SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES Págs. 111 a 137

Página 111

1. $(-3, -4, 6)$

2. Lados:

$\overrightarrow{AB} = (2, -3, -6)$

$\overrightarrow{BC} = (2, 1, 4)$

$\overrightarrow{CD} = (-4, 0, -3)$

$\overrightarrow{AD} = (0, -2, -5)$

$\overrightarrow{AC} = (4, -2, -2)$

$\overrightarrow{BD} = (-2, 1, 1)$

$\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$ son paralelos, por lo tanto, son dos de los lados del cuadrilátero, por lo tanto, los otros dos lados son $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ mientras que las diagonales son $\overrightarrow{CD}$ y $\overrightarrow{AB}$.

Nota: si tomamos como referencia el plano z = 0, D está situado en el plano y B por debajo mientras que A y C quedan por encima. Si tomamos como referencia el plano x = 3, A y D quedan a un lado mientras que B y C quedan al otro. Por lo tanto, el cuadrilátero es ACBD y no ABDC.

3. M es un punto tal que $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$;

$2(m_1 - a_1, m_2 - a_2, m_3 - a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$;

$(2m_1 - 2a_1, 2m_2 - 2a_2, 2m_3 - 2a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - - a_2)$;

$(2m_1, 2m_2, 2m_3) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3)$;

$$M = (m_1, m_2, m_3) = \left(\frac{b_1 + a_1}{2}, \frac{b_2 + a_2}{2}, \frac{b_3 + a_3}{2}\right)$$

4. $C + \vec{r} = (5, 3, 6)$

$C - \vec{r} = (1, 1, 2)$

Página 113

5. a) Vectorial $\rightarrow (x, y, z) = (1, 3, 0) + \lambda(-2, 3, 1)$

$$\text{Paramétricas} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$\text{Continua} \rightarrow \frac{x-1}{-2} = y - 3 = z$$

$$\text{Implícitas} \rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 9 = 0 \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

b) Por ejemplo:

$\lambda = 1 \rightarrow (-1, 6, 1)$

$\lambda = 2 \rightarrow (-3, 95, 2)$

6. $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}$

Página 114

7. $\vec{v} = (2, -2, 1)$

$$\text{Paramétricas} \rightarrow \begin{cases} x = 7 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

$$\text{Continua} \rightarrow \frac{x-7}{2} = \frac{y+2}{-2} = z - 1$$

8. $\dfrac{4-3}{5-2} = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{7-5}{9-5} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$\dfrac{4-5}{3-5} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$

Están alineados.

Página 117

9. $(x, y, z) = (1, -2, 3) + \lambda(-3, -1, 5) + \mu(2, 1, 1)$

10. $(x, y, z) = (-2, -1, 0) + \lambda(4, 1, 3) + \mu(-2, 1, -5)$

11. $\begin{cases} x = -2 - 5\lambda - \mu \\ y = -4 + 2\lambda \\ z = 1 + 3\lambda - 4\mu \end{cases}$

12. Por ejemplo:

$\lambda = 1, \mu = 0 \rightarrow (-7, -2, 4)$

$\lambda = 0, \mu = 1 \rightarrow (-3, -4, -3)$

6

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

$\lambda = 1, \mu = 1 \rightarrow (-8, -2, 0)$

13. $\begin{cases} x = -1 - \lambda + \mu \\ y = -10 + \lambda \\ z = 8 + \lambda + 2\mu \end{cases}$

14. $XY \rightarrow A(0, 0, 0),\ \overrightarrow{v_1} = (1,0,0),\ \overrightarrow{v_2} = (0,1,0) \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$

Análogamente:

$YZ \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

$XZ \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{cases}$

15. Paramétricas $\rightarrow \begin{cases} x = 2 - \lambda + \mu \\ y = 4 - 2\lambda - \mu \\ z = 1 + 7\lambda - 3\mu \end{cases}$

General $\rightarrow 13x + 4y + 3z - 45 = 0$

16. $15x - 24y + 14z + 62 = 0$

17. Buscamos tres puntos no alineados del plano, por ejemplo:

$A = (0, 0, -3/4)$

$B = (0, 3/2, 0)$

$C = (-3/5, 0, 0)$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0, 3/2, 3/4)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-3/5, 0, 3/4)$

$\begin{cases} x = -3\mu/5 \\ y = 3\lambda/2 \\ z = -3/4 + 3\lambda/4 + 3\mu/4 \end{cases}$

18. $(x, y, z) = (-2, -6, 0) + \lambda\,(1, -4, -2) + \mu\,(1, 1, 0)$

$2x - 2y + 5z - 8 = 0$

Página 118

19. a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2, 1, 3)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-4, 0, 9)$

Paramétricas $\rightarrow \begin{cases} x = 2\lambda - 4\mu \\ y = \lambda \\ z = -1 + 3\lambda + 9\mu \end{cases}$

General $\rightarrow 9x - 30y + 4z + 4 = 0$

b) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0, -2, 5)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-6, -4, -4)$

Paramétricas $\rightarrow \begin{cases} x = 2 - 6\mu \\ y = 5 - 2\lambda - 4\mu \\ z = -2 + 5\lambda - 4\mu \end{cases}$

General $\rightarrow 28x - 30y - 12z + 70 = 0$

20. $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = (1, 1, 1)$

$\vec{v} = \overrightarrow{OB} = (1, 1, -1)$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -2x + 2y = 0$$

21. $$\begin{vmatrix} -2-3 & 3-3 & -1-3 \\ 4-11 & 0-11 & 5-11 \\ 1-5 & 2-5 & -1-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & -4 \\ -7 & -11 & -6 \\ -4 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -148$$

No son coplanarios.

Página 119

22. $7(x - 3) - 3(y + 1) - 2(z - 8) = 0;$

$7x - 3y - 2z - 8 = 0$

23. $2(x - 3) - (y - 1) - (z - 5) = 0;$

$2x - y - z = 0$

24. a) $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (6, -3, -5)$

$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (7, -7, 6)$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 6 & 7 \\ y-6 & -3 & -7 \\ z+2 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 0;$$

$-53x - 71y - 21z + 331 = 0$

b) $-53(x + 1) - 71(y - 6) - 21(z + 2) = 0$

Página 120

25. $\dfrac{x}{2} - y + \dfrac{z}{8} = 0$

26. Corte con OX $\to y = z = 0 \to x = 4 \to (4, 0, 0)$

Corte con OY $\to x = z = 0 \to y = -2 \to (0, -2, 0)$

Corte con OZ $\to x = y = 0 \to z = 4/3 \to (0, 0, 4/3)$

$$\frac{x}{4} - \frac{y}{2} + \frac{z}{4/3} = 0$$

Página 121

27. a) Rango (M) = 1

Rango (M') = 2

Paralelos

b) Rango (M) = 2

Rango (M') = 2

Secantes

c) Rango (M) = 1

Rango (M') = 1

Coincidentes

28. a) Rango (M) = 2

Rango (M') = 2

Secantes

Buscamos dos puntos de la intersección:

$A = (1, 0, -5/2)$

$B = (1, 1, -2)$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0, 1, 1/2)$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 + \lambda \\ z = -5/2 + \lambda/2 \end{cases}$$

b) Rango (M) = 2

Rango (M') = 2

Secantes

En este caso:

$A = (-2, -4, 0)$

$B = (-2, -2, 1)$

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (0, 2, 1)$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -4 + 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Página 123

29. a) Rango (M) = 3

Rango (M') = 3

Se cortan en un punto

b) Rango (M) = 2

Rango (M') = 3

No hay puntos en común

$\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{3}{6} \neq \frac{3}{5} \to \pi_1, \pi_3$ son paralelos

π_2 corta a los otros dos

30. a) Rango (M) = 2

Rango (M') = 2

Infinitas soluciones dependientes de un parámetro $\to$ una recta.

No hay proporcionalidad entre filas de M', por lo tanto, los tres planos se cortan en una recta y no hay dos coincidentes.

b) Rango (M) = 2

Rango (M') = 2

$\frac{2}{1} = \frac{2}{1} = \frac{-2}{-1} = \frac{6}{3} \to \pi_1, \pi_2$ son coincidentes $\to \pi_3$ corta a los otros dos en una recta.

c) Rango (M) = 1

Rango (M') = 1

Los tres planos son coincidentes.

Página 125

31. a) Rango (M) = 3

Rango (M') = 4

Se cruzan

b) Rango (M) = 3

Rango (M') = 4

Se cruzan

32. a) $\frac{-1}{-2} = \frac{2}{4} = \frac{-2}{-4} = -2$

$(1, 0, -2) \notin s$

Paralelas

b) Los vectores no son proporcionales.

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

$$\begin{vmatrix} -3+1 & 3 & 1 \\ -1-2 & 1 & 2 \\ 1-0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -10$$

Se cruzan

Página 127

33. $(2-\lambda)+(-1+\lambda)-2(4+2\lambda)-5=0;$

$\lambda = -12/4 = -3 \rightarrow$ Secantes

Punto de corte:

$(5, -4, -2)$

34. $2(1+3\lambda)+(-8\lambda)-(-2-\lambda)-4=0;$

$\lambda = 0/(-1) = 0 \rightarrow$ Secantes

Punto de corte:

$(1, 0, -2)$

35. Rango (M) = 2

Rango (M') = 3

Paralelos

36. Rango (M) = 3

Rango (M') = 3

Secantes

Punto de corte:

$(3/2, -2, -1/2)$

Página 129

37. $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-8}{4}$

38. $(x-1)-2(y+3)+3z=0;$

$x-2y+3z-7=0$

39. a) r: $\begin{cases} -2x-y+2=0 \\ -2x-z+1=0 \end{cases};$

$\alpha(-2x-y+2)+\beta(-2x-z+1)=0$

b) $\alpha(-2-1+2)+\beta(-2+2+1)=0$

$-\alpha+\beta=0 \rightarrow \alpha=\beta$

Por lo tanto:

$\alpha(-2x-y+2)+\alpha(-2x-z+1)=0;$

$(-2x-y+2)+(-2x-z+1)=0;$

$-4x-y-z+3=0$

Página 134

1. En forma paramétrica → dando valores al parámetro λ

   Como intersección de dos planos → dando un valor a una de las variables y resolviendo el sistema de dos incógnitas que resulta.

2. La coordenada *y* de todos los puntos de la recta es 1.

3. Calculando el rango de las matrices determinadas por los coeficientes de los cuatro planos, M y M'.

   Rango (M) = Rango (M') = 2 → El sistema formado por los cuatro planos es compatible indeterminado → las rectas son coincidentes.

   Rango (M) = 2, Rango (M') = 3 → Sistema incompatible → como Rango (M) = 2, las rectas pertenecen al mismo plano y, por lo tanto, son paralelas.

   Rango (M) = Rango (M') = 3 → Sistema compatible determinado → las rectas son secantes.

   Rango (M) = 3, Rango (M') = 4 → Sistema incompatible → Como Rango (M) = 3, las rectas pertenecen a planos diferentes y, por lo tanto, se cruzan.

4. 0

5. Si no lo está ya, se escribe el plano en su forma general $Ax + By + Cz + D = 0$.

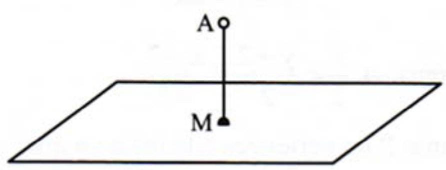
   El vector (A, B, C) es perpendicular al plano.

6. Que pasa por el origen de coordenadas ya que se verifica:

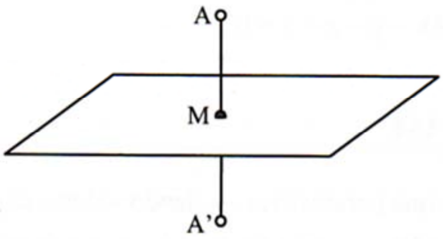
   $A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + 0 = 0$

7. Se busca el punto del plano M que determine un segmento perpendicular al plano con el punto dado A.

   El punto M es la intersección del plano con la recta que tiene como vector director el vector normal del mismo plano y pasa por A.



El punto M es el punto medio del segmento determinado por A y el punto A' que buscamos:



Se debe cumplir:

$$\left(\frac{a_1+a_1'}{2},\frac{a_2+a_2'}{2},\frac{a_3+a_3'}{2}\right)=(m_1,m_2,m_3)$$

Por lo tanto:

$$(a_1',a_2',a_3')=(2m_1-a_1,m_2-a_2,m_3-a_3)$$

8. Para hallar las ecuaciones paramétricas de una recta dada como intersección de dos planos, se calculan las soluciones del sistema formado por los dos planos, que será compatible indeterminado.

Se calculan dos puntos concretos y, por lo tanto, ya tendremos el vector director de la recta.

Para calcular la ecuación del plano que pasa por un punto dado y contiene una recta conocida, se calculan dos puntos de dicha recta.

Estos puntos determinan dos vectores con el punto dado que serán los vectores directores del plano.

9. a) $(x, y, z) = (-2, 5, -1) + \lambda\,(-2, -1, 1)$

b) $\begin{cases} x=-2-2\lambda \\ y=5-\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}$

c) $\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-5}{-1}=z+1$

10. $\overrightarrow{AB}=(2, 2, -2)$

Vectorial $\rightarrow (x, y, z) = (0, 2, 3) + \lambda\,(2, 2, -2)$

Paramétricas $\rightarrow \begin{cases} x=2\lambda \\ y=2+2\lambda \\ z=3-2\lambda \end{cases}$

Continua $\rightarrow \dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$

El punto P no pertenece a la recta ya que:

$$\frac{-2}{2}=-1$$

$$\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{-1-3}{-2}=2$$

Por lo tanto, la ecuación continua no se cumple.

11. Los puntos (3, –1, 0) y (8, 1, –3) pertenecen a la segunda recta. Veamos si pertenecen a la primera:

$\begin{cases} 3+1+0-4=0 \\ 9+0-9=0 \end{cases} \rightarrow (3, -1, 0)$ pertenece a la recta

$\begin{cases} 8-1-3-4=0 \\ 24-15-9=0 \end{cases} \rightarrow (8, 1, -3)$ pertenece a la recta

Actividad personal. Para hallar nuevos puntos a partir de la expresión como intersección de dos planos se pueden dar valores a alguna de las variables y solucionar el sistema resultante.

12. Los vectores normales de los planos que intervienen en la ecuación de la recta son perpendiculares a ella, por lo tanto:

Vector director de $r \rightarrow (3, 1, -2) \times (1, -1, 1) = (-1, -5, -4)$

Vector director de $s \rightarrow (2, -2, -5) \times (3, 4, -6) = (32, -3, 14)$

Para comprobar si son perpendiculares calculamos su producto escalar.

$(-1, -5, -4) \cdot (32, -3, 14) = -73$

Como no es nulo, los vectores no son perpendiculares.

13. Vector director de $r \rightarrow (1, -1, 0) \times (1, 1, -1) = (1, 1, 2)$

Vector director de $s \rightarrow (1, 0, -1) \times (2, -1, 0) = (-1, -2, -1)$

El vector director de la recta que buscamos es:

$(1, 1, 2) \times (-1, -2, -1) = (3, -1, -1)$

Por lo tanto:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{-1}$$

14. $\dfrac{5-0}{3-0}=\dfrac{5}{3}$

$$\frac{2-1}{-2-1}=-\frac{1}{3}$$

No están alineados.

15. Se debería cumplir:

$$\frac{0}{2-\lambda}=\frac{-2}{-\lambda-2}=\frac{2}{-\lambda};$$

$$\frac{-2}{-\lambda-2}=\frac{2}{-\lambda}\rightarrow \lambda=-1$$

Los puntos resultantes son:

A(−1, 2, −1)

B(2, 1, 0)

C(−1, 0, 1)

16. Vectorial → (x, y, z) = (−1, 0, 1) + λ (−1, 2, 1) + μ (−2, 3, 0)

$$\text{Paramétricas} \rightarrow \begin{cases} x=-1-\lambda-2\mu \\ y=0+2\lambda+3\mu \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

17. $\overrightarrow{AB}=(0,-2,1)$

$\overrightarrow{AC}=(-6,-4,4)$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 0 & -6 \\ y-5 & -2 & -4 \\ z-2 & 1 & 4 \end{vmatrix}=0;$$

−4x − 6y − 12z + 62 = 0;

−2x − 3y − 6z + 31 = 0

18. El vector normal del plano que buscamos es perpendicular a los vectores directores de *r* y *s*.

Vector director de *s* → (1, −3, 0) × (1, 0, −3) = (9, 3, 3)

Por lo tanto, el vector normal del plano es:

(9, 3, 3) × (1, −1, 2) = (9, −15, −12)

El plano es:

9x − 15 (y − 1) − 12 (z − 2) = 0;

9x − 15y − 12z + 39 = 0

19. Los puntos A(1, 0, 1) y B(−3, −1, 0) pertenecen a *r*.

$\overrightarrow{AP}=(1,-1,1)$

$\overrightarrow{BP}=(5,0,2)$

El plano que buscamos es:

(x, y, z) = (2, −1, 2) + λ (1, −1, 1) + μ (5, 0, 2);

−2x + 3y + 5z − 3 = 0

20. x − 5 (y + 1) + 2 (z − 1) = 0;

x − 5y + 2z − 7 = 0

21. $\overrightarrow{AB}=(3,-3,0)$

Un vector normal al plano que buscamos es:

(3, −3, 0) × (1, −2, 4) = (−12, −12, −3)

El plano es:

−12(x − 1) −12 (y − 1) − 3 (z + 1) = 0;

−12x − 12y − 3z + 21 = 0

22. $-\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=0$

Página 135

23. a) $\begin{vmatrix} 1-1 & 4-1 & 2-1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3+1 & -2+1 & -1+1 \end{vmatrix}=34$

No son coplanarios.

b) $\overrightarrow{AB}=(1,3,0)$

$\overrightarrow{AC}=(3,1,-1)$

El plano es:

(x, y, z) = (1, 0, −1) + λ (1, 3, 0)+ μ (3, 1, −1);

−3x + y − 8z − 5 = 0

24. det (M) = $-2k^3+4k^2+2k-4$

det (M) = 0 → k = −1, k = 1, k = 2

Si k ≠ −1, 1, 2 → El sistema formado por las ecuaciones de los planos es compatible determinado → se cortan en un punto.

$$\text{Si } k=-1 \rightarrow \begin{cases} \pi_1: -x-2y+z-1=0 \\ \pi_2: x+2y-z-3=0 \\ \pi_3: x-4y-z+1=0 \end{cases}$$

Rango (M) = 2, Rango (M') = 3

Las filas 1 y 2 de M son proporcionales, por lo tanto, π_1 y π_2 son paralelos y π_2 los corta.

$$\text{Si } k=1 \rightarrow \begin{cases} \pi_1: x-2y+z-1=0 \\ \pi_2: x-2y+z-3=0 \\ \pi_3: x-4y+z-1=0 \end{cases}$$

Rango (M) = 2, Rango (M') = 3

Los planos π_1 y π_2 son paralelos y π_3 los corta.

6

Si $k = 2 \rightarrow \begin{cases} \pi_1 : 2x - 2y + z - 1 = 0 \\ \pi_2 : x - 4y + 2z - 3 = 0 \\ \pi_3 : x - 4y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$

Rango (M) = 2, Rango (M') = 3

Los planos π_2 y π_3 son paralelos y π_1 los corta.

25. a) $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{1}{-1} \rightarrow$ Son secantes.

b) Vector director $\rightarrow$ (2, 3, 1) × (1, 1, –1) = (–4, 3, –1)

Recta $\rightarrow \frac{x-5}{-4} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{-1}$

26. En ambos casos el vector director es (1, 1, 1), por lo tanto, son paralelas.

27. det (M') = 4k

$4k = 0 \rightarrow k = 0$

Si $k \neq 0 \rightarrow$ Rango (M') = 4 $\rightarrow$ El sistema formado por las expresiones de las dos rectas es incompatible.

$$\begin{vmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2k = 0 \rightarrow k = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k - 1 = 0 \rightarrow k = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -k & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k + 1 = 0 \rightarrow k = -1$$

$$\begin{vmatrix} 0 & k & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -k + 1 = 0 \rightarrow k = 1$$

Por lo tanto, no hay ningún valor de *k* que anule todos los determinantes $\rightarrow$ Rango (M) = 3 $\rightarrow$ Si $k \neq 0$, las rectas se cruzan.

Si k = 0 $\rightarrow$ Rango (M) = Rango (M') = 3 $\rightarrow$ Las rectas son secantes.

28. det (M') = 5 – 5m = 0 $\rightarrow$ m = 1

a) Si m = 1 $\rightarrow$ Rango (M') = Rango (M) = 3 $\rightarrow$ Secantes

b) El punto de corte es P(1, 1, 1)

Vector director de *r*:

(2, –1, 0) × (0, 2, 1) = (–1, –2, 4)

Vector director de *s*:

(1, 1, 0) × (1, 0, 2) = (2, –2, –1)

El plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 2 \\ y-1 & -2 & -2 \\ z-1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0;$$

10x + 7y + 6z – 23 = 0

29. s: $\begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0 \\ 5x - 2z + 3 = 0 \end{cases}$

Por lo tanto:

det (M') = –20 + 8m = 0 $\rightarrow$ m = 109 / 4

Si m = 109 / 4 $\rightarrow$ Rango (M') = Rango (M) = 3 $\rightarrow$ Secantes

Si m ≠ 109 / 4 $\rightarrow$ Rango (M') = 4, Rango (M) = 3 $\rightarrow$ Se cruzan

30. $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0)$

$\overrightarrow{AC} = (0, 0, 3)$

Vector director de la recta:

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (6, 0, 0)$

La recta es:

$\frac{x-1}{6} = \frac{y-5}{0} = \frac{z-1}{0}$

31. a) Las rectas están contenidas en un plano si sc coincidentes, secantes o paralelas.

det(M') = 3k – 3 = 0 $\rightarrow$ k = 1

Si k = 1 $\rightarrow$ Rango (M') = Rango (M) = 3 $\rightarrow$ Secantes

Si k ≠ 1 $\rightarrow$ Rango (M') = 4, Rango (M) = 3 $\rightarrow$ Se cruzan

Si k = 1, las rectas se cortan en el punto P(3, 3, 2).

Buscamos ahora un punto cualquiera de *r* y otro de *s*.

Si x = 0, en la ecuación de *r*, y = 2, z = 1 $\rightarrow$ A(0, 2, 1) pertenece a *r*.

Si y = 0, en la ecuación de *s*, x = –3, z = –4 $\rightarrow$ B(–3, 0, –4) pertenece a *s*.

$\overrightarrow{AP} = (3, 1, 1)$

$\overrightarrow{BP} = (6, 3, 6)$

Un vector normal al plano que buscamos es:

$\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{BP} = (3, -12, 3)$

Por lo tanto, el plano es:

$3(x-3) - 12(y-3) + 3(z-2) = 0;$

$3x - 12y + 3z + 21 = 0;$

$x - 4y + z + 7 = 0$

b) Como hemos visto en el apartado anterior, las rectas se cruzan si $k \neq 1$ mientras que no son paralelas en ningún caso.

32. $(x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda\,(0, 0, 1)$

33. Vector director de r:

$(3, a, -6a) \times (-1, 1, 3) = (9a, -9 + 6a, 3 + a)$

r y s son perpendiculares cuando:

$(9a, -9 + 6a, 3 + a) \cdot (-1, 1, a) = -9 + a^2 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow a = \pm 3$

34. a) Si $x = 0 \rightarrow y = -1, z = 3 \rightarrow$ El punto $A(0, -1, 3)$ pertenece a la recta.

Si $y = 1 \rightarrow x = -2, z = -1 \rightarrow$ El punto $B(-2, 1, -1)$ pertenece a la recta.

Por lo tanto:

$\overrightarrow{AB} = (-2, 2, -4)$

$$r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 - 4\lambda \end{cases}$$

b) Los puntos de r son de la forma :

$(-2\lambda, -1 + 2\lambda, 3 - 4\lambda)$

Los puntos del eje OZ son de la forma:

$(0, 0, \mu)$

Un vector determinado por un punto de cada recta es de la forma:

$(-2\lambda, -1 + 2\lambda, 3 - 4\lambda - \mu)$

Imponemos que este vector sea perpendicular al vector director de OZ, $(0, 0, 1)$:

$(-2\lambda, -1 + 2\lambda, 3 - 4\lambda - \mu) \cdot (0, 0, 1) = 0;$

$3 - 4\lambda - \mu = 0;$

$\mu = 3 - 4\lambda;$

Por lo tanto, dado un punto $P(-2\lambda, -1 + 2\lambda, 3 - 4\lambda)$ de r, la recta:

$(x, y, z) = (-2\lambda, -1 + 2\lambda, 3 - 4\lambda) + \theta\,(-2\lambda, -1 + 2\lambda, 0)$ es perpendicular a OZ y pasa por P.

Dando valores a λ podemos hallar la ecuación en cada caso concreto.

35. a) $$\begin{cases} 2(x+1) = -2y + 4 \\ -4(x+1) = -2z \\ x - 2 = 3(y+1) \\ x - 2 = 3(z+2) \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x + 2y - 2 = 0 \\ -4x + 2z - 4 = 0 \\ x - 3y - 5 = 0 \\ x - 3z - 8 = 0 \end{cases}$$

Rango (M') = 4, Rango (M) = 3

Efectivamente, las rectas se cruzan.

b) $$r: \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = -4\lambda \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = -1 + \mu \\ z = -2 + \mu \end{cases}$$

Si P es un punto de r y Q es un de s, la recta determinada por P y Q cumple las condiciones del enunciado si:

$\overrightarrow{OP} = (-1 - 2\lambda, 2 + 2\lambda, -4\lambda)$

$\overrightarrow{OQ} = (2 + 3\mu, -1 + \mu, -2 + \mu)$

son proporcionales:

$$\frac{-1 - 2\lambda}{2 + 3\mu} = \frac{2 + 2\lambda}{-1 + \mu} = \frac{-4\lambda}{-2 + \mu}$$

$\lambda = -17 / 38$

$\mu = -8 / 13$

En este caso:

$P(-2/19, 21/19, 34/19)$

$Q(2/13, -21/13, -34/13)$

La recta es:

$$\frac{x + 2/19}{2/13} = \frac{y - 21/19}{-21/13} = \frac{z - 34/19}{-34/13}$$

c) En esta ocasión buscamos un vector (a, b, c) tal que:

$(a, b, c)\,(-2, 2, -4) = 0 \rightarrow -2a + 2b - 4c = 0$

$(a, b, c)\,(3, 1, 1) = 0 \rightarrow 3a + b + c = 0$

Por lo tanto:

$x = -3\lambda / 4$

$y = 5\lambda / 4$

$z = \lambda$

El vector director de la recta que buscamos es:

6

$(-3/4, 5/4, 1) \rightarrow (-3, 5, 4)$

Si P es un punto de *r* y Q es un punto de *s*, el vector $\overrightarrow{PQ} = (3 + 3\mu + 2\lambda, -3 + \mu - 2\lambda, -2 + \mu + 4\lambda)$ debe ser paralelo a $(-3, 5, 4)$:

$$\frac{3+3\mu+2\lambda}{-3} = \frac{-3+\mu-2\lambda}{5} = \frac{\mu+4\lambda-2}{4}$$

$\lambda = -3/50, \mu = -8/25$

En este caso:

$P(-22/25, 47/25, 6/25)$

$Q(26/25, -33/25, -58/25)$

La recta es:

$$\frac{x+22/25}{-3} = \frac{y-47/25}{5} = \frac{z-6/25}{4}$$

36. a) det (M) $= 2 - m = 0 \rightarrow m = 2$

Si $m \neq 2 \rightarrow$ Rango (M) = Rango (M') = 3 $\rightarrow$ Secantes

Si $m = 2 \rightarrow$ Rango (M) = Rango (M') = 2 $\rightarrow$ La recta está contenida en el plano

b) Si $m = 1 \rightarrow$ el punto de corte es $(1, 0, -1)$

El plano que buscamos es:

$(x - 1) + y + (z + 1) = 0;$

$x + y + z = 0$

37. Vector director de *s*:

$(1, -3, 0) \times (1, 0, -3) = (9, 3, 3)$

Vector normal al plano que buscamos:

$(9, 3, 3) \times (1, -1, 2) = (9, -15, -12)$

El plano es:

$9x - 15(y - 1) - 12(z - 2) = 0;$

$9x - 15y - 12z + 39 = 0$

Página 136

38. Vector director de la recta:

$(1, 1, 1) \times (1, -1, 2) = (3, -1, -2)$

El plano es:

$3(x - 5) - y - 2(z - 10) = 0;$

$3x - y - 2z + 5 = 0$

39. a) det (M) $= -6 + 3k = 0 \rightarrow k = 2$

Si $k = 2 \rightarrow$ Rango (M) = 2, Rango (M') = 3

Por lo tanto, recta y plano son paralelos.

b) Si $k = 2 \rightarrow \pi: 2x - y + z + 1 = 0$

Vector director de *r*:

$(1, -1, 2) \times (2, 1, -5) = (3, 9, 3)$

Vector normal del plano que buscamos:

$(3, 9, 3) \times (2, -1, 1) = (12, 3, -21)$

Nos falta un punto de *r*.

$$x = 0 \rightarrow \begin{cases} -y + 2z - 1 = 0 \\ y - 5z - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow y = -3, z = -1$$

El punto $(0, -3, -1)$ pertenece a *r*.

El plano que buscamos es:

$12x + 3(y + 3) - 21(z + 1) = 0;$

$12x + 3y - 21z - 12 = 0$

40. det (M) $= -52 + 2k = 0 \rightarrow k = 26$

Si $k = 26 \rightarrow$ Rango (M) = 2, Rango (M') = 3 $\rightarrow$ La recta es paralela al plano.

41. $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$

Para que el plano y la recta sean perpendiculares, se debe cumplir:

$$\frac{2m}{1} = \frac{6(m-1)}{2} = \frac{m+3}{1}$$

$m = 3$

42. Vector director de *s*:

$(2, -1, 1) \times (-1, 1, 3) = (-4, -7, 1)$

Vector normal del plano que buscamos:

$(-4, -7, 1) \times (-1, 1, 2) = (-15, 7, -11)$

El plano es:

$-15(x - 1) + 7(y - 1) - 11(z - 2) = 0;$

$-15x + 7y - 11z + 30 = 0$

43. Vector director de la recta:

$(1, 1, 0) \times (1, 0, 1) = (1, -1, -1)$

La recta es:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{-1}$$

44. $$r: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Rango (M) = Rango (M') = 3 $\rightarrow$ Secantes

Punto de corte:

$(1/2, 3/2, 3/2)$

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

45. a) *r*: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$

b) Q(−2, 0, 4)

46. a) Actividad personal, por ejemplo:

Si x = 0:

$\begin{cases} y+z=2 \\ 3y+z=3 \end{cases} \rightarrow y = 1/2, z = 3/2$

El punto Q(0, 1 / 2, 3 / 2) es de la recta.

Vector director:

$(1, 1, 1) \times (2, 3, 1) = (-2, 1, 1)$

b) $\overrightarrow{PQ} = (-2, -1/2, -3/2)$

Vector normal al plano:

$(-2, -1/2, -3/2) \times (-2, 1, 1) = (1, 5, -3)$

El plano es:

$x - 2 + 5(y - 1) - 3(z - 3) = 0;$

$x + 5y - 3z + 2 = 0$

47. Vector normal al plano:

$(2, 1, 1) \times (1, -1, 1) = (2, -1, -3)$

El plano es:

$2(x - 1) - y - 2 - 3(z + 1) = 0;$

$2x - y - 3z - 3 = 0$

48. $\overrightarrow{AB} = (-4, 1, 3)$

Recta: $\frac{x-2}{-4}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} x+4y-2=0 \\ 3x+4z-2=0 \end{cases}$

Si consideramos el sistema formado por las ecuaciones del plano y de la recta.

det (M) = −4k = 0 → k = 0

Por lo tanto, si k ≠ 0, el sistema es compatible determinado → secantes.

Si k = 0 → Rango (M) = 2, Rango (M') = 3 → paralelos

49. a) Vector director de la recta:

$(1, -1, 0) \times (0, 0, 1) = (-1, -1, 0)$

Por lo tanto, el plano es:

$-(x - 1) - (y + 2) = 0;$

$-x - y - 1 = 0$

b) Q (−1, 0, 3)

50. a) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{1}$

b) (5 / 6, 7 / 3, −7 / 6)

51. $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y-1 & -1 & 3 \\ z+1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0;$

$-6x + 9y + 7z - 2 = 0$

52. Dos puntos de *r* son:

$\lambda = 0 \rightarrow A(0, 3, 2)$

$\lambda = 1 \rightarrow B(2, 4, 1)$

$\overrightarrow{AP} = (2, -4, 0)$

$\overrightarrow{BP} = (0, -5, 1)$

El plano es:

$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & 0 \\ y+1 & -4 & -5 \\ z-2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;$

$-4x - 2y - 10z + 26 = 0$

53. *r*: $\begin{cases} x-y-1=0 \\ 3x+mz-11=0 \end{cases}$

Consideramos el sistema formado por alas ecuaciones de la recta y el plano:

det (M) = 3 − 3m = 0 → m = 1

Si m = 1 → Rango (M) = 2, Rango (M') = 3 → Paralelos

54. *r*: $\begin{cases} x=4+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=3 \end{cases}$ es la recta perpendicular al plano x = y que pasa por P.

Calculamos la intersección entre *r* y el plano:

$4 + \lambda = -\lambda \rightarrow \lambda = -2 \rightarrow M(2, 2, 3)$

M es el punto medio del segmento determinado por P y el punto P'(x, y, z) que buscamos:

$\left(\frac{4+x}{2}, \frac{0+y}{2}, \frac{3+z}{2}\right) = (2,2,3) \rightarrow x = 0, y = 4, z = 3$

Por lo tanto, P'(0, 4, 3).

55. El proceso es análogo al de la actividad anterior:

$$r: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$$

$1 + \lambda + 1 + \lambda + 1 + \lambda = 0 \to 3 + 3\lambda = 0 \to \lambda = -1 \to$
$\to M(0, 0, 0)$

Si P'(x, y, z):

$$\left(\frac{1+x}{2}, \frac{1+y}{2}, \frac{1+z}{2}\right) = (0,0,0) \to x = -1,\ y = -1,\ z = -1$$

Por lo tanto, P'(−1, −1, −1).

56. En este caso:

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 2-2\lambda \end{cases}$$

Calculamos M:

$\lambda - 2\,(2 - 2\lambda) + 1 = 0 \to \lambda = 3/5 \to M(1, 3/5, 4/5)$

Si P'(x, y, z), se debe cumplir:

$$\left(\frac{1+x}{2}, \frac{0+y}{2}, \frac{2+z}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \to x = 1,\ y = 6/5,\ z = -2/5$$

P'(1, 6 / 5, −2 / 5)

57. $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2+3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

Calculamos M:

$\lambda + 3\,(-2 + 3\lambda) + \lambda = 5 \to \lambda = 1 \to M(1, 1, 1)$

$P'(x, y, z) \to$

$$\to \left(\frac{0+x}{2}, \frac{-2+y}{2}, \frac{0+z}{2}\right) = (1,1,1) \to x = 2,\ y = 4,\ z = 2$$

P'(2, 4, 2)

La recta que buscamos es:

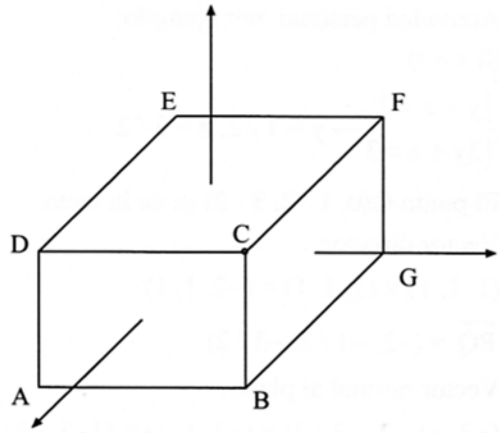
$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{0} \to$$

$$\to \begin{cases} -x+2 = y-4 \\ z-2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x+y-6 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Página 137

58. a) Hay otro vértice, el H, que queda en la parte posterior de la figura:



b) B(2, 2, −2)
C(2, 2, 2)
D(2, −2, 2)
E(−2, −2, 2)
F(−2, 2, 2)
G(−2, 2, −2)
H(−2, −2, −2)

c) AB: {x = 2, z = −2}
BC: {x = 2, y = 2}
CD: {x = 2, z = 2}
AD: {x = 2, y = −2}
AH: {y = −2, z = −2}
BG: {y = 2, z = −2}
CF: {y = 2, z = 2}
DE: {y = −2, z = 2}
EF: {x = −2, z = 2}
FG: {x = −2, y = 2}
GH: {x = −2, z = −2}
EH: {x = −2, y = −2}

d) ABCD: x = 2
BCFG: y = 2
CDEF: z = 2
ADEH: y = −2
ABGH: z = −2
EFGH: x = −2

59. π: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1$

Recta *r* por O perpendicular al plano:

$$r: \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Punto de corte entre *r* y π:

$$\frac{6\lambda}{2}+\frac{3\lambda}{4}+\frac{2\lambda}{6}=1 \rightarrow \lambda = 12/49$$

M(72 / 49, 36 / 49, 24 / 49)

El punto O' (x, y, z) que buscamos verifica:

$$\left(\frac{0+x}{2},\frac{0+y}{2},\frac{0+z}{2}\right)=\left(\frac{72}{49},\frac{36}{49},\frac{24}{49}\right)$$

Por lo tanto:

$$O'\left(\frac{144}{49},\frac{72}{49},\frac{48}{49}\right)$$

60. Actividad personal.

El vector normal del plano es perpendicular al vector director de las dos rectas, por lo tanto, lo encontramos calculando el producto vectorial entre los dos vectores. Finalmente, se impone la condición de que el plano pase por P.

61. a) Vector director de *r*:

$(1, 1, 0) \times (0, 0, 1) = (1, -1, 0)$

El plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y+2 & -1 & -2 \\ z+3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3x + 3y - z = 0$$

b) Si (a, b, c) es el vector director de la recta que buscamos:

$(a, b, c) \cdot (1, -2, -3) = a - 2b - 3c = 0$

La recta es:

$(x, y, z) = (1, -2, -3) + \lambda\,(2b + 3c, b, c) =$

$= (1 + 2\lambda b + 3\lambda c, -2 + \lambda b, -3 + \lambda c)$

La recta corta a *r*, por lo tanto:

$-3 + \lambda c = 0 \rightarrow \lambda = 3 / c$

Por otra parte:

$(1 + 2\lambda b + 3\lambda c) + (-2 + \lambda b) + 1 = 0;$

$(1 + 6b / c + 9) + (-2 + 3b / c) + 1 = 0;$

$b = -c$

Por lo tanto:

$(a, b, c) = (2b - 3b, b, -b) = (-b, b, -b)$

La ecuación de la recta que buscamos es:

$(x, y, z) = (1, -2, -3) + \lambda\,(-b, b, -b)$

O lo que es lo mismo:

$(x, y, z) = (1, -2, -3) + \lambda\,(-1, 1, -1)$

62. $\overrightarrow{AB} = (-1, -\lambda, 0)$

$\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 4)$

$\overrightarrow{AO} = (-1, 0, 0)$

El volumen del paralelepípedo determinado por $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ es:

$|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = 4\lambda > 0$ porque $\lambda > 0$

El volumen del tetraedro determinado por estos mismos vectores es la sexta parte del volumen del paralelepípedo, por lo tanto, se debe cumplir:

$$\frac{4\lambda}{6}=2 \rightarrow \lambda = 3$$

63. $r: \begin{cases} 2x + z. - 4 = 0 \\ 2y + z - 8 = 0 \end{cases}$

Los planos del haz son de la forma:

$(2x + z - 4) + \varphi\,(2y + z - 8) = 0$

Buscamos el plano del haz que corta a los ejes en los puntos:

(k, 0, 0), (0, k, 0), (0, 0, k)

Se cumple, por lo tanto:

$$\begin{cases} 2k - 4 - 8\varphi = 0 \\ -4 + \varphi(2k - 8) = 0 \\ k - 4 + \varphi(k - 8) = 0 \end{cases};$$

Dos soluciones.

$k = 0, \varphi = -1/2 \rightarrow$ No nos sirve

$k = 6, \varphi = 1$

El plano es:

$(2x + z - 4) + (2y + z - 8) = 0;$

$2x + 2y + z - 12 = 0$

Calculamos ahora el área del triángulo:

Sus lados miden $\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$

Su altura mide: $\sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2-\left(\dfrac{6\sqrt{2}}{2}\right)^2}=3\sqrt{6}$

Por lo tanto:

$$A=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{6\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{6}}{2}=9\sqrt{12}=18\sqrt{3}$$

Autoevaluación

6

1. **a)** r pasa por P(1, –1, 2)

$\overrightarrow{OP}=(1,-1,2)$

El plano es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y & -1 & 3 \\ z & 2 & 1 \end{vmatrix}=-7x+3y+5z=0$$

b) $2x+3y+z=0$

2. Las primeras coordenadas son iguales, por lo tanto, no las tenemos en cuenta:

$$\frac{\lambda-1-\lambda}{1-\lambda}=\frac{1-0}{2-0};$$

$\lambda=3$

3. **a)** El plano es paralelo a los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$

$\overrightarrow{CD}=(0,-1,0)$

Como pasa por A:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-1 & 1 & -1 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=x-z=0$$

b) Punto medio de AB:

$M_1(3/2, 3/2, 3/2)$

Punto medio de CD:

$M_2(1, 1/2, 0)$

Estos Puntos determinan el vector:

$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1/2,-1,-3/2)$

La recta es:

$$\frac{x-3/2}{-1/2}=\frac{y-3/2}{-1}=\frac{z-3/2}{-3/2}$$

4. π': $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-1 & 1 & 1 \\ z-1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0;$

π': $-4x+7y-z-2=0$

Existe un plano paralelo que contiene a r porque el vector director de r y el vector normal a π son ortogonales.

El plano es:

$2(x-1)+(y-1)-(z-1)=0;$

$2x+y-z-2=0$

5. $\begin{vmatrix} 0-1 & 1-1 & 1-1 \\ 2-1 & \lambda-1 & 0-1 \\ 0-\lambda & 0-\lambda & 0-\lambda \end{vmatrix}=0;$

$\lambda^2=0\ \rightarrow \lambda=0$

6. Vector director de r:

$(1,-2,1)\times(3,1,-1)=(1,4,7)$

La ecuación del plano es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y-2 & 4 & 0 \\ z & 7 & 1 \end{vmatrix}=0;$$

$4x-8y+4z+12=0;$

$x-2y+z+3=0;$

7. Recta r por P perpendicular a π:

$(x, y, z)=(1,2,-2)+\lambda\,(3,2,1)=(1+3\lambda, 2+2\lambda, -2+\lambda)$

Punto de corte M entre r y π:

$3\,(1+3\lambda)+2\,(2+2\lambda)+(-2+\lambda)-7=0;$

$\lambda=1/7$

Por lo tanto, M(10 / 7, 16 / 7, –13 / 7)

El punto P'(a, b, c) que buscamos verifica:

$$\left(\frac{1+a}{2},\frac{2+b}{2},\frac{-2+c}{2}\right)=\left(\frac{10}{7},\frac{16}{7},-\frac{13}{7}\right)$$

P'(13 / 7, 18 / 7, –12 / 7)

8. **a)** Vector director de r:

$(1,0,-1)\times(0,2,1)=(2,-1,2)$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y-2 & -1 & -1 \\ z-3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$-x + z - 2 = 0$

b) Rango (M') = Rango (M) = 3 → Son secantes

9. Rango (M') = 4

Rango (M') = 3

Se cruzan

Vector director de *r*:

$(1, 1, -1) \times (1, 2, -1) = (1, 0, 1)$

Vector director de *s*:

$(1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$

Por lo tanto, $\overrightarrow{AB}$ debe ser paralelo a $(1, 0, 1) \times (0, 0, 1) = (0, -1, 0)$

Los puntos de *r* son de la forma:

$(8 + \lambda, -4, \lambda)$

Los puntos de *s* son de la forma:

$(2, -5, \mu)$

Por lo tanto, el vector $\overrightarrow{AB}$ será de la forma:

$(-6 - \lambda, -1, \mu - \lambda)$

Se debe cumplir:

$-6 - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = -6$

$\mu - \lambda = 0 \rightarrow \mu = -6$

Por lo tanto:

$A(2, -4, -6)$

$B(2, -5, -6)$

10. $\frac{1}{1} = 1$

$\frac{-1}{1} = -1$

$\frac{1}{-1} = -1$

Por lo tanto, son secantes.