SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 199 a 217

Página 199

1. $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{3(2+h)^2 - 1 - (3\cdot 2^2 - 1)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{12h + 3h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(12 + 3h) = 12$

2. $f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{2(-1+h) + 5 - (-2+5)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$

3. $f'(1^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^3 + 4(1+h) - (1+4)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0^-} \frac{7h + 3h^2 + h^3}{h} = \lim_{h\to 0^-}\left(7 + 3h + h^2\right) = 7$

$f'(1^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{6(1+h) - 1 - (6-1)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0^-} \frac{6h}{h} = 6$

No existe f'(1).

4. $f'(4^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(4+h-4) - [-(4-4)]}{h} =$

$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$

$f'(4^+) = \lim_{h\to 0^-} \frac{(4+h-4) - [(4-4)]}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{h} = 1$

No existe f'(4).

Página 200

5. a) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h) + 3 - (4x+3)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{4h}{h} = 4$

b) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - 5(x+h) - (x^2 - 5x)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 - 5h}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h - 5) = 2x - 5$

c) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - (x+h)^2 - (x^3 - x^2)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 2xh - h^2}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\left(3x^2 + 3xh + h^2 - 2x - h\right) = 3x^2 - 2x$

d) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{4 + \sqrt{x+h} - \left(4 + \sqrt{x}\right)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6. a) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{2}{x+h} + \frac{2}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h}{x(x+h)}}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{x(x+h)} = \frac{2}{x^2}$

b) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - 4(x+h) - 1 - \left(x^2 - 4x - 1\right)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 - 4h}{h} = \lim_{h\to 0}(2x + h - 4) = 2x - 4$

c) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{7(x+h) - 3 - (7x - 3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{7h}{h} = 7$

d) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-2(x+h)^2 + 2x^2}{h} =$

© VICENS VIVES

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-4xh-2h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(-4x-2h) = -4x$$

Página 201

7. a) $f'(x) = 7x^6$

b) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

c) $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

d) $f'(x) = \dfrac{2}{5x^{3/5}}$

e) $f'(x) = -\dfrac{1}{2x^{3/2}}$

f) $f'(x) = \dfrac{2}{3x^{1/3}}$

g) $f'(x) = 2x \ln 2$

h) $f'(x) = \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{\ln 3}$

8. a) $f'(x) = 3 + 12x$

$f''(x) = 12$

$f'''(x) = 0$

b) $f'(x) = -\dfrac{3}{x^2}$

$f''(x) = \dfrac{6}{x^3}$

$f'''(x) = -\dfrac{18}{x^4}$

c) $f'(x) = -2x + 5$

$f''(x) = -2$

$f'''(x) = 0$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$f''(x) = -\dfrac{1}{2x^{3/2}}$

$f'''(x) = \dfrac{3}{4x^{5/2}}$

Página 202

9. a) $f'(x) = 10x - 4$

b) $f'(x) = \dfrac{6x^2-2x+6}{(x^2-1)^2}$

c) $f'(x) = \dfrac{6x^3\ln x + 2x^3 + 2}{x}$

d) $f'(x) = \dfrac{2-\ln x}{2x^{3/2}}$

10. a) $f'(x) = \dfrac{-2\operatorname{sen} x - 4x\cos x}{\sqrt{x}}$

b) $f'(x) = \dfrac{2\cos x \ln x - \operatorname{sen} x}{(\ln x)^2 x}$

c) $f'(x) = \dfrac{-\ln x - 2}{\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2\ln x}{x^3} - \dfrac{5\cos x}{(\operatorname{sen} x)^2}$

Página 203

11. a) $f(x) = 3x + 2$

$g(x) = x^2$

$D[(3x+2)^2] = 18x + 2$

b) $f(x) = x^2 + 4$

$g(x) = x^3$

$D[(x^2+4)^3] = 6x\,(x^2+4)^2$

c) $f(x) = (x-3)^5$

$g(x) = \ln x$

$D[\ln (x-3)^5] = \dfrac{5}{x-3}$

d) $f(x) = x^5$

$g(x) = \sqrt{x}$

$D\left[\sqrt{x^5}\right] = \dfrac{5x^{3/2}}{2}$

e) $f(x) = 4\sqrt{x}$

$g(x) = x^3$

$D\left[\left(4\sqrt{x}\right)^3\right] = 96\sqrt{x}$

10

© VICENS VIVES

f) $f(x) = 5x$

$g(x) = -3\text{sen } x$

$D[-3 \text{ sen } 5x] = -15 \cos 5x$

12. a) $f(x) = -2\ln x$

$g(x) = x^2$

$D[(-2\ln x)^2] = \dfrac{8\ln x}{x}$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = \ln x$

$D[\ln \sqrt{x}\,] = \dfrac{1}{2x}$

c) $f(x) = \ln x$

$g(x) = x^2$

$D[(\ln x)^2] = \dfrac{2\ln x}{x}$

d) $f(x) = \text{sen } x$

$g(x) = \text{sen } x$

$D[\text{sen}(\text{sen } x)] = \cos(\text{sen } x) \cos x$

e) $f(x) = \text{sen } x$

$g(x) = \ln x$

$D[\ln(\text{sen } x)] = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$

f) $f(x) = \text{sen } x$

$g(x) = x^2$

$D[\ln(\text{sen } x)] = 2 \text{ sen } x \cos x$

Página 204

13. a) $y^{-1} = x^3$

$y' = \dfrac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$

b) $y^{-1} = \log_a x$

$y' = \dfrac{1}{\dfrac{1}{a^x}\cdot\dfrac{1}{\ln a}} = a^x \ln a$

c) $y^{-1} = x^2 + 5$

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x-5}}$

d) $y^{-1} = (x+2)^2$

$y' = \dfrac{1}{2\left(\sqrt{x}-2+2\right)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

14. a) $y^{-1} = 5 - x \rightarrow (y^{-1})' = -1$

b) $y^{-1} = \sqrt[3]{x+1} \rightarrow (y^{-1})' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

15. No, eso significaría:

$g'(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Pero para esto, debe suceder $g(x) = x$, cuya inversa es $f(x) = x$.

Página 206

16. a) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(x+3)^2}}$

b) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \dfrac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

c) $y' = \dfrac{\dfrac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1-16x}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}\sqrt{1-16x}} =$

d) $y' = -\dfrac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$

e) $y' = -\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = -\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

f) $y' = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

17. a) $y' = \dfrac{2}{1+(2x+1)^2}$

b) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+(\ln x)^2} = \dfrac{1}{x\left(1+(\ln x)^2\right)}$

c) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x-4}}}{1+x-4} = \dfrac{1}{2\sqrt{x-4}(x-3)}$

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

18. a) $y' = \frac{6^x \ln 6}{1+6^{2x}}$

b) $y' = \frac{2x+1}{1+\left(x^2+x\right)^2}$

c) $y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = -\frac{-1}{x^2+1}$

19. a) $y' = -\frac{x \arccos x - \sqrt{1-x^2}}{\left(-1+x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$

b) $y' = \frac{2}{\operatorname{arcsen}(2x)\sqrt{1-4x^2}}$

c) $y' = \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$

Página 207

20. a) $2x + 4yy' = 0;$

$y' = -\frac{x}{2y}$

b) $\frac{2x}{16} + \frac{2yy'}{9} = 0;$

$y' = -\frac{9x}{16y}$

c) $2x + 2yy' + 2 - 4y' = 0$

$y' = \frac{-x-1}{y-2}$

d) $\frac{2x}{25} - \frac{2y'y}{16} = 0;$

$y' = \frac{16x}{25y}$

21. a) $y' - \text{sen}\,(xy) \cdot (y + xy') = 0$

$y' = \frac{\text{sen}(xy) \cdot y}{1 - x \cdot \text{sen}(xy)}$

b) $y' = (1 + tg^2(xy))\,(y + xy')$

$y' = \frac{\left(1+tg^2(xy)\right) \cdot y}{1 - x - x \cdot tg^2(xy)}$

c) $xy' + y + \text{cod} \cdot y' = 0$

$y' = \frac{-y}{x + \cos y}$

d) $6y^5 \cdot y' + y' - 4x = 0$

$y' = \frac{4x}{1+6y^5}$

Página 208

22. $f'(x) = x^n\,[0 + n \cdot \frac{1}{x}] = nx^{n-1}$

23. $f'(x) = a^x\,[\ln a + x \cdot 0] = a^x \ln a$

24. a) $f'(x) = x^{\ln x}\,[\frac{1}{x} \cdot \ln x + \ln x \cdot \frac{1}{x}] = \frac{2x^{\ln x} \ln x}{x}$

b) $f'(x) = (\ln x)^{2x}\,[2 \cdot \ln(\ln x) + 2x \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}] =$

$= (\ln x)^{2x}\left(2\ln(\ln x) + \frac{2}{\ln x}\right)$

c) $f'(x) = x^{\cos x}\,[-\text{sen}\,x \cdot \ln x + \cos \cdot \frac{1}{x}]$

d) $f'(x) = \left(2\sqrt{x}\right)^{\ln x}\,[\frac{1}{x} \cdot \ln\left(2\sqrt{x}\right) + \ln x \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}] =$

$= \left(2\sqrt{x}\right)^{\ln x}\left[\frac{1}{x} \cdot \ln\left(2\sqrt{x}\right) + \ln x \cdot \frac{1}{2x}\right]$

Página 209

25. a) $2\,(2x^3 - 8x^2 + 7)\,(6x^2 - 16x)$

b) $4\,(\text{sen}\,x - \cos x)^3\,(\cos x + \text{sen}\,x)$

c) $3\,(\text{sen}\,x)^2 \cos x - 3\,x^2 \cos x^3$

d) $\frac{4x^3 - 8x + 8}{2\sqrt{x^4 - 4x^2 + 8x}} = \frac{2x^3 - 4x + 4}{\sqrt{x^4 - 4x^2 + 8x}}$

10

© VICENS VIVES

e) $-\frac{2}{3}\sqrt[3]{\operatorname{cosec}^2 x}\ \operatorname{cotg} x$

f) $3\cos 3x + 2\operatorname{sen} 2x$

26. a) $3x^2\operatorname{arcsen}^2 x + \frac{2x^3\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $-6x(4-x^2)^2\operatorname{arctg}^2 x + \frac{2(4-x^2)^3\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$

c) $\frac{\cos(\ln x)}{x}$

d) $\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

e) $\frac{\operatorname{tg} x}{\ln 10}$

f) $(-1-\operatorname{cotg}^2[(1+3x)^2])(6+18x)$

Página 211

27. Continua en x = 0 pero no es derivable ya que

$f'(x) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

y no está definida en 0.

28. Continua en x = 2.

$f'(x) = \frac{-4(x^2-4)}{(x^2+4)^2}$ → continua en x = 2 y, por lo tanto, *f* es derivable en x = 2.

29. a) $f(0) = 2$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$

La función no es continua en x = 0 y, por lo tanto, tampoco es derivable.

b) Función continua en x = 0.

$f'(x) = \frac{3x^2+2x}{2\sqrt{x^2(x+1)}}$ → no está definida en x = 0

y, por lo tanto, *f* no es derivable en x = 0.

30. *f* es continua para cualquier valor de *b*.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x \le 0 \\ b+2x, & x > 0 \end{cases}$$

$f'(0^-) = \cos 0 = 1$

$f'(0+) = b + 0 = b$

Por lo tanto, si b = 1, la función es derivable en x = 0.

31. a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = b$

Por lo tanto, b = 1.

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 3a+1$

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3-5 = -2$

$3a + 1 = -2 \rightarrow a = -1$

b) $$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2x}{(x+1)^2}, & x < 0 \\ -1, & 0 \le x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

$f'(0^-) = 0$

$f'(0^+) = -1$

No es derivable en x = 0.

$f'(3^-) = -1$

$f'(3^+) = 1$

No es derivable en x = 3.

32. Es continua en x = 0.

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$$

No es derivable en x = 0.

33. $$f(x) = \begin{cases} -(x-1)-(x+1), & x < -1 \\ -(x-1)+(x+1), & -1 \le x \le 1 \\ (x-1)+(x+1), & x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x < -1 \\ 2, & -1 \le x \le 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

f continua en x = 0

© VICENS VIVES

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$

f continua en x = 1

$$f'(x) = \begin{cases} -2, x < -1 \\ 0, -1 \le x \le 1 \\ 2, x > 1 \end{cases}$$

f derivable en x = 0 y no derivable en x = 1.

Página 214

1. La derivada de f en x = a es el límite

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

cuando es finito.

Una función f es derivable en (a, b) cuando f'(x) existe para todo $x \in$ (a, b)

Una función f es derivable en [a, b] cuando f'(x) existe para todo $x \in$ (a, b) y existen las derivadas laterales $f'(a^+)$ y $f'(b^-)$.

2. La función derivada de f es la que asigna a cada x del dominio de f el valor f'(x).

La derivada n–ésima de f es la función que resulta de derivar f n veces.

$f'(x) = 3x^2 e^{x^3}$

$f''(x) = 6x\, e^{x^3} + 9x^4 e^{x^3}$

$f'''(x) = 6e^{x^3} + 54x^3 e^{x^3} + 27x^6 e^{x^3}$

3. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

4. $[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

a) f: $x \to 3x^2 + 1 \to \text{sen}\,(3x^2 + 1)$

$f'(x) = 6x \cos(3x^2 + 1)$

b) f: $x \to \sqrt{x^3 + 6x} \to \ln\sqrt{x^3 + 6x}$

$$f'(x) = \frac{3(x^2 + 2)}{2x(x^2 + 6)}$$

5. $$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$y^{-1} = 10^x$

Por lo tanto:

$$y' = \frac{1}{10^{\log x} \cdot \ln 10} = \frac{1}{x \cdot \ln 10}$$

$$\text{Si } x = 10 \to y^{-1} = \frac{1}{10 \cdot \ln 10}$$

6. Como *arctg x* es la inversa de *tg x*.

$y = \text{arctg}\, x \leftrightarrow x = \text{tg}\, y$

Por lo tanto, según lo visto en la actividad anterior:

$$y' = \frac{1}{1 + \text{tg}^2(\text{arctg}\, x)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$\text{Si } y = \text{arctg}\,(\ln x) \to y' = \frac{\frac{1}{x}}{1 + (\ln x)^2} = \frac{1}{x + x(\ln x)^2}$$

7. Se derivan los dos miembros de la ecuación teniendo en cuenta que y es función de x y que, por lo tanto, al derivarla se debe aplicar la regla de la cadena.

Si $y = x^3 - 2xy^2 + y^3$:

$y' = 3x^2 - 2y^2 - 4xyy' + 3y^2y'$

$$y' = \frac{3x^2 - 2y^2}{1 + 4xy - 3y^2}$$

8. $$D\left[f(x)^{g(x)}\right] = f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right]$$

Por lo tanto:

$$D[x^{\ln(x+1)}] = x^{\ln(x+1)}\left[\frac{1}{x+1}\ln x + \ln(x+1)\frac{1}{x}\right]$$

9. Veamos que si f es derivable en x = a, entonces es continua en x = a.

Suponemos, por lo tanto, que existe:

10

© VICENS VIVES

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h};$$

$$\lim_{h\to 0}[f(a+h)-f(a)] = \lim_{h\to 0}[f'(a)\cdot h] = f(a)\cdot \lim_{h\to 0} h = 0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

O lo que es lo mismo:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Por lo tanto, es continua.

10. a) $f'(3) = \lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2+1-(3^2+1)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(6+h) = 6$

b) $f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2-2(-1+h)-[(-1)^2-2(-1)]}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{-4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(-4+h) = -4$

c) $f'(-1) = \lim_{h\to 0}\frac{12h-12h^2+4h^3}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}(12-12h+4h^2) = 12$

d) $f'(9) = \lim_{h\to 0}\frac{1+2\sqrt{9+h}-(1+2\sqrt{9})}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sqrt{9+h}-6}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4(9+h)-36}{h(2\sqrt{9+h}+6)} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{4h}{h(2\sqrt{9+h}+6)} = \lim_{h\to 0}\frac{4}{2\sqrt{9+h}+6} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{4}{2\sqrt{9+h}+6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

e) $f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(2+h)-\ln(2)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\ln\left[\left(\frac{2+h}{2}\right)^{1/h}\right] = \ln\left[\lim_{h\to 0}\left(\frac{2+h}{2}\right)^{1/h}\right] =$

$= \ln e^{1/2} = \frac{1}{2}$

f) $f'(9) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9+h+7}-\sqrt{9+7}}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{16+h}-4}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{16+h-16}{h(\sqrt{16+h}+4)} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{16+h}+4)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{16+h}+4} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{16+h}+4)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{16+h}+4} = \frac{1}{8}$

11. a) $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{3(a+h)+1-(3a+1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3h}{h} = 3$

b) $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{2(a+h)^2-(a+h)-(2a^2-a)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{2h^2-h+4ah}{h} = \lim_{h\to 0}(2h-1+4a) = -1+4a$

c) $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-4-(a^2-4)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2ah}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2a) = 2a$

d) $f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{a+h-1}-\frac{1}{a-1}}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} -\frac{h}{h(a+h-1)(a-1)} =$

$= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{(a+h-1)(a-1)} = -\frac{1}{(a-1)^2}$

12. a) $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)-7-(2x-7)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{2h}{h} = 2$

b) $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^3+2-(2x^3+2)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\frac{6x^2h+6xh^2+2h^3}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}(6x^2+6xh+2h^2) = 6x^2$

c) $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)^2+2(x+h)+3-(2x^2+2x+3)}{h} =$

© VICENS VIVES

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4xh + 2h^2 + 2h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (4x + 2h + 2) = 4x + 2$$

d) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{-\dfrac{1}{x+h} + \dfrac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{h}{x(x+h)}}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x(x+h)} = \frac{1}{x^2}$$

e) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+4+h} - \dfrac{1}{x+4}}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\dfrac{h}{(x+h+4)(x+4)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{(x+h+4)(x+4)} = -\frac{1}{(x+4)^2}$$

f) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{x+2+h} - \dfrac{1}{x+2}}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\dfrac{h}{(x+h+2)(x+2)}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} -\frac{1}{(x+h+2)(x+2)} = -\frac{1}{(x+2)^2}$$

g) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{2\sqrt{x+h} - 2\sqrt{x}}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h) - 4x}{h\left(2\sqrt{x+h} + 2\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{4h}{h\left(2\sqrt{x+h} + 2\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4}{2\sqrt{x+h} + 2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

h) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{-\sqrt{x+h} + 1 + \sqrt{x} - 1}{h} =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x - (x+h)}{h\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+h}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+h}} =$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{x}}$$

13. a) $f'(x) = -3x^{-4}$

b) $f'(x) = -6x^{-7}$

c) $f'(x) = \dfrac{5}{7x^{2/7}}$

d) $f'(x) = \dfrac{5}{3x^{2/3}}$

14. a) $f(x) = x^{-5}$

$f'(x) = -5x^{-6}$

b) $f(x) = x^{-4}$

$f'(x) = -4x^{-5}$

c) $f(x) = x^{-2/3}$

$f'(x) = -\dfrac{2}{3x^{5/3}}$

d) $f(x) = x^{29/4}$

$f'(x) = \dfrac{29x^{25/4}}{4}$

15. a) -2

b) $18x$

c) $-12x^2$

d) $-\cos x$

e) $5 \cos x$

f) $\dfrac{1}{2x}$

16. a) $6x + 2$

b) $12x^2 - 6x - 15$

c) $-20x^3 + 6x^2 - 6x + 8$

d) $-6x^2 + 146x - 4$

17. a) $2x \ln x + \dfrac{x^2 + 9}{x}$

b) $(27x^2 - 12x + 3)\,\text{sen}\,x + (9x^3 - 6x^2 + 3x)\cos x$

c) $(2x - 4)\left(\sqrt{x} + 1\right) + \dfrac{x^2 - 4x + 3}{\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$

10

© VICENS VIVES

d) $\cos x \cdot \ln x\sqrt{x} + \dfrac{\text{sen } x}{\sqrt{x}} + \dfrac{\frac{\text{sen } x \cdot \ln x}{2}}{\sqrt{x}}$

e) $-\dfrac{\text{sen } x \ln x}{\ln 10} + \dfrac{\cos x}{x \ln 10}$

Página 215

18. a) $\dfrac{x\left(30x^2 - 99x + 80\right)}{(3x-5)^2}$

b) $\dfrac{x^2 + 6x - 3}{\left(x^2 + 3\right)}$

c) $-\dfrac{x^2\left(2x^5 - 20x^2 - 3\right)}{\left(-4 + x^3\right)^2}$

d) $\dfrac{-\text{sen } x + \ln x \cdot \cos x \cdot x}{x\left(-1 + \cos^2 x\right)}$

e) $\dfrac{-\text{sen } x + \ln x \cdot \cos x \cdot x}{x \cdot \ln^2 x}$

f) $\dfrac{-2x^2 \text{sen } x - 2\text{sen } x + x^3 \cos x + 2x \ln x \cdot \cos x}{x \cdot \left(-1 + \cos^2 x\right)}$

19. a) $D[\ln 5x] = D[\ln 5 + \ln x] = D[\ln x] = \dfrac{1}{x}$

b) $D[\ln x^3] = D[3\ln x] = 3\, D[\ln x] = \dfrac{3}{x}$

c) $D[\ln ex^2] = D[\ln e + 2\ln x] = 2\, D[\ln x] = \dfrac{2}{x}$

d) $D[\ln \sqrt[3]{x}\,] = D\left[\dfrac{1}{3}\ln x\right] = \dfrac{1}{3} D[\ln x] = \dfrac{1}{3x}$

20. a) $f'(x) = 6x - 2$

$f'(-1) = -8$

b) $f'(x) = \dfrac{4}{x}$

$f'(e) = \dfrac{4}{e}$

c) $f'(x) = 3 \cos x$

$f'(\pi) = -3$

d) $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$

$f'(\pi) = \dfrac{5}{2\sqrt{16}} = \dfrac{5}{8}$

21. a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$

$g(x) = x^2$

$D[(3x^2 - 4x + 5)^2] = 2\,(6x - 4)\,(3x^2 - 4x + 5)$

b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 2$

$g(x) = x^3$

$D[(x^3 + 2x^2 - x + 2)^3] = 3\,(9x^2 + 4x - 1)\,(x^3 + 2x^2 - x + 2)^2$

c) $f(x) = x^3 + 2x^2$

$g(x) = x^{-2}$

$D[(x^3 + 2x^2)^{-2}] = \dfrac{-6x^2 - 8x}{\left(x^3 + 2x^2\right)^3}$

d) $f(x) = 4x^2 + 2x - 1$

$g(x) = x^{1/2}$

$D[(4x^2 + 2x - 1)^{1/2}] = \dfrac{8x + 2}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 1}}$

22. a) $f(x) = (x^2 - 2x + 1)^{-2}$

$f'(x) = \dfrac{-4x + 4}{\left(x^2 - 2x + 1\right)^2}$

b) $f(x) = (x^4 - 2x^2 - 1)^{-1}$

$f'(x) = \dfrac{-4x\left(x^2 - 1\right)}{\left(x^4 - 2x^2 - 1\right)^2}$

c) $f(x) = (x^2 + 2x)^{-3}$

$f'(x) = \dfrac{-6x - 6}{\left(x^2 + 2x\right)^4}$

d) $f(x) = (x^2 - 5x)^{-1}$

$f'(x) = \dfrac{-2x + 5}{\left(x^2 - 5x\right)^2}$

23. a) $f'(x) = \dfrac{2\ln x \cdot x^2 - 3\ln x \cdot x + x^2 - 3x + 4}{x}$

b) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 6x - 6\ln(2x+1)x - 3\ln(2x+1) + 6\ln(2x+1)x^3 + 3\ln(2x+1)x^2}{2x+1}$

c) $f'(x) = -2x\text{sen }(3x + \pi) - 4\text{sen }(3x + \pi) - 3x\cos(3x + \pi) - 12x\cos(3x + \pi)$

10

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

d) $f'(x) = 2\cos^2 x - 1$

24. a) $\dfrac{1}{x}$

b) $\dfrac{4}{x}$

c) $\dfrac{1}{2(x+2)}$

d) $-\dfrac{\text{sen } x}{2\cos x}$

25. a) $f(x) = 3^x$

$g(x) = \ln x$

$D[\ln 3^x] = \ln 3$

b) $f(x) = \ln x$

$g(x) = \ln x$

$D[\ln(\ln x)] = \dfrac{1}{x \ln x}$

c) $f(x) = \text{sen } x$

$g(x) = \ln x$

$D[\ln(\text{sen } x)] = \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$

d) $f(x) = \text{tg } x$

$g(x) = \ln x$

$D[\ln(\text{tg } x)] = \dfrac{1 + \text{tg}^2 x}{\text{tg } x}$

e) $f(x) = \ln x$

$g(x) = \cos x$

$D[\cos(\ln x)] = -\dfrac{\text{sen}(\ln x)}{x}$

f) $f(x) = \ln x$

$g(x) = \text{tg } x$

$D[\text{tg}(\ln x)] = \dfrac{1 + \text{tg}^2(\ln x)}{x}$

26. a) $f(x) = x^2 - 1$

$g(x) = 4^x$

$D[4^{x^2-1}] = 4^{x^2}\, x \ln x$

b) $f(x) = 3x - 5$

$g(x) = 2^x$

$D[2^{3x-5}] = 3 \cdot 2^{3x-5} \ln 2$

c) $f(x) = -4x$

$g(x) = 2e^x$

$D[2e^{-4x}] = -8e^{-4x}$

d) $f(x) = 3^x$

$g(x) = xe^{-x}$

$D[3^x e^{-3x}] = 3^x \ln 3\ e^{-3x} - 3^{x+1} \cdot e^{-3x}$

e) $f(x) = 6^x$

$g(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{x+9}{3}}}$

$D\left[\dfrac{6^x}{e^{2x+3}}\right] = 6^x e^{-2x-3} \cdot \ln 2 + 6^x e^{-2x-3} \cdot \ln 3 - 2 \cdot$
$\cdot\, 6^x e^{-2x-3}$

f) $f(x) = 5x$

$g(x) = e^x$

$D[5e^{5x}] = 5e^{5x}$

27. a) $f(x) = x^4$

$g(x) = \text{sen } x$

$D[\text{sen } x^4] = 4x^3 \cos x^4$

b) $f(x) = x^{-3}$

$g(x) = \text{sen } x$

$D[\text{sen } x^{-3}] = \dfrac{-3\cos x^{-3}}{x^4}$

c) $f(x) = 3^x$

$g(x) = \text{sen } x$

$D[\text{sen } 3^x] = 3^x \cos 3x \cdot \ln 3$

d) $f(x) = \text{sen } x$

$g(x) = \text{sen } x$

$D[\text{sen}(\text{sen } x)] = \cos(\text{sen } x) \cos x$

e) $f(x) = 4x^2 - 8x$

$g(x) = \text{sen } x$

$D[\text{sen}(4x^2 - 8x)] = 8\cos(4x^2 - 8x)(x - 1)$

f) $f(x) = \text{tg } x$

$g(x) = \text{sen } x$

$D[\text{sen}(\text{tg } x)] = \dfrac{\cos\left(\dfrac{\text{sen } x}{\cos x}\right)}{\cos^2 x}$

10

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

28. a) $f(x) = 2x + 1$

$g(x) = \text{sen}^2\, x$

$D[\text{sen}^2\,(2x + 1)] = 4\,\text{sen}\,(2x + 1)\cos\,(2x + 1)$

b) $f(x) = \text{sen}\, x$

$g(x) = \sqrt[3]{x}$

$D[\sqrt[3]{\text{sen}\, x}\,] = \frac{1}{3}\cdot\frac{\cos x}{\sqrt[3]{(\text{sen}\, x)^2}}$

c) $f(x) = \sqrt{x+5}$

$g(x) = \text{sen}\, x$

$D[\text{sen}\,\sqrt{x+5}\,] = \frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\sqrt{x+5}}{\sqrt{x+5}}$

d) $f(x) = \text{sen}\, x$

$g(x) = \frac{1}{x^2}$

$D\left[\frac{1}{\text{sen}^2\, x}\right] = \frac{-2\cos x}{\text{sen}^3\, x}$

29. a) $f(x) = 3x$

$g(x) = \cos x$

$D[\cos 3x] = -3\,\text{sen}\, 3x$

b) $f(x) = 5x^2 - 2x$

$g(x) = \cos x$

$D[\cos\,(5x^2 - 2x)] = -\text{sen}\,(5x^2 - 2x)\,(10x - 2)$

c) $f(x) = x^3$

$g(x) = \cos x$

$D[\cos x^3] = -3x^2\,\text{sen}\, x^3$

d) $f(x) = \ln x$

$g(x) = \cos x$

$D[\cos x^3] = -\frac{\text{sen}(\ln x)}{x}$

e) $f(x) = \cos x$

$g(x) = \cos x$

$D[\cos\,(\cos x)] = \text{sen}\, x\,\text{sen}\,(\cos x)$

f) $f(x) = 3^x$

$g(x) = \cos x$

$D[\cos\,(3^x)] = -3^x\cdot\ln 3\,\text{sen}\,(3^x)$

30. a) $f(x) = 5x$

$g(x) = \text{tg}\, x$

$D[\text{tg}\, 5x] = 5 + 5\,\text{tg}^2\, 5x$

b) $f(x) = x^2$

$g(x) = \text{tg}\, x$

$D[\text{tg}\, x^2] = 2x\,(1 + \text{tg}^2\, x^2)$

c) $f(x) = -3x^2 + 4x$

$g(x) = \text{tg}\, x$

$D[\text{tg}\,(-3x^2 + 4x)] = -(6x + 4)[1 + \text{tg}^2\,(3x^2 + 4x)]$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = \text{tg}\, x$

$D[\text{tg}\,\frac{1}{x}\,] = -\frac{1+\text{tg}^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

e) $f(x) = \ln x$

$g(x) = \text{tg}\, x$

$D[\text{tg}\,(\ln x)] = \frac{1+\text{tg}^2(\ln x)}{x}$

f) $f(x) = \cos x$

$g(x) = \text{tg}\, x$

$D[\text{tg}\,(\cos x)] = -(1 + \text{tg}^2\,(\cos x))\,\text{sen}\, x$

g) $f(x) = \sqrt{2x+3}$

$g(x) = \text{tg}\, x$

$D[\text{tg}\,\sqrt{2x+3}\,] = \frac{1+\text{tg}^2\sqrt{2x+3}}{\sqrt{2x+3}}$

h) $f(x) = 2^x$

$g(x) = \text{tg}\, x$

$D[\text{tg}\, 2^x] = 2^x\,\ln 2\,[1 + \text{tg}^2\,(2^x)]$

31. a) $-6\,\text{cosec}\, 6x\,\text{cotg}\, 6x$

b) $6x\,\text{cosec}\,(3x^2 - 5)\,\text{cotg}\,(3x^2 - 5)$

c) $-\text{cosec}\,(e^x)\,\text{cotg}\,(e^x)\,e^x$

d) $-\frac{\cos\text{ec}(\ln x)\cdot\cot\text{g}(\ln x)}{x}$

e) $\frac{4\cos\text{ec}\left(x^{-4}\right)4\cot\text{g}\left(x^{-4}\right)}{x^5}$

f) $-6\,(2x + 1)^2\,\text{cosec}\,(2x + 1)^3\,\text{cotg}\,(2x + 1)^3$

32. a) $-2\,\sec\,(-2x)\,\text{tg}\,(-2x)$

b) $(2x + 2)\sec\,(x^2 + 2x)\,\text{tg}\,(x^2 + 2x)$

c) $\sec\,(e^x)\,\text{tg}\,(e^x)\,e^x$

© VICENS VIVES

d) $\frac{\sec(\ln x)\cdot \text{tg}(\ln x)}{x}$

e) $-\frac{\sec\left(x^{-1}\right)\cot g\left(x^{-1}\right)}{x^2}$

f) sec $(3x-2)^2$ tg $(3x-2)^2$ $(18x-12)$

33. a) $-7-7\,\text{cotg}^2(7x)$

b) $2x\,(-1-\text{cotg}^2(x^2-1))$

c) $e^x\,(-1-\text{cotg}^2(e^x))$

d) $\frac{-1-\cot g^2(\ln x)}{x}$

e) $\frac{1}{2}\cdot\frac{-1-\cot g^2\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}$

f) $-8\cdot\frac{-1-\cot g^2\left(\frac{1}{(4x-3)^2}\right)}{(4x-3)^3}$

Página 216

34. a) $\frac{1}{\sqrt{-x^2-x}}$

b) $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

c) $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

d) $-\frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}$

35. a) $\frac{-5}{\sqrt{-25x^2+10x}}$

b) $-\frac{3x^2+2}{\sqrt{-x^6-4x^4-4x^2+1}}$

c) $-\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

d) $-\frac{1}{\sqrt{-4x^2-2x}}$

36. a) $\frac{4}{1+16x^2}$

b) $\frac{2x}{1+x^4}$

c) $\frac{2x+2^x\ln 2}{1+\left(x^2+2^x\right)^2}$

d) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}\left(1+\sqrt[3]{x^4}\right)}$

37. a) $8\,(2x-5)^3$

b) $3x^2\ln x^2+2x^2$

c) $-\frac{2}{3\sqrt[3]{1-x}}$

d) $\cos(3x^2-2x)\,(6x-2)$

e) $\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

f) $\frac{-2\text{sen}\,2x}{\cos 2x}$

g) $\frac{3+3\tan^2 3x}{\tan 3x}$

h) $9\,\text{sen}^2\,3x\cos 3x$

38. $f'(x)=4x^3-6x$

$f''(x)=12x^2-6$

$f'''(x)=24x-6$

$f^{iv}(x)=24$

39. $f'(x)=2\,\text{sen}\,x\cos x\rightarrow f'(\pi/2)=0$

$f''(x)=2\cos^2 x-2\,\text{sen}^2 x\rightarrow f'(\pi/2)=-2$

40. $f'(x)=-4\,\text{sen}\,x\cos x\rightarrow f'(\pi)=0$

$f''(x)=-4\cos^2 x+4\,\text{sen}^2 x\rightarrow f'(\pi)=-4$

41. $f'(x)=-2\,\text{sen}\,2x$

$f''(x)=-4\cos 2x$

$f'''(x)=8\,\text{sen}\,2x$

$f^{iv}(x)=16\cos 2x$

Por lo tanto:

10

© VICENS VIVES

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}(-1)^{k+1}(2)^{2k+1}\operatorname{sen}2x, & n=2k+1\\ (-1)^{k}(2)^{2k}\cos 2x, & n=2k\end{cases}$$

42. $f'(x)=2\cdot\ln 3\cdot 3^{2x}$

$f''(x)=4\cdot\ln^2 3\cdot 3^{2x}$

$f'''(x)=8\cdot\ln^3 3\cdot 3^{2x}$

$f^{iv}(x)=16\cdot\ln^4 3\cdot 3^{2x}$

Por lo tanto:

$f^{(n)}(x)=2^n(\ln 3)^n\cdot 3^{2x}$

43. $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

$f'''(x)=\dfrac{2}{x^3}$

$f^{iv}(x)=-\dfrac{6}{x^4}$

Por lo tanto:

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

44. a) $f'(x)=\dfrac{2x(x+1)}{(2x+1)^2}=0\rightarrow x=0,\ x=-1$

b) $f'(x)=\dfrac{-2x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}=0\rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

c) $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0\rightarrow x=e$

d) $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}=0\rightarrow$ No tiene solución

45. a) $f'(x)=2\operatorname{sen}x\cos x$

$f''(x)=4\cos^2x-2=0\rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}$, k entero

b) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$

$f''(x)=\dfrac{2-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\rightarrow x=1,\ x=-1$

c) $f'(x)=\dfrac{-x+2}{x^2-x}$

$f''(x)=\dfrac{x^2-4x+2}{x^2(x-1)^2}=0\rightarrow x=2\pm\sqrt{2}$

d) $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+2}$

$f''(x)=\dfrac{-2x.-2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}0\rightarrow x=-1$

46. a) $y'=y+xy'+(y+xy')\cos(xy)$

$y'=\dfrac{y+y\cos(xy)}{1-x-x\cos(xy)}$

b) $y'=3x^2-2y-2xy'+2yy'$

$y'=\dfrac{3x^2-2y}{1+2x-2y}$

c) $3x^2+3y^2y'=y+xy'$

$y'=\dfrac{y-3x^2}{3y^2-x}$

d) $2yy'=\dfrac{(1-y')(x+y)-(x-y)(1+y')}{(x+y)^2}$;

$y'=\dfrac{2y}{2y(x+y)^2+2x}$;

e) $y'=y'e^y+1$

$y'=\dfrac{1}{1-e^y}$

f) $\dfrac{y'x-y}{x^2}=\dfrac{1}{y}$;

$y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$

g) $y'\cos y=y+xy'$

$y'=\dfrac{y}{\cos y-x}$

h) $1=\dfrac{1-y'}{1+(x-y)^2}$

$y=-(x-y)^2$

47. a) $(\operatorname{sen}x)^{\ln x}\left[\dfrac{1}{x}\ln(\operatorname{sen}x)+\ln x\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}\right]$

b) $x^{\operatorname{sen}x}\left[\cos x\ln x+\operatorname{sen}x\dfrac{1}{x}\right]$

© VICENS VIVES

c) $(\ln x)^{\text{tg}\, x}\left[\left(1+\text{tg}^2 x\right)\ln(\ln x)+\text{tg}\, x\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}\right]$

d) $(\text{tg}\, x)^{\text{arc tg}\, x}\left[\dfrac{1}{1+x^2}\ln(\text{tgx})+\text{arctg}\, x\dfrac{1+\text{tg}^2 x}{\text{tg}\, x}\right]$

48. $f(x)=\begin{cases}-2x(x-4), x<4\\ 2x(x-4), x\geq 4\end{cases}$

La función es continua en x = 4 porque los límites laterales coinciden con f(4) = 0.

$f'(x)=\begin{cases}-4x+8, x<4\\ 4x-8, x\geq 4\end{cases}$

$f'(4^-)=-8$

$f'(4^+)=8$

La función no es derivable en x = 4

49. Continua en x = 2, f(2) = 0.

$f'(x)=\begin{cases}2x-2, x<2\\ \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}, x\geq 2\end{cases}$

La derivada no está definida en x = 2, por lo tanto, *f* no es derivable para este valor de *x*.

50. $f(x)=\begin{cases}x^2-4, x<-2\\ -x^2+4, -2\leq x\leq 2\\ x^2-4, x>2\end{cases}$

La función es continua en x = 2 y x = –2 , f(2) = f(–2) = 0.

$f'(x)=\begin{cases}2x, x<-2\\ -2x, -2\leq x\leq 2\\ 2x, x>2\end{cases}$

$f'(-2^-)=-4$ $\quad f'(-2^+)=4$

$f'(2^-)=-4$ $\quad f'(2^+)=4$

La función no es derivable en x = 2 ni en x = –2.

51. $f(x)=\begin{cases}-1, x<0\\ x+2, 0\leq x<4\\ \dfrac{24}{x}, x\geq 4\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -0^-} f(x)=-1 \qquad \lim\limits_{x\to -0^+} f(x)=2$

La función no es continua en x = 0 y, por lo tanto, tampoco es derivable.

La función es continua en x = 4, f(4) = 6.

$f'(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1, 0\leq x<4\\ -\dfrac{24}{x^2}, x\geq 4\end{cases}$

$f'(4^-)=1$

$f'(4^+)=-3/2$

La función no es derivable en x = 4.

52. Para que sea continua debe ocurrir → –a + b = 5

$f'(x)=\begin{cases}a, x<-1\\ 2x-4, x\geq -1\end{cases}$

Para que sea derivable → a = –2 – 4 = –6

Por lo tanto, 6 + b = 5 → b = –1

53. *f* continua en x = 3 si 6 + a = 3 → a = –3

$f'(x)=\begin{cases}2, x<3\\ 2x-2, x\geq 3\end{cases}$

$f'(3^-)=2$

$f'(3^+)=4$

No ese derivable en x = 3.

54. Consideramos la función: $f(x)=\begin{cases}5x+b, x<3\\ ax^2+3x+5, x\geq 3\end{cases}$

Para que sea continua en x = 31, se debe cumplir 15 + + b = 9a + 14.

$f'(x)=\begin{cases}5, x<3\\ 2ax+3, x\geq 3\end{cases}$

Para que sea derivable se debe cumplir, 5 = 6a + 3 → a = 1 / 3.

Y como teníamos que 15 + b = 9a + 14 → b = 2.

55. *f* continua en x = 0, f (0) = 0.

$f'(x)=\begin{cases}2(x+2), x<0\\ -2a(x-2), x\geq 0\end{cases}$

10

© VICENS VIVES

f es derivable en x = 0 si 4 = 4a → a = 1

Página 217

56. No tienen por qué ser iguales, puede diferenciarse en una constante. Actividad personal.

57. No. La derivada de f(x) = –3x, es f'(x) = –3 < 0 pero f > 0 cuando x < 0.

58. a) $f'(x) = \dfrac{-9(1+3x^2)^2(-2x+3x^2-1)}{(-1+3x)^4}$

b) $f'(x) = -12x\,(x^2+3)\cos^2[(x^2+3)^2]\,\text{sen}\,[(x^2+3)]$

c) $f'(x) = \dfrac{1+\text{tg}^2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}{(x-1)^2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}$

d) $f'(x) = \dfrac{-2}{2\cos x\cdot \text{sen}\,x - 1}$

e) $f'(x) = \dfrac{3x^2\cdot 2^{\text{sen}\sqrt{x^3+1}}\cdot \ln 2\cdot \cos\sqrt{x^3+1}}{2\sqrt{x^3+1}}$

f) $f'(x) = \dfrac{x\left(2\sqrt{4+x^2}+1\right)}{\sqrt{4+x^2}\left(\sqrt{4+x^2}+x^2\right)}$

59. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{-x+1}, x<-1 \\ -\dfrac{x^2-1}{-x+1}, -1\le x\le 0 \\ -\dfrac{x^2-1}{x+1}, 0<x<1 \\ \dfrac{x^2-1}{x+1}, x\ge 1 \end{cases} = \begin{cases} -x-1, x<-1 \\ x+1, -1\le x\le 0 \\ -x+1, 0<x<1 \\ x-1, x\ge 1 \end{cases}$

La función es continua en todo x con f(–1) = 0, f(0) = 1, f(1) = 0.

$f'(x) = \begin{cases} -1, x<-1 \\ 1, -1\le x\le 0 \\ -1, 0<x<1 \\ 1, x\ge 1 \end{cases}$

La función no es derivable en x = –1, x = 0, x = 1.

60. $f'(x) = \begin{cases} \text{sen}x, x\le 0 \\ x^2-ax, x>0 \end{cases}$

f es continua en x = 0 y, por lo tanto, lo es en toda la recta real.

$f'(x) = \begin{cases} \cos x, x\le 0 \\ 2x-a, x>0 \end{cases}$

$f'(0^-) = 1$ $\qquad f'(0^+) = -a$

f es derivable en toda la recta real cuando el valor de a sea –1.

61. f continua en x = 0 si b = 0

f continua en x = 1 si c = 1

$f'(x) = \begin{cases} -2x+a, x<0 \\ 1, 0\le x<1 \\ 2(x-1)+d, x\ge 1 \end{cases}$

f derivable en x = 0 si a = 1.

f derivable en x = 1 si 1 = d.

Por lo tanto, si a = 1, b = 0, c = d = 1, la función es continua y derivable para todo x.

62. f continua en x = –2 con f(–2) = 0

f continua en x = 0 si 4 = a.

$f'(x) = \begin{cases} 2x+6, x\le -2 \\ 2, -2<x\le 0 \\ -a\,\text{sen}\,x, x>0 \end{cases}$

f derivable en x = –2 con f'(–2) = 2.

f derivable en x = 0 si 2 = 0 → f no es derivable en x = 0 para ningún valor de a.

63. a) f continua en x = 0 si 2 = 2a → a = 1

f continua en x = π si $\pi^2 - 2 = \pi^2 + b \to b = -2$

b) $f'(x) = \begin{cases} 3, x<0 \\ 2x-2\text{sen}\,x, 0\le x\le \pi \\ 2x, x>\pi \end{cases}$

f derivable en x = 0 si 3 = 0 → f no es derivable en x = 0.

f derivable en x = π, f'(π) = 2π.

10

© VICENS VIVES

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 199 a 217

Autovaluación

1. $f'(4) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+h+4} - \sqrt{9+4}}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{9+h+4-9-4}{h\left(\sqrt{9+h+4} + \sqrt{9+4}\right)} =$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{9+h+4} + \sqrt{9+4}} = \dfrac{1}{2\sqrt{13}} = \dfrac{\sqrt{13}}{26}$

2. a) $\dfrac{\ln 3\left(3^x - 3^{-x}\right)}{3^x + 3^{-x}}$

b) $\dfrac{x \cos x^2}{\operatorname{sen} x^2} = x \operatorname{cotg} x^2$

c) $\dfrac{-6\ln(\cos 3x)\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x} = -6 \ln(\cos 3x) \operatorname{tg} 3x$

d) $\dfrac{x(x+2)}{1 + 2x + x^2 + x^4}$

3. a) $(f^{-1})(x) = \dfrac{1+2x}{x-2}$

$(f^{-1})'(x) = \dfrac{-5}{(x-2)^2}$

b) $(f^{-1})(x) = \dfrac{x^3 - 5}{2}$

$(f^{-1})'(x) = \dfrac{3x^2}{2}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{5} \ln\left(\dfrac{e^x \cdot \operatorname{sen} x}{(1+x)^3}\right) =$

$= \dfrac{1}{5}\left[\ln e^x + \ln \operatorname{sen} x - 3\ln(1+x)\right] =$

$= \dfrac{1}{5}\left[x + \ln \operatorname{sen} x - 3\ln(1+x)\right]$

$f'(x) = \dfrac{1}{5}\left[1 + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{3}{x+1}\right]$

5. a) $1 = 3y^2y' - 5y' + 2$

$y' = \dfrac{-1}{3y^2 - 5}$

b) $y' = 2 + xy'e^y + e^y$

$y' = \dfrac{e^y}{1 - xe^y}$

6. a) $f'(x) = (x+1)^{\frac{3}{x}}\left[-\dfrac{3}{x^2} \cdot \ln(x+1) + \dfrac{3}{x} \cdot \dfrac{1}{x+1}\right]$

b) $f'(x) = (x^2+1)^{\cos x}\left[-\operatorname{sen} x \cdot \ln(x^2+1) + \cos x \cdot \dfrac{2x}{x^2+1}\right]$

7. a) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \rightarrow x = -1, x = 0, x = 1$

b) $f'(x) = \dfrac{\left(4 - x^2 - 4x\right)}{\left(4 + x^2\right)^2} = 0 \rightarrow x = -2 + 2\sqrt{2}, x = -2$ $-2\sqrt{2}$

8. a) $f'(x) = -7e^{-7x}$

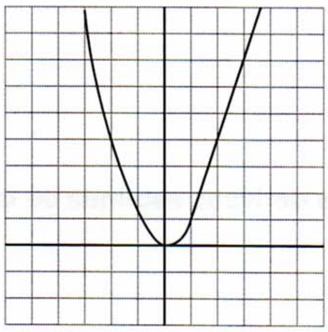
$f''(x) = 49e^{-7x}$

b) $f'(x) = \dfrac{2}{x}$

$f''(x) = \dfrac{-2}{x^2}$

9. Sí, porque $y' = 2e^x - 1$, $y' = 2e^x - 1$.

10. a)



b) Es continua para todo *x* tal y como se observa en la gráfica, sin embargo:

$f'(x) = \begin{cases} 2x, x \le 1 \\ 3, x > 1 \end{cases}$

Y, por lo tanto, $f'(1^-) = 2$, $f'(1^+) = 3$. Es decir, *f* no es derivable en $x = 1$.

10

© VICENS VIVES