SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 139 a 161

Página 139

1. a) $\vec{u} = (3, 0, -4)$

$\vec{v} = (1, -1, 2)$

$$\cos\left(\widehat{r,s}\right) = \frac{|-5|}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{6}} = \frac{5}{5\cdot\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$\widehat{r,s} = 65° \ 54' \ 36''$

b) $\vec{u} = (-2, -1, 2)$

$\vec{v} = (1, 0, -1) \times (0, 1, 1) = (1, -1, 1)$

$$\cos\left(\widehat{r,s}\right) = \frac{|1|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

$\widehat{r,s} = 78° \ 54'$

c) $\vec{u} = (1, 1, 1)$

$\vec{v} = (1, 1, -1) \times (1, -2, 1) = (-1, -2, -3)$

$$\cos\left(\widehat{r,s}\right) = \frac{|-6|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{42}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

$\widehat{r,s} = 22° \ 12' \ 36''$

Página 140

Piensa y contesta

- Si se considera el plano que pasa por P y es perpendicular a *r*, todas las rectas del plano que pasan por P son perpendiculares a *r*.

2. Vector director de *s*:

$(1, -1, -1) \times (1, 1, 2) = (-1, -3, 2)$

Por ejemplo:

$r\text{: } \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+2}{0}$

3. Si P es un punto cualquiera de *s*:

$\overrightarrow{AP} = (-\lambda - 2, \lambda, 2\lambda - 3)$

Imponemos $\overrightarrow{AP} \perp (-1, 1, 2)$:

$\lambda + 2 + \lambda + 4\lambda - 6 = 0;$

$\lambda = 2/3$

La recta es:

$(x, y, z) = A + \lambda\,\overrightarrow{AP} = (2, 0, 3) + \mu\,(-8/3, 2/3, -5/3) = (2, 0, 3) + \mu\,(-8, 2, -5)$

El punto de corte entre las rectas es el que verifica:

$$\begin{cases} -\lambda = 2 - 8\mu \\ \lambda = 2\mu \\ 2\lambda = 3 - 5\mu \end{cases}$$

$\lambda = 2/3, \mu = 1/3$

El punto es:

$(-2/3, 2/3, 4/3)$

4. $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z+1}{1}$

Página 141

5. a) $\vec{n} = (1, -2, -1)$

$\vec{n'} = (3, 0, 4)$

$$\cos\left(\widehat{\pi,\pi'}\right) = \frac{|-1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{25}} = \frac{1}{\sqrt{6}\cdot 5} = \frac{\sqrt{6}}{30}$$

$\widehat{\pi,\pi'} = 85° \ 19' \ 12''$

b) $\vec{n} = (2, -2, -1)$

$\vec{n'} = (-1, -1, 0) \times (-1, 0, 1) = (-1, 1, -1)$

$$\cos\left(\widehat{\pi,\pi'}\right) = \frac{|-3|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\widehat{\pi,\pi'} = 54° \ 44' \ 24''$

c) $\vec{n} = (4, -3, 0)$

$\vec{n'} = (3, 0, 4)$

$$\cos\left(\widehat{\pi,\pi'}\right) = \frac{|12|}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{25}} = \frac{12}{25}$$

$\widehat{\pi,\pi'} = 61° \ 18' \ 36''$

Página 142

6. $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 3 + k - 2 = 0\,;$

$k + 1 = 0;$

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

$k = -1$

7. $(x - 2) + (y - 5) - 3(z + 1) = 0;$

$x + y - 3z - 10 = 0$

8. Actividad personal.

Hay infinitos planos que cumplen la condición, por ejemplo, el que tiene como vector normal (0, 1, –1):

$y - 2 - (z + 1) = 0;$

$y - z - 3 = 0$

Página 143

9. a) $\vec{u} = (1, -1, 2)$

$\vec{n} = (2, -1, -1)$

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{|1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$\alpha = 24°\ 5'\ 24''$

b) $\vec{u} = (1, 1, -1)$

$\vec{n} = (3, 0, -4)$

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{|7|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{25}} = \frac{7}{5\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{15}$$

$\alpha = 53°\ 55'\ 48''$

c) $\vec{u} = (1, 0, -2) \times (0, 2, 1) = (4, -1, 2)$

$\vec{n} = (2, -1, 1)$

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{|6|}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$\alpha = 32°\ 18'\ 36''$

Página 144

10. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-1}{-3}$

11. $\vec{n} = (1, -1, 0) \times (1, 4, -1) = (1, 1, 5)$

El plano es:

$(x - 2) + (y + 1) + 5z = 0;$

$x + y + 5z - 1 = 0$

12. $\vec{u} = (2, 1, -2) \times (1, 2, -2) = (2, 2, 3)$

Cualquier recta que tenga este vector director cumple las condiciones del enunciado, por ejemplo, la que pasa por O:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

Página 145

13. a) $d(A, B) = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

b) $d(P, Q) = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

14. $d(P, O) = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

15. Eje OZ: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Punto de corte entre OZ y π:

Q(0 , 0, 5)

Por lo tanto:

$d(P, Q) = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

16. $d(P, Q) = \sqrt{3^2 + (k-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13 + (k-3)^2} = 7$

$13 + (k - 3)^2 = 49;$

$k = 9,\ k = -3$

Dos soluciones:

$Q_1(5, 9, 2)$

$Q_2(5, -3, 2)$

17. $A(x, 0, 0) \rightarrow d(P, A) = 6 \rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + 2^2 + 4^2} = 6;$

$(x - 1)^2 + 20 = 36;$

$x_1 = 5 \rightarrow A_1(5, 0, 0)$

$x_2 = -3 \rightarrow A_2(-3, 0, 0)$

$B(0, y, 0) \rightarrow d(P, B) = 9 \rightarrow \sqrt{1^2 + (y+2)^2 + 4^2} = 9;$

$(y + 2)^2 + 17 = 81;$

$y_1 = 6 \rightarrow B_1(0, 6, 0)$

$y_2 = -10 \rightarrow B_2(0, -10, 0)$

$C(0, 0, z) \to d(P, C) = 3 \to \sqrt{1^2 + 2^2 + (z-4)^2} = 3;$

$(z-4)^2 + 5 = 9;$

$z_1 = 6 \to C_1(0, 0, 6)$

$z_2 = 2 \to C_2(0, 0, 2)$

Página 147

18. a) $A(3, 1, 0)$

$\vec{u} = (0, -3, 4)$

$\overrightarrow{AP} = (-2, 1, 3)$

$$d(P, r) = \frac{|(-13, -8, -6)|}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{269}}{5}$$

b) $A(1, 0, 0)$

$\vec{u} = (2, -1, -2)$

$\overrightarrow{AP} = (-1, 1, 4)$

$$d(P, r) = \frac{|(-2, -6, 1)|}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{41}}{3}$$

19. a) $A(1, 1, 2)$

$\vec{u} = (1, -2, -1)$

$\overrightarrow{AP} = (1, 3, -1)$

$$d(P, r) = \frac{|(5, 0, 5)|}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{12}}{6}$$

b) $A(0, 1, 0)$

$\vec{u} = (2, 1, -1)$

$\overrightarrow{AP} = (0, 0, 4)$

$$d(P, r) = \frac{|(4, -8, 0)|}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{30}}{3}$$

Página 149

20. $d(P, \pi) = \dfrac{|6-4|}{\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}$

21. $\vec{n} = (-1, 2, -2) \times (3, 0, -4) = (-8, -10, -6)$

El plano es:

$-8(x-1) - 10(y-3) - 6z = 0;$

$-8x - 10y - 6z + 38 = 0;$

$-4x - 5y - 3z + 19 = 0$

$$d(P, \pi) = \frac{|-15 - 12 + 19|}{\sqrt{50}} = \frac{8}{\sqrt{50}} = \frac{4\sqrt{2}}{5}$$

22. $d(P, \pi) = \dfrac{|4-6|}{\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}$

23. $d(P, \pi) = \dfrac{|2|}{\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

24. La recta pasa por el punto $Q(0, 0, 1)$.

Por lo tanto, $\overrightarrow{PQ} = (-1, 0, 2)$ es un vector paralelo plano π que buscamos.

$\vec{n} = (-1, 0, 2) \times (1, -1, 1) = (2, 3, 1)$

El plano, por lo tanto, es:

$2(x-1) + 3y + (z+1) = 0;$

$2x + 3y + z - 1 = 0$

La distancia que buscamos es, por lo tanto:

$$\frac{|-1|}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14}$$

25. π: $\dfrac{x}{2} + y + \dfrac{z}{3} = 1;$

π: $3x + 6y + 2z - 6 = 0$

$$d(O, \pi) = \frac{|-6|}{\sqrt{49}} = \frac{6}{7}$$

Página 151

26. Las rectas son paralelas, un punto de *r* es $P(0, 0, 3)$.

Si Q es un punto cualquier de *s*, es de la forma:

$Q(1 + \lambda, 2 + 2\lambda, -1 + \lambda)$

Por lo tanto:

$\overrightarrow{PQ} = (1 + \lambda, 2 + 2\lambda, -4 + \lambda)$

Imponemos $\overrightarrow{PQ} \perp (1, 2, 1)$:

$(1 + \lambda, 2 + 2\lambda, -4 + \lambda)(1, 2, 1) = 0;$

$1 + \lambda + 4 + 4\lambda - 4 + \lambda = 0;$

$\lambda = -1/6$

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 139 a 161

Por lo tanto si consideramos el punto de *s*, Q(5 / 6, 5 / 3, –7 / 6), el módulo de $\overrightarrow{PQ}$ = (5 / 6, 5 / 3, -25 / 6) es la distancia que buscamos:

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(5/6)^2 + (5/3)^2 + (-25/6)^2} = \frac{5\sqrt{30}}{6}$$

27. $\vec{u} = (1, -1, 0) \times (0, 1, 1) = (-1, -1, 1)$

$\vec{v} = (2, -1, 1)$

Punto de *r* → A(0, –1, 1)

Punto de *s* → B (0, –2, 0)

$\overrightarrow{AB} = (0, -1, -1)$

$$d(r, s) = \frac{|-6|}{|(0,3,3)|} = \frac{6}{\sqrt{18}} = \sqrt{2}$$

28. $\vec{u} = (-1, 0, 1)$

$\vec{v} = (2, 1, -1)$

A (2, 0, 0)

B (1, 2, 2)

$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 2)$

$$d(r, s) = \frac{|1|}{|(-1,1,-1)|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

29. $\vec{u} = (2, 4, -1)$

$\vec{v} = (1, 4, 0) \times (0, 1, 1) = (4, -1, 1)$

A (5, 0, 0)

B (2, 0, 0)

$\overrightarrow{AB} = (-3, 0, 0)$

$$d(r, s) = \frac{|-9|}{|(3,-6,-18)|} = \frac{9}{3\sqrt{41}} = \frac{3\sqrt{41}}{41}$$

Página 152

30. π': $\begin{vmatrix} x-3 & 1 & -2 \\ y-4 & 1 & -1 \\ z-1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

$3x - 5y + z + 10 = 0;$

Los planos no son paralelos, por lo tanto, la distancia es nula.

31. La distancia es de nuevo, nula.

Página 153

32. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 2)^2 = (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z + 4)^2;$

$8x - 12y - 4z - 8 = 0;$

$2x - 3y - z - 2 = 0$

33. $\frac{|3x + 2y|}{\sqrt{13}} = \frac{|x - z + 4|}{\sqrt{2}}$;

$$\begin{cases} \frac{3x + 2y}{\sqrt{13}} = \frac{x - z + 4}{\sqrt{2}} \\ \frac{3x + 2y}{\sqrt{13}} = -\frac{x - z + 4}{\sqrt{2}} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 5x + (2\sqrt{26} + 12)y + (3\sqrt{26} + 13)z - (52 + 12\sqrt{26}) = 0 \\ 5x + (-2\sqrt{26} + 12)y + (-3\sqrt{26} + 13)z - (52 - 12\sqrt{26}) = 0 \end{cases}$$

Página 154

34. $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 25$

35. $-2a = 4 \rightarrow a = -2$

$-2b = -2 \rightarrow b = 1$

$-2c = 2 \rightarrow c = -1$

$-30 = (-2)^2 + 1^2 + (-1)^2 - r^2;$

$r = 6, r = -6$

El centro es (–2, 1, –1) y el radio es 6.

Página 158

1. Si las rectas son paralelas, el ángulo es 0. Si se cortan, es el menor ángulo que forman. Si se cruzan es el ángulo que forman la paralela a una de ellas que corta a la otra.

   Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son los vectores directores de dos rectas *r* y *s*, el ángulo que forman es el que forman sus vectores directores:

7

$$\cos\left(\widehat{r,s}\right)=\frac{\left|\vec{u}\cdot\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|}$$

2. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son sus vectores directores, son perpendiculares si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Para que sean paralelas, los vectores deben ser proporcionales y, para que en este caso no sean coincidentes, ningún punto de una debe pertenecer a la otra –basta comprobar qué ocurre con uno de ellos–.

3. El ángulo que forman dos planos es el ángulo que forman sus vectores normales, por lo tanto, el problema se reduce al de la *Actividad 1* de esta misma página.

Si $Ax + By + Cz + D = 0$ y $A'x + B'y + C'z + D' = = 0$ son dos planos.

Son perpendiculares si:

$A \cdot A' + B \cdot B' + C \cdot C' = 0$

Son paralelos si:

$$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$$

4. El ángulo entre un plano y una recta secantes es el complementario del que forman el vector normal del plano y el vector director de la recta.

5. *Distancia entre dos puntos A, B*:

$$d(A, B)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}$$

Distancia entre un punto P y una recta r:

d(P, r) = d (P, N), donde N es el punto de *r* que pertenece al plano perpendicular a *r* que pasa por P.

$$d(P, r)=\frac{\left|\vec{u}\times\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\vec{u}\right|}$$ donde $\vec{u}$ es el vector director de *r* y A es un punto de *r*.

Distancia entre un punto P y un plano π:

$$d(P,\pi)=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{QP}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$ donde $\vec{n}$ es el vector normal de π y Q un punto de π.

También:

$$d(P,\pi)=\frac{\left|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ donde $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

6. La distancia entre dos rectas que se cruzan es la mínima distancia entre dos de sus puntos.

Método 1 → se impone que un vector formado por un punto de cada recta sea perpendicular a cada una de ellas, la distancia entre las rectas es el módulo del vector resultante.

Método 2 → $d(r, s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{\left|\vec{u}\times\vec{v}\right|}$ donde $\vec{u}$, $\vec{v}$ son los vectores directores de las rectas y A, B son puntos de cada una de ellas.

Actividad personal.

7. $$d(\pi,\pi')=\frac{\left|D-D'\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

donde:

$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$\pi': Ax + By + Cz + D' = 0$

8. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos dados A y B es el *plano medidador* del segmento AB.

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos planos secantes se llaman *planos bisectores* de los dos planos.

9. a) $\cos\left(\widehat{r,s}\right)=\frac{\left|-7\right|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{7}{3\cdot\sqrt{6}}=\frac{7\sqrt{6}}{18}$

$\widehat{r,s} = 17°\ 43'\ 12''$

b) $\cos\left(\widehat{r,s}\right)=\frac{\left|-3\right|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{3}{3\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

$\widehat{r,s} = 65°\ 54'\ 36''$

c) $\cos\left(\widehat{r,s}\right)=\frac{\left|1\right|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{6}$

$\widehat{r,s} = 80°\ 24'\ 36''$

d) $\vec{v} = (1, -1, -2) \times (1, 2, -2) = (6, 0, 3)$

$$\cos\left(\widehat{r,s}\right)=\frac{|12|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{45}}=\frac{12}{\sqrt{270}}=\frac{2\sqrt{30}}{15}$$

$\widehat{r,s}=24°\ 5'\ 24''$

10. Por ejemplo:

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{3}$$

11. a) $\vec{u}=(1,-1,0)\times(1,1,-1)=(1,1,2)$

$\vec{v}=(1,0,-1)\times(2,-1,0)=(-1,-2,-1)$

El vector director de la recta que buscamos es:

$\vec{u}\times\vec{v}=(3,-1,-1)$

La recta es:

$$t:\ \frac{x}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}$$

b) $t:\begin{cases}x+3y=0\\x+3z=0\end{cases}$

El sistema $\begin{cases}x+3y=0\\x+3z=0\\x-y=3\\x+y-z=0\end{cases}$ no tiene solución, por lo tanto, r y t se cruzan, no tienen puntos en común.

Por el contrario, el sistema formado por las ecuaciones de *s* y *t* sí tiene solución:

$x=3,\ y=-1,\ z=-1$

12. $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-5)$

$\overrightarrow{CD}=(-2,-2,k-1)$

Debe cumplirse:

$$\frac{-2}{-1}=\frac{-2}{-1}=\frac{k-1}{-5};$$

$k-1=-10\rightarrow k=-9$

13. Vector director de *s*:

$(1,-1,-1)\times(1,0,1)=(-1,-2,1)$

Una posible solución sería:

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{0}$$

14. Vector director de *r*:

$(0,1,0)\times(1,0,-1)=(-1,0,-1)$

Vector director de *s*:

$(1,3,0)\times(0,1,-1)=(-3,1,1)$

Vector director de la recta que buscamos:

$(-1,0,-1)\times(-3,1,1)=(1,4,-1)$

La recta es:

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z}{-1}$$

15. a) $\cos\left(\widehat{\pi,\pi'}\right)=\dfrac{|1-2\sqrt{2}-1|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{4}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\widehat{\pi,\pi'}=54°\ 44'\ 24''$

b) $\vec{n}'=(1,-1,1)\times(-1,2,0)=(-2,-1,1)$

$\cos\left(\widehat{\pi,\pi'}\right)=\dfrac{|7|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{7}{3\sqrt{6}}=\dfrac{7\sqrt{6}}{18}$

$\widehat{\pi,\pi'}=17°\ 43'\ 12''$

c) $\cos\left(\widehat{\pi,\pi'}\right)=\dfrac{|0|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=0$

$\widehat{\pi,\pi'}=90°$

16. π': $z=0$

$\cos\pi/3=0{,}5$

$$\cos\left(\widehat{\pi,\pi'}\right)=\frac{|1|}{\sqrt{k^2+2}\cdot\sqrt{1}}=\frac{1}{\sqrt{k^2+2}}=0{,}5$$

$k_1=\sqrt{2},\ k_2=-\sqrt{2}$

Dos soluciones:

π_1: $\sqrt{2}x+y+z-2=0$

π_2: $-\sqrt{2}x+y+z-2=0$

17. Vector normal del plano que buscamos:

$(1,1,1)\times(1,5,-1)=(-6,2,4)$

El plano es:

$-6(x-2)+2(y-1)+4z=0;$

$-6x+2y+4z+10=0$

18. $z-3=0$

19. Buscamos planos de la forma:

$A(x-1)+By+C(z-1)=0;$

Se debe cumplir:

7

$$\frac{|A+2B-C|}{\sqrt{6}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2A+B+2C|}{3\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

$3|A+2B-C| = \sqrt{6}\,|2A+B+2C|$

Dos soluciones:

$$\begin{cases} A=\dfrac{\left(2+3\sqrt{6}\right)}{5}B+\dfrac{\left(-4\sqrt{6}-11\right)}{5}C \\ A=\dfrac{\left(2-3\sqrt{6}\right)}{5}B+\dfrac{\left(4\sqrt{6}-11\right)}{5}C \end{cases};$$

$$\begin{cases} A=1{,}87B-4{,}16C \\ A=-1{,}07B-0{,}24C \end{cases};$$

Los planos son, por lo tanto, de dos formas:

$(1{,}87B-4{,}16C)(x-1)+By+C(z-1)=0;$

$(-1{,}07B-0{,}24C)(x-1)+By+C(z-1)=0;$

Y hay, por lo tanto, infinitas soluciones.

Página 159

20. $\vec{u}=(1,1,0)\times(0,-1,1)=(1,-1,-1)$

$$\text{sen}\,\alpha=\frac{|-1|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$$

$\alpha = 19°\ 28'\ 12''$

21. a) $\text{sen}\,\alpha=\dfrac{|1|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{84}}=\dfrac{\sqrt{21}}{42}$

$\alpha = 6°\ 25'\ 12''$

b) $(-5,-1,-10)$

22. $\text{sen}\,\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{3}{3\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

23. Vector normal al plano que buscamos:

$(1,0,-2)\times(0,1,-1)=(2,1,1)$

El plano es:

π: $2(x-3)+y-1+z+1=0;$

π: $2x+y+z-6=0$

$$0=\cos\left(\widehat{\pi,\pi'}\right)=\frac{|4+3-k|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}=\frac{|7-k|}{\sqrt{84}}$$

Por lo tanto, debe cumplirse:

$|7-k|=0 \rightarrow k=7$

24. Vector director:

$(-1,0,1)\times(-3,3,2)=(-3,-1,-3)$

La recta es:

$$\frac{x-3}{-3}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-1}{-3}$$

25. Vector director:

$(3,2,-1)\times(1,-1,1)=(1,-4,-5)$

La recta es:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-4}=\frac{z+1}{-5}$$

26. Vector director de *r*:

$(3,1,0)\times(4,0,1)=(1,-3,-4)$

Vector director de *s*:

$(2,-2,0)\times(0,1,-1)=(2,2,2)$

Vector normal al plano:

$(1,-3,-4)\times(2,2,2)=(2,-10,8)$

La ecuación del plano es:

$2(x-1)-10(y-1)+8(z-2)=0;$

$2x-10y+8z-8=0;$

$x-5y+4z-4=0$

27. Vector director de *r*:

$(1,2,0)\times(1,0,-2)=(-4,2,-2)$

Vector normal al plano:

$(-4,2,-2)\times(1,-1,1)=(0,2,2)$

El plano es:

$2(y-5)+2z=0;$

$2y+2z-10=0;$

$y+z-5=0$

28. Vector normal a π:

$(1,0,2)\times(0,1,-2)=(-2,2,1)$

Vector director de la recta que buscamos:

$(-2,2,1)\times(2,3,1)=(-1,4,-10)$

Por lo tanto:

r: $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-2}{-10}$

29. $2\,(x-3)+y-5\,(z-2)=0;$

$2x+y-5z+4=0$

30. Vector normal del plano:

$(1, 2, 0)\times(2, -1, 1)=(2, -1, -5)$

La ecuación es:

$2\,(x+1)-y-5\,(z-1)=0;$

$2x-y-5z+7=0$

31. a) $d\,(M, N)=\sqrt{1^2+4^2+1^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

b) $d\,(P, Q)=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$

32. $P=r\cap\pi=(5/4, 5/2, 5/4)$

$Q=r\cap\pi'=(0, 0, 0)$

La longitud que buscamos es:

$$d(P, Q)=d(P, O)=\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{75}{8}}=\frac{5\sqrt{6}}{4}$$

33. a) $A(1, 3, 0)$

$\overrightarrow{AP}=(0, -1, 3)$

$$d\,(P, r)=\frac{|(-8,6,2)|}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{104}}{\sqrt{14}}=\frac{2\sqrt{13}\sqrt{7}}{7}$$

b) $A(2, 4, 3)$

$\overrightarrow{AP}=(-2, -2, 17)$

$$d\,(P, r)=\frac{|(-23,23,0)|}{\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{1.058}}{\sqrt{11}}=\frac{23\sqrt{22}}{11}$$

c) $\vec{u}=(1, 0, -2)\times(0, 1, 1)=(2, -1, 1)$

Un punto A cualquiera de r es:

$z=0\rightarrow A(0, 1, 0)$

$\overrightarrow{AP}=(1, -2, 2)$

$$d\,(P, r)=\frac{|(0,3,3)|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}=\sqrt{3}$$

d) $\vec{u}=(1, 2, 2)\times(1, -1, 1)=(4, 1, -3)$

Un punto A cualquiera de r es:

$x=0\rightarrow A(0, -3/4, 5/4)$

$\overrightarrow{AP}=(2, -5/4, 7/4)$

$$d\,(P, r)=\frac{|(2,13,17)|}{\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{222}}{\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{1.443}}{13}$$

34. $\vec{u}=(1, 0, -2)\times(0, 1, 2)=(2, -2, 1)$

Un punto A de r:

$z=0\rightarrow A(1, 2, 0)$

$\overrightarrow{AP}=(-2, 4, -3)$

$$d\,(P, r)=\frac{|(-2,-4,-4)|}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{36}}{3}=\frac{6}{3}=2$$

35. $\vec{u}=(1, 0, 1)\times(0, 1, 1)=(-1, -1, 1)$

Un punto A de r:

$z=0\rightarrow A(1, 1, 0)$

$\overrightarrow{AP}=(-1, -1, 0)$

$$d\,(P, r)=\frac{|(-1,1,0)|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

36. $\vec{u}=(1, -1, 0)\times(1, 0, -1)=(1, 1, 1)$

Un punto A de r:

$x=0\rightarrow A(0, 0, -1)$

$\overrightarrow{AP}=(1, 1, 2)$

$$d\,(P, r)=\frac{|(-1,1,0)|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

37. $\overrightarrow{PQ}=(2, 2, 2)$

Los puntos R de r son de la forma.

$R\,(-1+2\lambda, 2\lambda, 1+2\lambda)$

$$d(R, M)=\sqrt{(-3+2\lambda)^2+(1+2\lambda)^2+(2\lambda)^2}=3$$

$(-3+2\lambda)^2+(1+2\lambda)^2+(2\lambda)^2=9;$

$12\lambda^2-8\lambda+1=0$

$\lambda_1=1/2,\ \lambda_2=\ 1/6$

Dos soluciones:

$R_1(0, 1, 2)$

$R_2(-2/3, 1/3, 4/3)$

38. $\overrightarrow{PQ}=(4, 3, -3)$

Los puntos R de r son de la forma.

$R(-1 + 4\lambda, 2 + 3\lambda, 3 - 3\lambda)$

$d(R, A) = \sqrt{(4\lambda)^2 + (2+3\lambda)^2 + (2-3\lambda)^2} = 12$

$(4\lambda)^2 + (2 + 3\lambda)^2 + (2 - 3\lambda)^2 = 144;$

$34\lambda^2 - 136 = 0$

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$

Dos soluciones:

$R_1(7, 8, -3)$

$R_2(-9, -4, 9)$

39. El plano es:

π: $x + y / 2 + z / 3 = 1;$

π: $6x + 3y + 2z - 6 = 0$

$d(\pi, P) = \dfrac{|12+9+2-6|}{\sqrt{49}} = \dfrac{|17|}{7} = \dfrac{17}{7}$

40. a) $3 = d(\pi', O) = \dfrac{|D|}{\sqrt{14}}$

Dos soluciones:

$x + 2y + 3z + 3\sqrt{14} = 0$

$x + 2y + 3z - 3\sqrt{14} = 0$

b) La recta perpendicular al plano que pasa por el origen es:

s: $(x, y, z) = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$

Calculamos $s \cap \pi$:

$\lambda + 4\lambda + 9\lambda - 5 = 0;$

$14\lambda = 5;$

$\lambda = 5 / 14$

El punto es $(5 / 14, 5 / 7, 15 / 14)$.

Página 160

41. Si consideramos la recta s: $\begin{cases} x = 3 - 2y \\ z = -2y - 2 \end{cases}$ las rectas son paralelas y, por lo tanto, determinan un plano.

Un punto de s sería $Q(3, 0, -2)$, por lo tanto, si $P(1, 2, 3)$:

$\overrightarrow{PQ} = (2, -2, -5)$

El plano es:

$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y-2 & -2 & -1 \\ z-3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0;$

π: $-9x - 14y + 2z + 31 = 0$

Por lo tanto:

$d(\pi, O) = \dfrac{|31|}{\sqrt{281}} = \dfrac{31}{\sqrt{281}} = \dfrac{31\sqrt{281}}{281}$

42. a) $d(P, P') = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

b) $\vec{u} = (1, -2, 0) \times (0, 1, 1) = (-2, -1, 1)$

$y = 0 \to A(0, 0, 0)$

$\overrightarrow{AP} = (4, 2, 0)$

$d(P, R) = \dfrac{|(2,-4,0)|}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{30}}{3}$

c) $d(\pi, P) = \dfrac{|4-4-2|}{\sqrt{9}} = \dfrac{|-2|}{3} = \dfrac{2}{3}$

43. $d(\pi, P) = \dfrac{|2+2+4|}{\sqrt{21}} = \dfrac{|8|}{\sqrt{21}} = \dfrac{8}{\sqrt{21}} = \dfrac{8\sqrt{21}}{21}$

Actividad personal, hay infinitos planos que distan $\dfrac{8\sqrt{21}}{21}$ de P, todos los planos tangentes de la circunferencia de radio $\dfrac{8\sqrt{21}}{21}$ y centro P.

Calcularemos, de entre ellos, el que es paralelo a π:

π': $x - 2y + 4z + D = 0$

$\dfrac{|2+2+4+D|}{\sqrt{21}} = \dfrac{|8+D|}{\sqrt{21}} = \dfrac{8\sqrt{21}}{21}$

$|8 + D| = 8$

Dos soluciones:

$D = 0 \to$ Se obtiene π

$D = -16 \to$ Se obtiene π': $x - 2y + 4z - 16 = 0$

44. Si $x = 0 \to B(0, -3, -3) \in s$

$\vec{v} = (1, 1, -2) \times (1, -2, 2) = (-2, -4, -3)$

$\overrightarrow{AB} = (-1, -5, 3)$

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Por lo tanto:

$$d(r, s) = \frac{|66|}{|(-1,-7,10)|} = \frac{66}{5\sqrt{6}} = \frac{11\sqrt{6}}{5}$$

45. $\overrightarrow{AB} = (1, -2, 3)$

$$d(r, s) = \frac{|-2|}{|(5,2,-1)|} = \frac{2}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}}{15}$$

El vector director de la recta *t* es (5, 2, −1). Buscaremos un punto de *r*, por lo tanto, de la forma $(0, 1 + \lambda, -3 + 2\lambda)$ que pase por *t* de forma que *t* sea secante a *s*.

De momento:

t: $(x, y, z) = (5\mu, 1 + \lambda + 2\mu, -3 + 2\lambda - \mu)$

Buscamos λ y μ de forma que uno de los puntos de *t* pertenezca a *s*, es decir, se debe cumplir:

$$\frac{5\mu - 1}{1} = \frac{2 + \lambda + 2\mu}{-1} = \frac{-3 + 3\lambda - \mu}{3};$$

$$\begin{cases} -5\mu + 1 = 2 + \lambda + 2\mu \\ 15\mu - 3 = -3 + 3\lambda + 2\mu \end{cases};$$

$\lambda = -13 / 45, \mu = -3 / 34$

Por lo tanto, el punto de *r* que buscábamos es (0, 21 / 34, −64 / 17) y la recta *t* es :

$(x, y, z) = (0, 21 / 34, -64 / 17) + \varphi\,(5, 2, -1)$

46. $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1, 1)$

La recta que determinan P y Q es:

$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

La recta OY es:

$$s: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$

La recta *s* pasa por O, por lo tanto:

$$d(r, s) = \frac{|-1|}{|(-1,0,-1)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

47. $\vec{v} = (2, -1, 0) \times (0, 3, -2) = (2, 4, 6)$

Las rectas no son paralelas, por lo tanto, si no tienen puntos en común, se cruzan:

$$\begin{cases} 2(\lambda - 1) - (\lambda + 1) = 0 \\ 3(\lambda + 1) - 2\lambda = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = -3 \end{cases}$$

Por lo tanto, las rectas no tienen puntos en común.

La recta *s* pasa por el origen de coordenadas.

$$d(r, s) = \frac{|-6|}{|(2,-4,2)|} = \frac{6}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

48. a) El vector que determinan los puntos dados es:

(−2, −1, −2)

Éste será el vector normal de los planos:

π: $-2\,(x - 4) - (y + 2) - 2\,(z + 1) = 0$

π: $-2x - y - 2z + 4 = 0$

Por otra parte:

π': $-2\,(x - 2) - (y + 1) - 2\,(z + 3) = 0$

π': $-2x - y - 2z - 3 = 0$

b) $d\,(\pi,\pi') = \frac{|7|}{\sqrt{9}} = \frac{7}{3}$

49. a) $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2$

$2x - 2y + 2z - 1 = 0$

b) $d(A, B) = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

Los puntos que buscamos son los de la circunferencia de centro A y radio $\sqrt{3}$.

$x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 3$

50. $\frac{|x + 2y - 2z + 4|}{\sqrt{9}} = \frac{|x - y - z|}{\sqrt{3}}$

Dos soluciones:

$$\begin{cases} 2x - (3\sqrt{3} + 5)y + (-1 + \sqrt{3})z - 4\sqrt{3} = 0 \\ 2x - (3\sqrt{3} - 5)y + (-1 - \sqrt{3})z + 4\sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

51. $-2a = -4 \rightarrow a = 2$

$-2b = 2 \rightarrow b = -1$

$-2c = -8 \rightarrow c = 4$

$-4 = 4 + 1 + 16 - r^2;$

$r = 5$

52. El punto de tangencia es Q(1, 2, 0):

$r = d\,(P, Q) = \sqrt{9} = 3$

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 - 9 = 0;$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$

53. $d = d(A, B) = \sqrt{16+64+64} = \sqrt{144} = 12$

$r = 12 / 2 = 6$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 36;$

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z - 30 = 0$

54. El centro de la esfera es O, por lo tanto, $\overrightarrow{OP}$ es el vector normal del plano:

$(x-1) - 4(y+4) + 8(z-8) = 0;$

$x - 4y + 8z - 81 = 0$

55. Los puntos de *r* son de la forma:

$Q(1 + 3\lambda, 2\lambda, \lambda)$

Buscamos Q tal que $\overrightarrow{PQ} \perp (3, 2, 1)$:

$3(3\lambda) + 2(2\lambda - 2) + (\lambda + 2) = 0;$

$14\lambda - 2 = 0;$

$\lambda = 1/7$

Por lo tanto:

$Q(10/7, 2/7, 1/7)$

Q es el punto medio del segmento de extremos P y el punto P'(a, b, c) que buscamos:

$$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{-2+c}{2}\right) = \left(\frac{10}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right)$$

$P'(13/7, -10/7, 16/7)$

56. Si soluciones el sistema dado, obtenemos:

$x = -4 + 2\lambda,\ y = 5 - \lambda,\ z = \lambda$

Por lo tanto, los puntos Q de la recta son de la forma:

$Q(-4 + 2\lambda, 5 - \lambda, \lambda)$

Por lo tanto:

$\overrightarrow{PQ} = (-6 + 2\lambda, 5 - \lambda, \lambda - 1)$

Imponemos que sea perpendicular al vector director de *r*, es decir, a $(2, -1, 1)$:

$-12 + 4\lambda - 5 + \lambda + \lambda - 1 = 0;$

$-18 + 6\lambda = 0;$

$\lambda = 3$

Por lo tanto:

$Q(2, 2, 3)$

Si P'(a, b, c):

$$\left(\frac{2+a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{1+c}{2}\right) = (2,2,3)$$

$P'(2, 2, 5)$

57. Sea P'(a, b, c) en todos los casos:

a) $$\left(\frac{4+a}{2}, \frac{0+b}{2}, \frac{1+c}{2}\right) = (1,0,-2)$$

$P'(-2, 0, -5)$

b) Los puntos de *r* son de la forma:

$Q(1 + \lambda, -\lambda, -2 + 2\lambda)$

Imponemos $\overrightarrow{PQ} = (-3 + \lambda, -\lambda, -3 + 2\lambda) \perp (1, -1, 2)$:

$-3 + \lambda + \lambda - 6 + 4\lambda = 0;$

$6\lambda - 9 = 0;$

$\lambda = 3/2$

Por lo tanto:

$Q(5/2, -3/2, 1)$

Se debe cumplir:

$$\left(\frac{4+a}{2}, \frac{0+b}{2}, \frac{1+c}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{-3}{2}, 1\right)$$

$P'(1, -3, 1)$

c) La recta perpendicular al plano que pasa por P es:

$(x, y, z) = (4, 0, 1) + \lambda(1, 1, -1) = (4 + \lambda, \lambda, 1 - \lambda)$

Calculamos el punto de intersección entre esta recta y el plano:

$(4 + \lambda) + \lambda - (1 - \lambda) + 1 = 0;$

$3\lambda + 4 = 0;$

$\lambda = -4/3$

El punto es:

$Q(8/3, -4/3, 7/3)$

Q es el punto medio del segmento PP':

$$\left(\frac{4+a}{2}, \frac{0+b}{2}, \frac{1+c}{2}\right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$P'(4/3, -8/3, 11/3)$

58. Recta y plano se cortan en el punto A(1, 1, 4).

Consideramos un punto de la recta *r*, por ejemplo, el P(0, 0, 3) y calculamos su simétrico P' respecto del plano.

La recta perpendicular al plano que pasa por P es:

$$s: \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

Calculamos el punto de intersección entre *s* y el plano:

$4\lambda + \lambda - 3 + \lambda + 1 = 0;$

$6\lambda - 2 = 0;$

$\lambda = 1/3$

El punto es $Q(2/3, 1/3, 8/3)$

$P'(a, b, c)$ verifica:

$$\left(\frac{0+a}{2}, \frac{0+b}{2}, \frac{3+b}{2}\right) = (2/3, 1/3, 8/3)$$

$P'(4/3, 2/3, 7/3)$

La recta que buscamos, por lo tanto, es la determinada por $A(1,1,4)$ y $P'(4/3, 2/3, 7/3)$:

$(x, y, z) = (1, 1, 4) + \lambda(1/3, -1/3, -5/3)$;

$(x, y, z) = (1, 1, 4) + \lambda(1, -1, -5)$

59. a) Recta por P perpendicular a π:

$(x, y, z) = (5, -5, 4) + \lambda(2, -3, 1)$

Todo punto de esta recta es de la forma:

$Q(5 + 2\lambda, -5 - 3\lambda, 4 + \lambda)$

Intersección con el plano:

$2(5 + 2\lambda) - 3(-5 - 3\lambda) + 4 + \lambda = 1;$

$\lambda = -2$

El punto es:

$Q(1, 1, 2)$

El punto $P'(a, b, c)$ que buscamos verifica:

$$\left(\frac{5+a}{2}, \frac{-5+b}{2}, \frac{4+b}{2}\right) = (1, 1, 2)$$

$P'(-3, 7, 0)$

b) Puntos de corte con los ejes:

Eje OX $\rightarrow y = z = 0 \rightarrow A(1/2, 0, 0)$

Eje OY $\rightarrow x = z = 0 \rightarrow B(0, -1/3, 0)$

Eje OZ $\rightarrow x = y = 0 \rightarrow C(0, 0, 1)$

El volumen que buscamos es el del tetraedro determinado por los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

$V = |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]|/6 = |-1/6|/6 = 1/36\ u^3$

60. Punto medio de P y P':

$$M\left(\frac{2+2}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{0-2}{2}\right) = M(2, 2, -1)$$

$\overrightarrow{PP'} = (0, 2, -2)$

El plano que buscamos pasa por M y tiene como vector normal $\overrightarrow{PP'}$:

$2(y - 2) - 2(z + 1) = 0;$

$2y - 2z - 6 = 0;$

$y - z - 3 = 0$

61. $-2a = -2 \rightarrow a = 1$

$-2b = 0 \rightarrow b = 0$

$-2c = 2 \rightarrow c = -1$

$C(1, 0, -1)$

El punto $P'(a, b, c)$ que buscamos verifica:

$$\left(\frac{7+a}{2}, \frac{4+b}{2}, \frac{9+b}{2}\right) = (1, 0, -1)$$

$P'(-5, -4, -11)$

62. $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 16$

$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y + 4z - 2 = 0$

Para encontrar dos puntos, por ejemplo, si consideramos el vector $\vec{v} = (0, 0, 4)$, los puntos:

$C + \vec{v} = (3, 1, 2)$

$C - \vec{v} = (3, 1, -6)$

Son diametralmente opuestos.

Página 161

63. a) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2$;

$\pi: -8x - 4y + 8z - 8 = 0;$

$\pi: -2x - y + 2z - 2 = 0$

b) El tetraedro está determinado por los puntos de corte de los tres ejes con π y el origen de coordenadas.

Corte con OX $\rightarrow -2x - 0 + 0 - 2 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow$
$\rightarrow A(-1, 0, 0)$

Corte con OY $\rightarrow 0 - y + 0 - 2 = 0 \rightarrow y = -2 \rightarrow$
$\rightarrow B(0, -2, 0)$

Corte con OZ $\rightarrow 0 - 0 + 2z - 2 = 0 \rightarrow z = 1 \rightarrow$
$\rightarrow C(0, 0, 1)$

El volumen del paralelepípedo determinado por $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ es:

$\left|\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right| = 2$

Por lo tanto, el volumen del tetraedro es 2 / 6 = 1 / / 3 u^3.

c) Vector director de la recta → (–2, –1, 2)

$$\frac{x}{-2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$$

64. a) $r \cap \pi = A\ (3, 2, 4)$

$s \cap \pi = B\ (-1, 0, -2)$

b) $\overrightarrow{OA} = (3, 2, 4) \rightarrow |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{29}$

$\overrightarrow{OB} = (-1, 0, -2) \rightarrow |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{5}$

$\overrightarrow{AB} = (-4, -2, -6) \rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{46}$

Perímetro = $\sqrt{29} + \sqrt{5} + \sqrt{46} = 14{,}40$ u

Consideramos ahora los puntos de recta determinada por O y A, que son de la forma:

$(x, y, z) = (3\lambda, 2\lambda, 4\lambda)$

Entre ellos buscamos ahora el punto P tal que $\overrightarrow{PB}$ es ortogonal a $\overrightarrow{OA}$.

$(3, 2, 4) \cdot (-1 - 3\lambda, -2\lambda, -2 - 4\lambda) = 0;$

$-3 - 9\lambda - 4\lambda - 8 - 16\lambda = 0;$

$-11 - 29\lambda = 0;$

$\lambda = -11 / 29$

Por lo tanto:

$P\left(-33/29, -22/29, -44/29\right)$

$\overrightarrow{PB} = (4 / 29, 22 / 29, -14 / 29)$

$$|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{24/29} = \frac{2\sqrt{174}}{29}$$

Finalmente:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{PB}}{2} = \frac{\sqrt{29} \cdot \frac{2\sqrt{174}}{29}}{2} = \sqrt{6}$$

65. $\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0)$

La recta determinada por A y B es:

$(x, y, z) = (1, 1, 1) + (-2\lambda, 2\lambda, 0)$

Sus puntos son de la forma, $P(1 - 2\lambda, 1 + 2\lambda, 1)$.

$\overrightarrow{CD} = (-1, 2, 0)$

$\overrightarrow{PD} = (-1 + 2\lambda, 2 - 1 - 2\lambda, -1) = (-1 + 2\lambda, 1 - 2\lambda, -1)$

Imponemos $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{PD}$:

$1 - 2\lambda + 2 - 4\lambda = 0;$

$3 - 6\lambda = 0;$

$\lambda = 1 / 2$

Por lo tanto:

P (0, 2, 1)

66. a)
$$\begin{vmatrix} 1-0 & 0-0 & 1-0 \\ 2-0 & 1-0 & 0-0 \\ 0-1 & -2-1 & -1-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -7$$

b) $\overrightarrow{AB} = (1, 0, -2)$

$\overrightarrow{AC} = (0, 1, -3)$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2, 3, 1)$

π: $2x + 3y + (z - 1) = 0;$

π: $2x + 3y + z - 1 = 0;$

c)
$$d(\pi, D) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 - 1|}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

67. a)
$$\begin{cases} m_1 x + (m_1 - 2)y + 3(m_1 + 1)z + (m_1 + 1) = 0 \\ m_2 x + (m_2 - 2)y + 3(m_2 + 1)z + (m_2 + 1) = 0 \end{cases};$$

$$x = -\frac{3}{2} - \frac{9}{2}\lambda$$

$$y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\lambda$$

$z = \lambda$

La recta es:

$(x, y, z) = (-3 / 2, 1 / 2, 0) + \lambda\ (-9 / 2, 3 / 2, 1)$

b) Se debe cumplir:

$m + (m - 2) + m + 1 = 0;$

$m = 1 / 3$

El plano es:

$$\frac{x}{3} - \frac{5y}{3} + 4z + \frac{4}{3} = 0;$$

$x - 5y + 12z + 4 = 0$

c) Vector director de *r*:

$(1, 0, -2) \times (0, -1, 1) = (-2, -1, -1)$

Se debe cumplir:

$(m, m - 2, 3(m + 1)) \cdot (-2, -1, -1) = -2m - m + 2 - 3m - 3 = 0;$

$m = -1 / 6$

El plano es:

$$-\frac{x}{6}-\frac{13y}{6}+\frac{5z}{2}+\frac{5}{6}=0$$

68. El plano que buscamos tiene vector normal $\vec{v}$ = (2, , −1, 2).

El centro de la circunferencia es O, por lo tanto, buscamos ahora el punto de intersección entre la recta $O+\lambda\,\vec{v}=(2\lambda, -\lambda, 2\lambda)$ y la circunferencia.

$(2\lambda)^2+(-\lambda)^2+(2\lambda)^2-16=0;$

$\lambda_1=4/3,\ \lambda_2=-4/3$

Los puntos de la recta que obtenemos, que serán los puntos de tangencia entre el plano y la circunferencia son:

$P_1(8/3, -4/3, 8/3)$

$P_2(-8/3, 4/3, -8/3)$

Imponemos ahora que estos puntos pertenezcan al plano π':$2x-y+2z+D=0$:

$P_1\in\pi'_1\rightarrow 16/3+4/3+16/3+D=0\rightarrow D= =-12\rightarrow \pi'$:$2x-y+2z-12=0$

$P_2\in\pi'_2\rightarrow -16/3-4/3-16/3+D=0\rightarrow D= =14\sqrt{2}\rightarrow \pi'$:$2x-y+3z+12=0$

Autoevaluación

1. $\cos\left(\hat{r,s}\right)=\frac{|-12|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{74}}=\frac{12}{\sqrt{444}}=\frac{6\sqrt{111}}{111}$

$\hat{r,s}=55°\ 16'\ 48''$

2. $\cos\left(\hat{\pi,\pi'}\right)=\frac{|4|}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}}=\frac{4}{9}$

$\hat{\pi,\pi'}=63°\ 36'\ 36''$

3. $\vec{u}=(1,0,2)\times(2,-1,0)=(2,4,-1)$

$\vec{n}=(-1,1,2)\times(1,1,0)=(-2,2,-2)$

$\text{sen}\,\alpha=\frac{|6|}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{12}}=\frac{6}{\sqrt{252}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$

$\hat{r,\pi}=22°\ 12'\ 36''$

4. a) Por ejemplo: $x+2z+1=0$

5. a) Por ejemplo: $x+2z+1=0$

b) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-1}$

c) El apartado *a*, infinitas, el *b*, una.

6. Vector director de *r* es:

$(1,-1,0)\times(2,-1,1)=(-1,-1,1)$

El vector normal del plano que buscamos tiene que cumplir:

$(a, b, c)\,(-1,-1,1)=-a-b+c=0;$

$c=a+b\rightarrow(a, b, a+b)$

También tiene que cumplir:

$(a, b, a+b)\,(2,2,-1)=0$

$a+b=0\rightarrow a=-b\rightarrow(a,-a,0)\rightarrow(1,-1,0)$

Y tiene que contener un punto cualquier de *r*:

$x=0\rightarrow y=-\rightarrow z=1\rightarrow(0,-1,-1)$ es un punto del plano que buscamos.

El plano es, por lo tanto:

$x-(y+1)=0;$

$x-y-1=0$

7. a) $\{x=0\}\rightarrow y=1, z=2\rightarrow A(0,1,2)$

$\{y=0\}\rightarrow x=1/3, z=4/3\rightarrow B(1/3, 0, 4/3)$

$\{z=0\}\rightarrow x=1/3, z=0\rightarrow C(1,-2,0)$

b) $d(A,B)=\frac{\sqrt{14}}{3}$

$d(A,C)=\sqrt{14}$

$d(B,C)=\frac{2\sqrt{14}}{3}$

8. $A(1,1,-3)\in r$

$\overrightarrow{AP}=(1,2,-2)$

Por lo tanto:

$d(P,r)=\frac{|(2,2,3)|}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{17}}{3}$

9. Buscamos en primer lugar un punto de *r*, por ejemplo, si $x=0\rightarrow y=1\rightarrow z=1\rightarrow A(0,1,1)\in r$

Si $B(1,0,-2)\rightarrow\overrightarrow{AB}=(1,-1,-3)$

Vector director de $r\rightarrow(1,-1,0)\times(2,1,-1)=(1,1,3)$

Por lo tanto:

$$d(r, s) = \frac{|26|}{|(13,2,-5)|} = \frac{26}{3\sqrt{22}} = \frac{13\sqrt{22}}{33}$$

10. $\dfrac{|x+2y-z+5|}{\sqrt{6}} = \dfrac{|5x+7y|}{\sqrt{74}}$

$$\begin{cases} \dfrac{x+2y-z+5}{\sqrt{6}} = \dfrac{5x+7y}{\sqrt{74}} \\ \dfrac{x+2y-z+5}{\sqrt{6}} = -\dfrac{5x+7y}{\sqrt{74}} \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left(10\sqrt{111}-74\right)x + \left(14\sqrt{111}-148\right)y + 74z - 370 = 0 \\ \left(-10\sqrt{111}-74\right)x + \left(-14\sqrt{111}-148\right)y + 74z - 370 = 0 \end{cases};$$

11. El centro de la esfera es el punto medio del segmento PQ:

$$\left(\frac{2}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{2}\right) = C(1, 1, 1)$$

El radio es la distancia $d(P, C) = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} =$

$= \sqrt{14}$.

Por lo tanto, la ecuación de la esfera es:

$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 14$

Plano mediador del segmento PQ:

$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = x^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2$;

$-4x - 8y - 12z + 24 = 0$;

$-x - 2y - 3z + 6 = 0$