ son números reales.

Página 103

23. $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 7$

24. No, serán linealmente dependientes como se vió en la página 95 del Libro de texto.

5

25. $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix}1 & 0 & -5\\ -1 & -2 & 0\\ -1 & -4 & -5\end{vmatrix}=0$

26. El producto mixto es 0, por lo tanto, los vectores son linealmente dependientes y coplanarios.

5

Página 106

1. Un *vector fijo* es un segmento dirigido entre dos puntos mientras que un *vector libre* es un conjunto de vectores fijos de igual módulo, dirección y sentido.

2. V es un espacio vectorial real cuando se cumplen las siguientes condiciones:

Hay dos operaciones definidas:

Operación *suma* $\rightarrow a + b$

Operación *producto por un número real* $\rightarrow k \cdot a$,

Donde $a, b \in V$, $k \in \mathbb{R}$

La *suma* debe ser conmutativa, asociativa, tener elemento neutro, el 0, y elemento inverso de cualquier $a \in V$, $-a$.

El *producto por un número real* debe tener elemento neutro, el 1, debe ser asociativo, y distributivo respecto de la *suma* por ambos lados.

Ejemplos:

1. $\mathbb{R}[x]$ = {polinomios en x con coeficientes en $\mathbb{R}$}

Suma $\rightarrow$ (P + Q) (x) = P(x) + Q(x)

Producto por un número real $\rightarrow$ a[P(x)] = (aP) (x)

2. El conjunto de los números complejos, con la suma y la multiplicación por un escalar naturales, es también un producto vectorial.

3. Una *base* de V_3 es cualquier terna de vectores no nulos y no coplanarios.

Si $B = \left\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right\}$ es una base de V_3, y se cumple:

$\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$

Entonces (a, b, c) son las componentes de $\vec{v}$ en la base B.

4. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$

Propiedades:

1. Conmutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

2. Distributiva respecto de la suma: $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

3. $k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)=\left(k\vec{u}\right)\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right)=\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)k$

Expresión analítica en una base ortonormal:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3$

Donde $\vec{u}=(u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3)$

5. El *producto vectorial* de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un vector $\vec{u}\times\vec{v}$ tal que:

$$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\operatorname{sen}\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$$

Su dirección es perpendicular al plano determinado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Su sentido es el determinado por un sacacorchos que gira de $\vec{u}$ hacia $\vec{v}$ por el camino más corto.

Propiedades:

1. Anticonmutativa: $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$

2. Asociativa mixta: $(k\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(k\vec{v}) = k(\vec{u}\times\times\vec{v})$

3. Distributiva respecto de la suma: $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})+(\vec{u}\times\vec{w})$

Expresión analítica en una base ortonormal:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}$$

Donde $\vec{u}=(u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v}=(v_1, v_2, v_3)$

6. $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$

Propiedades:

1. Permutando los vectores, no varía:

$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\left[\vec{v},\vec{w},\vec{u}\right]=\left[\vec{w},\vec{u},\vec{v}\right]$

2. Cambiando de posición dos de los vectores, cambia de signo:

$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=-\left[\vec{v},\vec{u},\vec{w}\right]$

3. Si los vectores son linealmente dependientes, es nulo.

4. Si los vectores son linealmente independientes es diferente de 0.

Expresión analítica en una base ortonormal:

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

7. *Producto escalar* → es el producto del módulo de uno de los vectores por el módulo de la proyección del otro sobre él, con signo positivo o negativo, en función del valor del ángulo entre los vectores.

Producto vectorial → su módulo es el área del paralelogramo determinado por los dos vectores.

Producto mixto → su valor absoluto es el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

8. $\vec{x}=-\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$

9. $\vec{x}=2\vec{u}-\vec{v}+3\vec{w}$

10. $a=-2$

$b=-1$

$c=1$

11. a) $(6,-1,-1)$

b) $(3,-5,-1)$

c) $(7,-6,1)$

d) $(-2,1,-5)$

e) $(3,4,0)$

f) $(5,4-3)$

12. a) $(37,1,15)$

b) $(17,-1,15)$

c) $(-8,5,0)$

d) $(19,6,3)$

e) $(-11,10,6)$

f) $(-29,16,-18)$

13. En el plano los vectores tienen dos componentes, la matriz formada por un conjunto de ellos, no podrá tener, por lo tanto, rango mayor que 2, El número máximo de vectores linealmente independientes en el plano será dos.

En el espacio, análogamente, tres.

14. Los de los apartados *a*, *b* y *c* pues son proporcionales. Las razones de proporcionalidad, 3 entre *a* y *b*, 2 entre *a* y *c*, son positivas, por lo tanto, tienen también el mismo sentido.

15. $-2/1=6/(-3)=-2$

Para que sean linealmente dependientes, se debería cumplir:

$-2=k/4\rightarrow k=-8$

Por lo tanto, si $k\neq-8$, los vectores son linealmente independientes.

16. Se debe cumplir:

$-6/(-2)=3=k/1=9/k$

Por lo tanto, $k=3$.

17. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=16\rightarrow$ Son linealmente independientes.

18. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-6\rightarrow$ Son linealmente independientes.

19. $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}=-26\rightarrow$

→ Son linealmente independientes y, por lo tanto, no son coplanarios.

20. $\begin{vmatrix} k-1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 8 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix}=-k^2+6k+16=0\rightarrow k=8,-2$

Son linealmente dependientes cuando $k=8$, $k=-2$.

21. $\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-9k-3=0\rightarrow k=-1/3$

Son coplanarios cuando $k=-1/3$.

22. $\begin{vmatrix} k & -1 & -2 \\ 1 & k & 0 \\ k+2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=3k^2+4k+1=0\rightarrow k=-1/3,\ k=$ $=-1$

Son coplanarios cuando $k=-1/3$, $k=-1$.

23. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}=0\rightarrow\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ son coplanarios.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & k \end{vmatrix} = 14k - 56 = 0 \rightarrow k = 4 \rightarrow$ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}$ son coplanarios si $k = 4$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & k \end{vmatrix} = 14k - 56 = 0 \rightarrow k = 4 \rightarrow$ $\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}$ son coplanarios si $k = 4$

$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & k \end{vmatrix} = 14k - 56 = 0 \rightarrow k = 4 \rightarrow$ $\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ son coplanarios si $k = 4$

Por lo tanto, si $k = 4$, los cuatro vectores son coplanarios.

24. a) $2\vec{u} = \vec{v} \rightarrow$ Son linealmente dependientes.

b) No es posible pues $\vec{u}, \vec{v}$ son linealmente dependientes.

c) Actividad personal. Multiplicando cualquier de los dos vectores por un número distinto de cero, obtenemos el vector deseado.

25. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -3 & k \end{vmatrix} = 8k + 27 = 0 \rightarrow k = -27/8$

Si $k = -27/8$ son linealmente dependientes.

Si $k = -3$:

$(2, -5, -5) = a\,(3, 2, 5) + b\,(2, 4, 7) + c\,(1, -3, -3)$

$a = 1, b = -1, c = 1$

Por lo tanto:

$\vec{v} = \vec{v_1} - \vec{v_2} + \vec{v_3}$

Página 107

26. $(0, 0, 0) = x\,(1, -1, 0) + y\,(1, 1, 1) + z\,(2, 0, 1) \rightarrow$
$\rightarrow x = -\lambda, y = -\lambda, z = \lambda$

(0, 0, 0) se puede escribir de infinitas maneras como combinación lineal de (1, –1, 0), (1, 1, 1) y (2, 0, 1) y, por lo tanto, estos vectores son linealmente dependientes.

27. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \rightarrow$ Los vectores son linealmente independientes y, por lo tanto, forman base.

28. $\left(\dfrac{25}{3}, -\dfrac{5}{3}, -\dfrac{5}{3}\right)$

29. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & m-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m-2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 3m + 2 = 0 \rightarrow m = 1, m = 2$

Es una base de V_3 cuando $m \neq 1, m \neq 2$.

30. Forman base $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$.

$(-1, 1, -15) = x\,\vec{v_1} + y\,\vec{v_2} + z\,\vec{v_3}$

$x = -8, y = -1, z = -1$

Por lo tanto, en esta base:

$\vec{v_4} = (-8, -1, -1)$

31. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -7 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

Por lo tanto, los vectores $2\vec{v_1} + \vec{v_2} - \vec{v_3}, \vec{v_1} - \vec{v_2}$, $-7\vec{v_1} - 2\vec{v_2} + 3\vec{v_3}$ no forman una base.

32. Utilizaremos de nuevo las propiedades de los determinantes:

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Por lo tanto, $\vec{v_1} - \vec{v_2}, -\vec{v_2} + 2\vec{v_1}, \vec{v_3} - \vec{v_1} + \vec{v_2}$ forman una base.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$

Los vectores $\vec{v_1} + \vec{v_2} - \vec{v_3}, \vec{v_1} - \vec{v_2} + \vec{v_3}$, $2\vec{v_1} + 3\vec{v_2} - 3\vec{v_3}$ no forman base.

33. $\begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -5/2 \rightarrow$ Forman base.

$(1, 1, 1) = x\,(1/2, 3/2, 0) + y\,(3/2, -1/2, 0) + z\,(0, 0, 1) \rightarrow x = 4/5,\ y = 2/5\ z = 1$

La expresión de $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ en la base $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$es $(4/5, 2/5, 1)$.

34. Sí, ya que el producto escalar de dos vectores es el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

Si dicho coseno vale 0,5, es decir, si forman un ángulo de 60°, el módulo de los vectores puede ser 4 y 5 y su producto escalar, 10.

35. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8k - 15 - 2 = -2 \rightarrow$

$\rightarrow k = 15/8$

36. a) $\sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

b) $\sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$

c) $\sqrt{15+1+9} = \sqrt{25} = 5$

d) $\sqrt{9+1+25} = \sqrt{35}$

37. $\sqrt{\dfrac{1}{4} + 4k^2 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\dfrac{1}{4} + 4k^2 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{2}{4}$;

$k = 0$

38. a) Dado un vector, hay infinitos vectores diferentes de igual módulo.

b) En este caso sí, a partir de las coordenadas podemos calcular el producto escalar y los módulos y a partir de éstos, el coseno del ángulo.

39. $\left|\vec{u}\right| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$

Hay dos vectores unitarios con la misma dirección que $\vec{u}$:

$\left(\dfrac{2}{\sqrt{14}}, \dfrac{3}{\sqrt{14}}, \dfrac{-1}{\sqrt{14}}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{14}}{7}, \dfrac{3}{\sqrt{14}}, \dfrac{-1}{\sqrt{14}}\right)$

$\left(-\dfrac{\sqrt{14}}{7}, -\dfrac{3}{\sqrt{14}}, \dfrac{1}{\sqrt{14}}\right)$

40. $|\mathrm{Proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}\,| = \dfrac{\left|\vec{u} \cdot \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \dfrac{|6+1+2|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{9}{\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

Por lo tanto, $\mathrm{Proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}$ es un vector de módulo $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ que tiene la misma dirección y sentido que $\vec{v}$.

Por lo tanto: $\mathrm{Proy}_{\vec{v}}\,\vec{u} = \dfrac{\dfrac{3\sqrt{6}}{2} \cdot \vec{v}}{\sqrt{6}} = \dfrac{3\vec{v}}{2} = \left(3, \dfrac{3}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$.

41. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4k + 2 - 1 = 0 \rightarrow k = -1/4$

42. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$;

$-8k + 4 + 2 = \sqrt{4k^2 - 4k + 5}\ \sqrt{18} \cdot 0{,}5$;

$64k^2 - 96k + 36 = (4k^2 - 4k + 5) \cdot 18 \cdot 0{,}25$;

$64k^2 - 96k + 36 = 18k^2 - 18k + 22{,}5$;

$46k^2 - 78k + 13{,}5 = 0$;

$k_1 = 1{,}5,\ k_2 = 0{,}20$

Sin comprobamos las soluciones, observamos que únicamente k_2 es solución de la ecuación original.

43. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$;

$1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}k = \sqrt{1 + \dfrac{k^2}{9}}\sqrt{1+1+3} \cdot 0{,}5$;

$1 + \dfrac{2\sqrt{3}}{3}k + \dfrac{k^2}{3} = 1{,}25 + 0{,}13\underline{8}k^2$;

$3 + 2\sqrt{3}\,k + k^2 = 3{,}75 + 0{,}41\underline{6}k^2$;

$k_1 = 0{,}2091,\ k_2 = -6{,}1477$

k_2 no es solución del la ecuación original, por lo tanto, la solución que buscamos es $k_1 = 0{,}2091$.

44. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left|\vec{u}\right| \cdot \left|\vec{v}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$;

$2k - 2 = \sqrt{k^2 + 1 + 4}\sqrt{4+1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$4k^2 - 8k + 4 = 2{,}5k^2 + 12{,}5$;

$k_1 = 6{,}241;\ k_2 = -0{,}908$

k_1 es solución de la ecuación original, al contrario que k_2.

45. $\vec{v} \cdot \vec{v_1} = 3 \rightarrow x + 3y - 2z = 3$

$\vec{v}\cdot\vec{v_2} = 2 \rightarrow 4x - y + 2z = 2$

$\vec{v}\cdot\vec{v_3} = 1 \rightarrow 2x + 5y + z = 1$

Por lo tanto:

$x = 1,\ y = 0,\ z = -1 \rightarrow \vec{v} = (1, 0, -1)$

46. $\vec{u}\perp\vec{v} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \rightarrow x + 4 + 2y = 0$

$\vec{u}\perp\vec{w} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \rightarrow -2x + 3 + y = 0$

Solución: $x = 2/5,\ y = -11/5$

47. $\vec{u}\perp\vec{v} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \rightarrow x + z = 0 \rightarrow x = -z$

$\widehat{\vec{u},\vec{w}} = 60°$

$\rightarrow 2\sqrt{2}\,x - 2y + 2z = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ \cdot$

$\cdot\sqrt{8+4+4}\cdot 0{,}5$

$8x^2 - 8\sqrt{2}\,xy + 8\sqrt{2}\,xz + 4y^2 - 8yz + 4z^2 =$

$= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2;$

$2x^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 2\sqrt{2}\,xz + y^2 - 2yz + z^2 =$

$= x^2 + y^2 + z^2;$

$x^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 2\sqrt{2}\,xz - 2yz = 0;$

Como $x = -z$:

$z^2 + 2\sqrt{2}\,zy - 2\sqrt{2}\,z^2 - 2yz = 0;$

$(1 - 2\sqrt{2})z^2 + 2(\sqrt{2} - 1)yz = 0;$

Hay dos posibilidades:

$z = 0 \rightarrow 0 = 0 \rightarrow$ Solución: $x = 0,\ y = \lambda,\ z = 0$

$z \neq 0 \rightarrow (1 - 2\sqrt{2})z^2 + 2(\sqrt{2} - 1)yz = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (1 - 2\sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} - 1)y = 0 \rightarrow$

$\rightarrow y = \dfrac{2\sqrt{2} - 1}{2(\sqrt{2} - 1)}z \rightarrow$ Solución: $x = -\lambda$,

$,\ y = \dfrac{2\sqrt{2} - 1}{2(\sqrt{2} - 1)}\lambda = 2{,}207\lambda,\ z = \lambda$

Buscamos ahora los vectores unitarios:

Si $x = 0,\ y = \lambda,\ z = 0 \rightarrow (0, \lambda, 0) \rightarrow (0, 1, 0)$ es solución

Si $x = -\lambda,\ y = 2{,}207\lambda,\ z = \lambda \rightarrow (-\lambda; 2{,}207\lambda; \lambda)$

El módulo de este vector es:

$\sqrt{2\lambda^2 + 4{,}871\lambda^2} = \sqrt{6{,}871\lambda^2}$

El vector unitario es:

$$\left(\frac{-\lambda}{\sqrt{6{,}871\lambda^2}}, \frac{2{,}207\lambda}{\sqrt{6{,}871\lambda^2}}, \frac{\lambda}{\sqrt{6{,}871\lambda^2}}\right) =$$

$$= \left(\frac{-1}{\sqrt{6{,}871}}, \frac{2{,}207}{\sqrt{6{,}871}}, \frac{1}{\sqrt{6{,}871}}\right) = (0{,}381; 0{,}842; -0{,}381)$$

48. $(\vec{u} + \vec{v})\cdot(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v} =$

$= \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0$

49. $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = \sqrt{(u_1v_1)^2 + (u_2v_2)^2 + (u_3v_3)^2}$

$|\vec{u}| = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$

$|\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2 + {v_2}^2 + {v_3}^2}$

Por lo tanto:

$|\vec{u}|\cdot|\vec{v}| = \sqrt{(u_1v_1)^2 + (u_2v_2)^2 + (u_3v_3)^2 + \sum_{i\neq j}(u_iv_j)^2}$

Por lo tanto, como $\sum_{i\neq j}(u_iv_j)^2 \geq 0$:

$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

50. $\vec{u}\perp\vec{v} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \rightarrow -a - 3b + 12 = 0$

$\vec{u}\perp\vec{w} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \rightarrow -3a - 3b + 24 = 0$

Solución: $a = 6,\ b = 2$

51. $\vec{u}\perp\vec{v} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \rightarrow 2x + y = 0 \rightarrow y = -2x$

El vector es:

$(x, -2x, 0) \rightarrow (1, -2, 0)$

Como su módulo es: $\sqrt{1+4} = 5$

El vector unitario que buscamos es:

$\left(\frac{1}{5}, \frac{-2}{5}, 0\right)$ o bien $\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$

52. $\vec{u}\perp\vec{v} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \rightarrow 4x - y + 2 = 0$

$\vec{u}\perp\vec{w} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \rightarrow x - 2y + 3 = 0$

Solución: $a = -1/7$, $b = 10/7$

53. $\vec{w} = (x, y, z)$

Coplanario con $\vec{u}, \vec{v}$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 8x + 8y + 4z = 0 \to 2x + 2y + z = 0$$

Ortogonal a $\vec{v}$:

$x + y - 4z = 0$

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ x + y - 4z = 0 \end{cases} \to x = -\lambda,\ y = \lambda,\ z = 0 \to$$

$\to (-\lambda, \lambda, 0) \to (-1, 1, 0)$

Por lo tanto:

$$\vec{w} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

O bien:

$$-\vec{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

54. $\vec{u} + \vec{v} = (k + 2, 3, -4)$

$\vec{u} - \vec{v} = (k - 2, -2, -2)$

Para que sean ortogonales, por lo tanto:

$(k + 2)(k - 2) - 6 + 8 = 0;$

$k^2 - 2 = 0;$

$k = \pm\sqrt{2}$

Página 108

55. $\vec{v} = (1, 1, 1)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} \to \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \to a^2 - 1 + a - 1 = 0 \to a^2 + a - 2 = 0 \to a = 1, a = -2$

Si $a = 1 \to \vec{u} = (1, -1, 0) \to$ No es paralelo a $\vec{w}$.

Si $a = -2 \to \vec{u} = (4, -1, -3) \to$ Paralelo a $\vec{w}$.

El único vector que cumple las condiciones es:

$(4, -1, -3)$

56. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = 0;$

$\vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = 0$

$|\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0$

Por lo tanto, los módulos de los vectores son iguales, es decir, $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 2$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right);$$

$$2\sqrt{3} = 4 \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right);$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \to \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 30°$$

57. $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})} = 20;$

$\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u} + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}} = 20;$

$\sqrt{100 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} + 300} = 20;$

$400 + 2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = 400;$

$2 \cdot \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \to$ Los vectores son ortogonales.

58. Consideramos $\vec{v} + \vec{w} = \vec{u}$.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 64 \cdot \cos 60 = 64 \cdot 0{,}5 = 32$

$\vec{u} \cdot \vec{w} = 64 \cdot \cos 120 = 64 \cdot (-0{,}5) = -32$

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 64 \cdot \cos 120 = 64 \cdot (-0{,}5) = -32$

59. $\vec{v} = (2, -1, 0)$ es ortogonal a $\vec{u}$.

$|\vec{v}| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

Solución:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}, 0\right) = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right)$$

$$\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right)$$

60. Buscamos un vector de la siguiente forma:

(x, y, x + y)

Tal que:

(2, 3, –1) · (x, y, x + y) = 2x + 3y – x – y = 0;

x + 2y = 0 → x = –2y

Por lo tanto, el vector es:

(–2y, y, –y) → (–2, 1, –1)

Otra solución es el opuesto de este vector, es decir, el vector (2, –1, 1).

5

61. $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{w}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)+\vec{v}\cdot\vec{w}=$

$=-\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{w}=-3+\vec{v}\cdot\vec{w}$

Análogamente:

$\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{w}\cdot\vec{u}=-1+\vec{u}\cdot\vec{w}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{w}\cdot\vec{u}=-4+\vec{u}\cdot\vec{v}$

Por lo tanto:

$$\begin{cases}-3=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{u}\\ -1=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{w}\\ -4=\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{w}\cdot\vec{u}\end{cases}\rightarrow$$

$\rightarrow\ \vec{u}\cdot\vec{v}=0,\ \vec{w}\cdot\vec{u}=-3,\ \vec{v}\cdot\vec{w}=-1$

Por lo tanto:

$\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{w}\cdot\vec{u}=0-1-3=-4$

62. Primera diagonal → $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}=(-1, 3, 1)$

Segunda diagonal → $\vec{x}=\vec{v}-\vec{u}=(-3, -1, -5)$

a) $\vec{w}\cdot\vec{x}=\left|\vec{w}\right|\cdot\left|\vec{x}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{w},\vec{x}}\right);$

$-5=\sqrt{1+9+1}\sqrt{9+1+25}\cdot\cos\left(\widehat{\vec{w},\vec{x}}\right);$

$\cos\left(\widehat{\vec{w},\vec{x}}\right)=-0{,}2548\rightarrow\ \widehat{\vec{w},\vec{x}}=104°\ 45'36''$

b) $\vec{w}$ es la diagonal menor.

$\vec{w}\cdot\vec{u}=\left|\vec{w}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{w},\vec{u}}\right);$

$8=\sqrt{1+9+1}\sqrt{1+4+9}\cdot\cos\left(\widehat{\vec{w},\vec{u}}\right);$

$\cos\left(\widehat{\vec{w},\vec{u}}\right)=0{,}6447\rightarrow\ \widehat{\vec{w},\vec{u}}=49°\ 51'$

63. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}=3$

En el producto escalar no existe el elemento inverso, por lo tanto, de $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$ no puede deducirse la igualdad entre $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Finalmente, si $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$:

$\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\left(\vec{v}-\vec{w}\right)=0$

64. Es ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{u}\times\vec{v}$ mientras que su sentido es el contrario al de $\vec{v}$ tomando como referencia el plano determinado por $\vec{u}$ y $\vec{u}\times\vec{v}$.

65. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right);$

$4=\sqrt{5}\cdot 3\cdot\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right);$

$\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=0{,}5963$

$\widehat{\vec{u},\vec{v}}=53°\ 23'\ 24''$

Por lo tanto:

$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\text{sen}\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right);$

$\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\sqrt{5}\cdot 3\cdot\text{sen}\ (53°\ 23'\ 24'')=5{,}39$

66. $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\ \rightarrow\ \widehat{\vec{u},\vec{v}}=90°$

$A=\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\sqrt{30}\cdot\sqrt{5}\cdot\text{sen}\ 90=\sqrt{30}\cdot\sqrt{5}=12{,}45\ u^2$

67. $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|=\left|(-2, 3, 1)\right|=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$

$A_{\text{Triángulo}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}\ u^2$

68. $\vec{u}\times\vec{v}=(-1,-2m-1,m)=(-1,-7,3)\rightarrow m=3$

69. $\vec{u}\times\vec{v}=(2+m^2,2,-m)$

$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=-6-3m^2-4-m=0\rightarrow$ No tiene solución.

No existen valores de *m* para los que $\vec{u}\times\vec{v}$ y $\vec{w}$ son ortogonales.

70. $\vec{u}\times\vec{v}=(40,20,0)$

El vector obtenido no es el nulo, por lo tanto, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son vectores paralelos.

71 $|\vec{u}\times\vec{v}|=4\cdot\sqrt{144+16+36}\cdot\text{sen }90=4\cdot 14\cdot 1=56$

72. $\vec{u}\cdot\vec{v}=6x+4y-3z=12$

$\vec{u}\times\vec{v}=(4z+3y,-6z-3x,6y-4x)=(17,-15,14)$

Por lo tanto, tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases}6x+4y-3z=12\\4z+3y=17\\-6z-3x=-15\\6y-4x=14\end{cases}$$

Solución: $x=1$, $y=3$, $z=2$

El vector es (1, 3, 2).

73. $(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}\times(\vec{u}-\vec{v})+\vec{v}\times(\vec{u}-\vec{v})=$

$=\vec{u}\times\vec{u}-\vec{u}\times\vec{v}+\vec{v}\times\vec{u}-\vec{v}\times\vec{v}=-\vec{u}\times\vec{v}+\vec{v}\times\vec{u}=$

$=-\vec{u}\times\vec{v}-\vec{u}\times\vec{v}=-2\vec{u}\times\vec{v}$

74. $(\vec{u}\cdot\vec{v})^2+|\vec{u}\times\vec{v}|^2=$

$$=\left[|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\right]^2+\left[|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\text{sen}\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)\right]^2=$$

$$=\left(|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\right)^2\left[\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)^2+\text{sen}\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)^2\right]=$$

$$=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2$$

75. Sea $\vec{u}=(x,y,z)$:

$\vec{u}\times(-1,-2,2)=(2y+2z,-2x-z,-2x+y)=(-2,2,1)$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases}2y+2z=-2\\-2x-z=2\\-2x+y=1\end{cases}$$

Solución: $x=-1-\lambda/2$, $y=-1-\lambda$, $z=\lambda$

Por otra parte: $x^2+y^2+z^2=25$.

$(-1-\lambda/2)^2+(-1-\lambda,)^2+\lambda^2=25;$

$9\lambda^2+12\lambda-92=0;$

$\lambda_1=2{,}60\rightarrow x=-2{,}3;\ y=-3{,}60;\ z=2{,}60$

$\lambda_2=-3{,}93\rightarrow x=0{,}97;\ y=2{,}93;\ z=-3{,}93$

76. Es ambiguo ya que tanto $\vec{u}\cdot\vec{v}$ como $\vec{v}\times\vec{w}$ son vectores y, por lo tanto, se puede interpretar como:

$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ o bien $(\vec{u}\cdot\vec{v})\times\vec{w}$.

77. **a)** Su valor absoluto es el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores

b) El volumen del tetraedro es la sexta parte del volumen del paralelepípedo.

78. $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}5&3&-1\\-2&-1&2\\0&-1&3\end{vmatrix}=11$

79. $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}5&1&-2\\3&4&2\\4&1&3\end{vmatrix}=75$

$V_{Tetraedro}=75/6=12{,}5\ u^3$

80. $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}-1&1&-2\\6&-1&2\\0&-2&0\end{vmatrix}=20$

$V_{Prisma}=20/2=10\ u^3$

81. $|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|=|\vec{v}\times\vec{w}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}}\right)=$

$=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cdot\text{sen}\left(\widehat{\vec{v},\vec{w}}\right)\cdot|\vec{u}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}}\right)=$

$= m^3 \cdot \operatorname{sen}\left(\widehat{\vec{v},\vec{w}}\right) \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}}\right)$

Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son ortogonales:

$\left|\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]\right| = m^3 \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}\times\vec{w}}\right) \rightarrow \left|\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]\right| = m^3$ si $\vec{u}$ y $\vec{v}\times\vec{w}$ son paralelos, es decir, si $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son ortogonales dos a dos.

Si, además de ser paralelos $\vec{u}$ y $\vec{v}\times\vec{w}$ tienen el mismo sentido, $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = m^3 \rightarrow$ valor máximo

Si, en cambio, son paralelos pero tienen sentidos contrarios, $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = -m^3 \rightarrow$ valor mínimo.

82. a) $\left|\left[\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}\right]\right| = 4 \rightarrow$ Es el volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores.

b) $\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_3} = \left|\overrightarrow{v_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_3}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}}\right)$;

$0 = \sqrt{5}\cdot 2\cdot\cos\left(\widehat{\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}}\right)$;

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}}\right) = 0 \rightarrow \widehat{\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}} = 90°$

c) Forman base porque el producto mixto no era nulo.

Para hallar las componentes (x, y, z) de $\vec{w}$ solucionamos el siguiente sistema:

$\vec{w} = x\overrightarrow{v_1} + y\overrightarrow{v_2} + z\overrightarrow{v_3}$

$$\begin{cases} 1 = x + 2z \\ -2 = 2y \\ 0 = -x - y \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow x = 1, y = -1, z = 0$

Página 109

83. a) Actividad personal. En efecto, los vectores son unitarios y ortogonales dos a dos.

b) Si x, y, z son las componentes que buscamos, se debe cumplir:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sqrt{3}y}{2} \\ 1 = \dfrac{\sqrt{3}x}{2} - \dfrac{y}{2} \\ 1 = z \end{cases} \rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2},\ y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2},\ z = 1$$

84. Forman una base pues cualquiera de los vectores será perpendicular al plano determinado por los otros dos, es decir, no pueden ser coplanarios.

85. Actividad personal. Hemos visto que el trabajo es una magnitud escalar mientras que con el producto escalar se pueden expresar algunos volúmenes.

86. a) Cierta. El producto vectorial será nulo $\rightarrow$ El ángulo que forman es *arc sen* $0 = 0°$.

b) Cierta. Al no ser coplanarios, uno no se puede escribir como combinación lineal de los otros dos.

c) Falso. Si el producto escalar es nulo, el ángulo que forman es *arc cos* $0 = 90°$.

d) Cierta.

87. a) Número real

b) Número real

c) Vector

d) Vector

88. $\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2 = \left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}\right) = \vec{u}\cdot\vec{u} + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v} =$

$= 16 + 0 + 9 = 25 \rightarrow \left|\vec{u}+\vec{v}\right| = 5$

$\left|\vec{u}-\vec{v}\right|^2 = \left(\vec{u}-\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \vec{u}\cdot\vec{u} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v} =$

$= 16 - 0 + 9 = 25 \rightarrow \left|\vec{u}-\vec{v}\right| = 5$

89. $\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{w}\times\vec{s}\right) = (u_2v_3 - u_3v_2,\ u_3v_1 - u_1v_3,\ u_1v_2 - u_2v_1)\cdot$
$\cdot (w_2s_3 - w_3s_2,\ w_3s_1 - w_1s_3,\ w_1s_2 - w_2s_1) =$

$= (u_2v_3 - u_3v_2)(w_2s_3 - w_3s_2) + (u_3v_1 - u_1v_3)(w_3s_1 - w_1s_3) + (u_1v_2 - u_2v_1)(w_1s_2 - w_2s_1) =$

$= u_2v_3w_2s_3 - u_2v_3w_3s_2 - u_3v_2w_2s_3 + u_3v_2w_3s_2 + u_3v_1w_3s_1 - u_3v_1w_1s_3 - u_1v_3w_3s_2 + u_1v_3w_1s_3 + u_1v_2w_1s_2 - u_1v_2w_2s_1 - u_2v_1w_1s_2 + u_2v_1w_2s_1$

Desarrollando por coordenadas la operación:

$\left(\vec{u}\cdot\vec{w}\right)\cdot\left(\vec{v}\cdot\vec{s}\right)-\left(\vec{u}\cdot\vec{s}\right)\cdot\left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right)=$

$= (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3)\ (v_1s_1 + v_2s_2 + v_3s_3) - (u_1s_1 + u_2s_2 + u_3s_3)\ (v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)$

Se obtiene el mismo resultado.

90. $\vec{u}\times\left(\vec{v}+\vec{w}\right)+\vec{v}\times\left(\vec{w}+\vec{u}\right)+\vec{w}\times\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=$

$=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}+\vec{v}\times\vec{w}+\vec{v}\times\vec{u}+\vec{w}\times\vec{u}+\vec{w}\times\vec{v}=$

$=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}+\vec{v}\times\vec{w}-\vec{u}\times\vec{v}-\vec{u}\times\vec{w}-\vec{v}\times\vec{w}=$

$=0$

91. $\left[\vec{u}+\vec{w},\vec{u}-\vec{w},\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\right]=\left[\vec{u}+\vec{w},\vec{u}-\vec{w},\vec{u}+\vec{w}\right]+$

$+\left[\vec{u}+\vec{w},\vec{u}-\vec{w},\vec{v}\right]=\left[\vec{u},\vec{u}-\vec{w},\vec{v}\right]+\left[\vec{w},\vec{u}-\vec{w},\vec{v}\right]=$

$=\left[\vec{u},\vec{u},\vec{v}\right]+\left[\vec{u},-\vec{w},\vec{v}\right]+\left[\vec{w},\vec{u},\vec{v}\right]+\left[\vec{w},-\vec{w},\vec{v}\right]=$

$=-\left[\vec{u},\vec{w},\vec{v}\right]-\left[\vec{u},\vec{w},\vec{v}\right]=-2\left[\vec{u},\vec{w},\vec{v}\right]\neq 0$

$\left[\vec{u}+\vec{w},\vec{v},\vec{u}+\vec{v}\right]=\left[\vec{u}+\vec{w},\vec{v},\vec{u}\right]+\left[\vec{u}+\vec{w},\vec{v},\vec{v}\right]=$

$=\left[\vec{u},\vec{v},\vec{u}\right]+\left[\vec{w},\vec{v},\vec{u}\right]=\left[\vec{w},\vec{v},\vec{u}\right]\neq 0$

$\left[\vec{u}-\vec{w},\vec{v}-\vec{w},\vec{w}-\vec{u}\right]=\left[\vec{u},\vec{v}-\vec{w},\vec{w}-\vec{u}\right]+$

$+\left[-\vec{w},\vec{v}-\vec{w},\vec{w}-\vec{u}\right]=\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}-\vec{u}\right]+\left[\vec{u},-\vec{w},\vec{w}-\vec{u}\right]+$

$+\left[-\vec{w},\vec{v},\vec{w}-\vec{u}\right]+\left[-\vec{w},-\vec{w},\vec{w}-\vec{u}\right]=\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]+$

$+\left[\vec{u},\vec{v},-\vec{u}\right]+\left[-\vec{w},\vec{v},\vec{w}\right]+\left[-\vec{w},\vec{v},-\vec{u}\right]=\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]-$

$-\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=0$

92. Consideramos el cubo determinado por las aristas $\vec{i}=(1,0,0)$, $\vec{j}=(0,1,0)$, $\vec{k}=(0,0,1)$

La diagonal de este cubo es el vector $\vec{d}=(1,1,1)$.

$\vec{i}\cdot\vec{d}=\left|\vec{i}\right|\cdot\left|\vec{d}\right|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{d}}\right);$

$1=\sqrt{3}\ \cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{d}}\right);$

$\cos\left(\widehat{\vec{i},\vec{d}}\right)=0{,}5774\rightarrow\widehat{\vec{i},\vec{d}}=54°\ 43'\ 48''$

Con el resto de aristas forma el mismo ángulo.

Autoevaluación

1. $\dfrac{-6}{2k}=\dfrac{9}{-3}=\dfrac{-6}{k+1}\rightarrow k=1$

2. $\begin{vmatrix}4 & -1 & 3\\ -5 & 4 & 8\\ -1 & 3 & 11\end{vmatrix}=0\rightarrow$ Son coplanarios.

3. $\begin{vmatrix}-2 & 3 & -k\\ -1 & -1 & 1\\ k & -k & 2\end{vmatrix}=10+k-2k^2=0\rightarrow k=-2,\ k=5/2$

Son linealmente independientes si $k\neq-2$, $k\neq 5/2$.

4. $\begin{vmatrix}a & 1 & 2\\ 1 & 1 & a\\ 3a-2 & 1 & 6-2a\end{vmatrix}=0\rightarrow$ Linealmente dependientes.

Si $a=2$:

$\vec{u}=(2,1,2)$

$\vec{v}=(1,1,2)$

Por lo tanto:

$\vec{z}=7\vec{u}-5\vec{v}$

5. **a)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=-k+1=0\rightarrow k=1$

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos 60;$

$-k+1=\sqrt{2}\ \sqrt{5+k^2}\cdot 0{,}5;$

$1+k^2-2k=0{,}5k^2+2{,}5;$

$0{,}5k^2-2k-1{,}5=0\rightarrow k_1=4{,}65,\ k_2=-0{,}65$

Aunque solamente k_2 es solución de la ecuación original.

6. $\left|\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u}\right|=\dfrac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{|6|}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

Además, como $\vec{u}\cdot\vec{v}>0$, tiene el mismo sentido que $\vec{v}$, por lo tanto:

$\text{Proy}_{\vec{v}}\vec{u}=(3,3,0)$

7. $\vec{u} \times \vec{v} = (-2, -3\sqrt{2} - 4, -3 - \sqrt{2})$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{49 + 30\sqrt{2}}$

Por lo tanto, hay dos posibles soluciones:

$$\left(\frac{-2}{\sqrt{49+30\sqrt{2}}}, \frac{-3\sqrt{2}-4}{\sqrt{49+30\sqrt{2}}}, \frac{-3-\sqrt{2}}{\sqrt{49+30\sqrt{2}}}\right)$$

O bien:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{49+30\sqrt{2}}}, \frac{3\sqrt{2}+4}{\sqrt{49+30\sqrt{2}}}, \frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{49+30\sqrt{2}}}\right)$$

8. $\vec{i} \cdot \vec{u} = |\vec{i}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}\right);$

$2 = \sqrt{38} \cdot \cos\left(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}\right);$

$\cos\left(\widehat{\vec{i}, \vec{u}}\right) = 0{,}3244 \rightarrow \widehat{\vec{i}, \vec{u}} = 71° \; 42'$

Análogamente:

$3 = \sqrt{38} \cdot \cos\left(\widehat{\vec{j}, \vec{u}}\right);$

$\cos\left(\widehat{\vec{j}, \vec{u}}\right) = 0{,}4867 \rightarrow \widehat{\vec{j}, \vec{u}} = 60° \; 52' \; 48''$

$5 = \sqrt{38} \cdot \cos\left(\widehat{\vec{k}, \vec{u}}\right);$

$\cos\left(\widehat{\vec{k}, \vec{u}}\right) = 0{,}8111 \rightarrow \widehat{\vec{k}, \vec{u}} = 35° \; 48'$

9. $A = |\vec{u} \times \vec{v}| = \left|(2 + 2\sqrt{2}, 1, 2 + \sqrt{2})\right| = \sqrt{19 + 12\sqrt{2}} \; u^2$

10. $A_{Tetraedro} = \left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right| / 6 = |-90| \; / \; 6 = 15 \; u^3$

11. Sea $\vec{u} = (x, y, z)$:

$\vec{u} \times (2, 1, -1) = (-y - z, x + 2z, x - 2y) = (1, 3, 5)$

$\rightarrow x = 3 - 2\lambda, \; y = -1 - \lambda, \; z = \lambda$

Además:

$(3 - 2\lambda)^2 + (-1 - \lambda)^2 + \lambda^2 = 6;$

$(3 - 2\lambda)^2 + (-1 - \lambda)^2 + \lambda^2 = 6;$

$6\lambda^2 - 10\lambda + 10 = 0;$

$\lambda_1 = 1 \rightarrow \vec{u} = (1, -2, 1)$

$\lambda_2 = 2/3 \rightarrow \vec{u} = (5/3, -5/3, 2/3)$

12. $A = \dfrac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{2} = \dfrac{|a - 1|}{2} = 3$

$a = 7, \; a = -5$