SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 220 a 243

Página 220

1. **a)** $y - 4 = 0\,(x + 1)$

$y = 4$

b) $y - 0 = 2\,(x - 3)$

$y = 2x - 6$

c) $y - 1 = 2\,(x - 1)$

$y = -1 + 2x$

d) $y - \ln 5 = \frac{6}{5}(x - 5)\ (x - 1)$

$y = \frac{6}{5}x + \ln 5 - 6$

e) $y - 3 = 0\,(x - 4)$

$y = 3$

f) $y - \sqrt{2} = 0\,(x - \pi / 4)$

$y = \sqrt{2}$

Página 222

2. Recta tangente en $x = 2 \rightarrow y = 6x - 4$

$f(2{,}01) = 8{,}0601$

$y(2{,}01) = 8{,}06$

El error es 0,0001.

3. $A(r) = \pi r^2$

0,05 mm = 0,00005 m

$dA(r) = 2\pi r \cdot h$

$dA(4) = 8\pi \cdot 0{,}00005 = 0{,}0004\pi$

Aumenta $0{,}0004\pi\ m^2 = 4\pi\ cm^2 = 12{,}57\ cm^2$

4. $f(x) = \sqrt[6]{x}$

$f(64) = 2$

$h = 3$

$$df(x) = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$$

$$df(64) = \frac{1}{192} = 0{,}005$$

Como $df(a) \approx f(a + h) - f(a)$:

$f(67) = f(64) + df(64) = 2 + 1 / 192 = 2{,}005$

Nota: el valor real es 2,015

5. **a)** $[2\,(x - 1)\,(x + 1) + (x - 1)^2\,] \cdot dx$

b) $(2x / 9 + 4 / 9)\,dx$

c) $$\frac{\sqrt{2} - 1}{2\left(1 + \sqrt{x}\right)^2 \sqrt{x}}\,dx$$

d) $$\frac{-2x}{3\left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^{2/3}\left(1 + x^2\right)^2}\,dx$$

6. $$f'(x) = \frac{\ln x\left(\ln x + 2\right)}{\ln^2 10}$$

$df(100) = f'(100) \cdot 0{,}1 = 5{,}74 \cdot 0{,}1 = 0{,}574$

Página 224

7. **a)** $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 0 \rightarrow x = 0,\ 3 / 2$

f crece en $(3 / 2, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, 0) \cup (0, 3 / 2)$

b) $f'(x) = 2x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 / 2$

f crece en $(1 / 2, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, 1 / 2)$

c) $\text{Dom } f = (0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{3x - 6}{2\sqrt{x}} = 0 \rightarrow x = 2$$

f crece en $(2, +\infty)$

f decrece en $(0, 2)$

d) $f'(x) = 1 + \cos x = 0 \rightarrow x = \pi$

f crece en $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$

e) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

$f(x) = 2$

$f'(x) = 0$

f es constante en su dominio

f) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

$f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-27)}{(x^2-9)^2} = 0 \to x = 0,\ \pm 3\sqrt{3}$

f crece en $(-\infty, -3\sqrt{3}) \cup (3\sqrt{3}, +\infty)$

f decrece en $(-3\sqrt{3}, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 3) \cup (3, 3\sqrt{3})$

g) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 9\}$

$f'(x) = \dfrac{-x^2-18}{(x^2-7x-18)^2} = 0$ no tiene solución

f decrece en todo su dominio

h) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$f'(x) = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2} = 0 \to x = 0$

f crece en $(0, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$

Página 226

8. a) $f'(x) = 3x^2 - 4 = 0 \to x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

f crece en $(-\infty, -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}) \cup (\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

f decrece en $(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2\sqrt{3}}{3})$

Máximo en $(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \dfrac{16\sqrt{3}}{9})$.

Mínimo en $(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{16\sqrt{3}}{9})$.

b) $f'(x) = 4x^3 - 12x = 0 \to x = 0,\ \pm\sqrt{3}$

f crece en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

Mínimo en $(-\sqrt{3}, -9)$ y $(\sqrt{3}, -9)$.

c) $f'(x) = xe^x + e^x = 0 \to x = -1$

f crece en $(-1, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -1)$

Mínimo en $(-1, -e^{-1})$.

d) $f'(x) = 4x^3e^x + x^4e^x = 0 \to x = -4, 0$

f crece en $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$

f decrece en $(-4, 0)$

Máximo en $(-4, 256e^{-4})$.

Mínimo en $(0, 0)$

e) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \to x = -1, 1$

f crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

f decrece en $(-1, 0) \cup (0, 1)$

Máximo en $(-1, -2)$.

Mínimo en $(1, 2)$

f) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} = 0 \to x = 0$

f crece en $(0, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, 0)$

Mínimo en $(0, 0)$

g) $f'(x) = e^x 2^{-x} - \ln 2 \cdot e^x 2^{-x} = 0$ no tiene solución

f crece en $(-\infty, +\infty)$

h) Dom $f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{2x}{-1+x^2} = 0 \to x = 0$ que no está en el dominio de la función

f crece en $(1, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -1)$

Página 227

9. a) $f'(x) = -3x^2 + 4 = 0 \to x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$f''(x) = -6x$

$f''(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}) = 4\sqrt{3}$

$f''(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}) = -4\sqrt{3}$

11

Mínimo en $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{16\sqrt{3}}{9})$

Máximo en $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{16\sqrt{3}}{9})$

b) $f'(x) = 5x^4 - 10x = 0 \rightarrow x = 0, \sqrt[3]{2}$

$f''(x) = 20x^3 - 10$

$f''(0) = -10$

$f''(\sqrt[3]{2}) = 30$

Máximo en (0, 0)

Mínimo en $(\sqrt[3]{2}, -3\sqrt[3]{4})$

c) Dom f = $(0, +\infty)$

$f'(x) = \frac{x^2 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x^5}} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{4}$

$f''(x) = \frac{-x^2 + 8\sqrt{x}}{4\sqrt{x^7}}$

$f''(\sqrt[3]{4}) = 3 / 8$

Mínimo en $(\sqrt[3]{4}, \frac{3\sqrt[3]{2}}{2})$

d) $f'(x) = \frac{-2xe^{\frac{1}{1+x^2}}}{(1+x^2)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(x) = \frac{2e^{\frac{1}{1+x^2}}(4x^2 + 3x^4 - 1)}{(1+x^2)^4}$

$f''(0) = -2e$

Máximo en (0, e)

e) Dom f = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f'(x) = \frac{-2xe^{\frac{1}{-1+x^2}}}{(-1+x^2)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(x) = \frac{2e^{\frac{1}{-1+x^2}}(3x^4 - 1)}{(-1+x^2)^4}$

$f''(0) = -2e^{-1}$

Máximo en $(0, e^{-1})$

f) $f'(x) = 2^{1-x}x - x^2 2^{-x} \ln 2 = 0 \rightarrow x = 0, x = 2 / \ln 2$

$f''(x) = 2^{1-x} - 4x\, 2^{-x} \ln 2 + x^2 2^{-x} \ln^2 2$

$f''(0) = 2$

$f''(2 / \ln 2) = -0{,}27$

Máximo en (2 / ln 2, 1,13)

Mínimo en (0, 0)

Página 228

10. a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f''(x) = 12x - 6 = 0 \rightarrow x = 1 / 2$

f cóncava en $(1 / 2, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, 1 / 2)$

b) Dom f = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$f'(x) = \frac{2}{(1+x)^2}$

$f''(x) = \frac{-4}{(1+x)^3} = 0$ no tiene solución

f cóncava en $(-\infty, -1)$

f convexa en $(-1, +\infty)$

c) Dom f = $\mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$f''(x) = \frac{2}{x^3} = 0$ no tiene solución

f cóncava en $(0, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, 0)$

d) $f'(x) = \frac{-x^2 + 3}{(x^2 - 2x + 3)^2}$

$f''(x) = \frac{2x^3 - 18x + 12}{(x^2 - 2x + 3)^3} = 0 \rightarrow x = -3{,}29;\ x = 0{,}71;\ x = 2{,}58$

f cóncava en $(-3{,}29; 0{,}71) \cup (2{,}58, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, -3{,}29) \cup (0{,}71; 2{,}58)$

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 229

11. a) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 27$

$f''(x) = 6x - 18 = 0 \rightarrow x = 3$

f cóncava en $(3, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, 3)$

Punto de inflexión en $(3, 27)$

b) $f'(x) = 4x\,(x^2 - 1)$

$f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

f cóncava en $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

f convexa en $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

Punto de inflexión en $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 4/9)$ y $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 4/9)$.

c) $\text{Dom} = (0, +\infty)$

$f'(x) = \ln x + 1$

$f''(x) = 1/x = 0$ no tiene solución

f cóncava en $(0, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, 0)$

No tiene puntos de inflexión.

d) $f'(x) = 2e^x + x^2e^x$

$f''(x) = 4xe^x + 2e^x + x^2e^x = 0 \rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$

f cóncava en $(-\infty, -2-\sqrt{2}) \cup (-2+\sqrt{2}, +\infty)$

f convexa en $(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2})$

Punto de inflexión en $(-2-\sqrt{2}, 0{,}38)$ y $(-2+\sqrt{2}, 0{,}19)$.

e) $f'(x) = 2xe^x + e^x + x^2e^x$

$f''(x) = 4xe^x + 3e^x + x^2e^x = 0 \rightarrow x = -1, -3$

f cóncava en $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$

f convexa en $(-3, -1)$

Punto de inflexión en $(-1, 2e^{-1})$ y $(-3, 10e^{-3})$.

Página 230

12. $x + y = 2 \rightarrow y = 2 - x$

$P(x) = (2 - x)^3\,x$

$P'(x) = -4x^3 + 18x^2 - 24x + 8 = 0 \rightarrow x = 1/2, x = 2$

$P''(x) = -12x^2 + 36x - 34$

$P''(1/2) = -9 \rightarrow$ máximo

$P''(2) = 0$

Los números son:

$x = 1/2$

$y = 2 - 1/2 = 3/2$

13. $400 = \pi r^2 \cdot h$

$h = \frac{400}{\pi r^2}$

$A(h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{400}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{800}{r}$

$A'(h) = -\frac{4\pi r^3 - 800}{r^2} = 0 \rightarrow r = 3{,}99$

$A''(h) = -\frac{4\pi r^3 + 1.600}{r^3}$

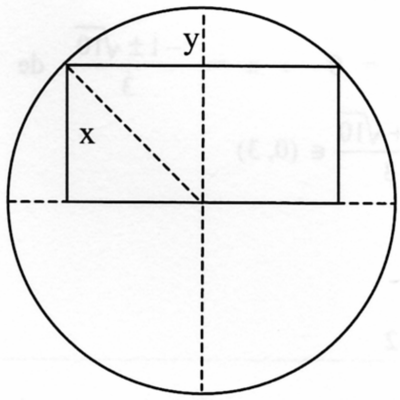
$A''(3{,}99) = 37{,}70 \rightarrow$ mínimo

Por lo tanto:

$r = 3{,}99$ cm

$h = \frac{400}{3{,}99^2\,\pi}400 = 7{,}99$ cm

14. Buscamos x e y.



Si x, y son los lados del rectángulo inscrito en la semicircunferencia, queremos que $P(x, y) = 2x + 2y$ sea máximo.

Por el teorema de Pitágoras:

$x^2 + (y/2)^2 = 100 \rightarrow x = +\sqrt{100 - y^2/4}$

Por lo tanto:

$P(x, y) = P(y) = 2\sqrt{100 - y^2/4} + 2y$

$P'(y) = -\dfrac{x - 2\sqrt{400 - x^2}}{\sqrt{400 - x^2}} = 0 \rightarrow y = 8\sqrt{5}$

$P''(y) = \dfrac{400}{\left(-400 + x^2\right)\sqrt{400 - x^2}}$

$P''(8\sqrt{5}) = -\dfrac{\sqrt{80}}{16} \rightarrow$ Máximo

Por lo tanto, $y = 8\sqrt{5}$ m , $x = 2\sqrt{5}$ m

Página 231

15. a) $f'(x) = 1 - 3x^2$ derivable en todo $\mathbb{R}$

$f(-1) = 0$

$f(0) = 0$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ de los cuales, $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \in (-1, , 0)$

b) $f'(x) = \dfrac{2x - 3 + 3x^2}{\left(1 + x^2\right)^2}$ derivable en todo $\mathbb{R}$

$f(0) = 0$

$f(3) = 0$

$f'(x) = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{10}}{3}$ de los cuales, $\dfrac{-1 + \sqrt{10}}{3} \in (0, 3)$

Página 232

16. Las funciones son polinómicas, por lo tanto, son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$.

a) $3c^2 - 1 = \dfrac{6 + 0}{2 + 1}$

$3c^2 - 1 = 2;$

$c = \pm 1$ de los cuales $1 \in (-1, 2)$

b) $3c^2 - 3 = \dfrac{5 - 3}{0 + 2};$

$3c^2 - 3 = 1;$

$c = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ de los cuales $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \in (-2, 0)$

17. La pendiente de la recta debe ser $\dfrac{9 - 1}{4 - 2} = \dfrac{8}{2} = 4$

$f'(x) = 2(x - 1)$

Buscamos x tal que:

$f'(x) = 4 \rightarrow x = 3$

El punto es (3, 4).

18. $f(x) = \cos x$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$

Por lo tanto, para todo h, existe, al menos un c tal que si $x < c < x + h$:

$f'(c) = \dfrac{f(x + h) - f(x)}{x + h - x};$

$-\text{sen } c = \dfrac{\cos(x + h) - \cos x}{h};$

$\cos(x + h) - \cos x = -h \text{ sen } c$

Página 233

19. $8c = \dfrac{256 - 0}{8 - 0};$

$8c = 32;$

$c = 4$

20. $2(c + 2)(c - 1) + (c + 2)^2 = \dfrac{320 - 50}{6 - 3};$

$3c^2 + 6c = \dfrac{270}{3};$

$3c^2 + 6c - 90 = 0 \rightarrow x = -1 \pm \sqrt{31}$ de los cuales, $-1 + \sqrt{31} \in (3, 6)$

21. La pendiente de la recta tangente debe ser:

$\dfrac{-8 - 0}{4 - 0} = -2$

Buscamos x tal que:

$2x - 6 = -2 \rightarrow x = 2$

El punto de la gráfica es (2, −8).

Página 234

22. a) $0/0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

b) $0/0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen} x}{1} = 0$$

c) $0/0$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-5x+4} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x}{2x-5} = \frac{1}{-3}$$

d) $0/0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\text{sen } x}{\text{tg } x - x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\text{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{\cos x + 1} = $$

$$= \frac{1}{2}$$

Página 235

23. a) ∞/∞

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^{3x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2}{3e^{3x}} \underset{\infty/\infty}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{9e^{3x}} \underset{\infty/\infty}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$\underset{\infty/\infty}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{27e^{3x}} = 0$$

b) ∞/∞, como en el caso anterior, aplicamos la regla hasta que dejemos de obtener la indeterminación.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-6x}{x^2-x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x-6}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{2} = 3$$

c) ∞/∞

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

Página 236

Piensa y contesta

- El segundo es el correcto, en este caso no se puede aplicar la regla de L'Hôpital porque no es una indeterminación.

24. a) $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} \ln^2 x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{e^x} \underset{\infty/\infty}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{e^x} \underset{\infty/\infty}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$\underset{\infty/\infty}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{xe^x} = 0$$

b) $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} \underset{\infty/\infty}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}e^x} = 0$$

c) $\infty \cdot 0$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x \cdot \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} \underset{\infty/\infty}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} \underset{\infty/\infty}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} =$$

$$= +\infty$$

d) $\infty \cdot 0$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{1/x}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x} \underset{0/0}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$\underset{0/0}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{-e^{1/x}/x^2}{-1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{1/x} = 1$$

e) $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x\to\pi/4} (1-\text{tg } x)\sec 2x = \lim_{x\to\pi/4} \frac{1-\text{tg } x}{\cos 2x} \underset{0/0}{\underset{\uparrow}{=}}$$

$$\underset{0/0}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to\pi/4} \frac{-1-\text{tg}^2 x}{-2\text{sen} 2x} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Página 237

25. a) 0^0

$$\lim_{x\to 0} x \ln x \underset{0\cdot\infty}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x} \underset{\infty/\infty}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x^x = e^0 = 1$$

b) ∞^0

11

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln(1+x) \underset{\infty/\infty}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/(x+1)}{1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} (1+x)^{1/x} = e^0 = 1$$

c) ∞^0

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln x \underset{\infty/\infty}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = e^0 = 1$$

d) 1^∞

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \ln(\cos x) \underset{0/0}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} (\cos x)^{1/x} = e^0 = 1$$

e) ∞^0

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{tg} x \ln(1/x) \underset{0\cdot\infty}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1/x)}{1/\operatorname{tg} x} \underset{\infty/\infty}{\overset{\uparrow}{=}}$$

$$\underset{\infty/\infty}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x(1+\operatorname{tg}^2 x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 1 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} (1/x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1$$

Página 240

1. Buscamos x tal que: $f'(x) = g'(x)$

   $3(x-1)^2 = 2x - 2;$

   $3x^2 - 8x + 5 = 0;$

   $x = 5/3,\ x = 1$

2. Sí, por ejemplo, la recta tangente a $f(x) = x^3$ en $x = 0$ es $y = 0$, que atraviesa la gráfica de la función en ese punto.

3. $f'(x) = 3/2 - \cos x > 0$ para todo x por ser $-1 < \cos x < 1$

   Por lo tanto, f es creciente y no tiene máximos ni mínimos.

4. Se debe determinar la magnitud que se desea optimizar y expresarla en forma de función.

   Establecer las condiciones que se deben cumplir.

   Utilizar las condiciones del apartado anterior para expresar la función en una sola variable.

   Buscar máximos y mínimos.

   En este caso:

   $2x + 2y = 24 \rightarrow x = 12 - y$

   La función que queremos optimizar es:

   $A(x, y) = xy$

   $A(y) = (12 - y)\, y$

   $A'(y) = -2y + 12 = 0 \rightarrow x = 6$

   $A''(y) = -2 \rightarrow x = 6$ máximo

   Los lados son 6 cm y 6 cm. Se trata de un cuadrado.

5. Si f es continua en [a, b] y derivable en (a, b) y se cumple $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

   En el caso propuesto, f es una función polinómica y, por lo tanto, continua y derivable para todo x

   Por otra parte, $f(-1) = f(2) = 3$.

   Por lo tanto, f tiene un extremo en (−1, 2).

6. Se puede aplicar, $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ y, por lo tanto, f continua en [0, 8] y derivable en (0, 8).

   $$\frac{2}{3\sqrt[3]{c}} = \frac{4-0}{8-0};$$

   $$\frac{2}{3\sqrt[3]{c}} = \frac{1}{2};$$

   $$c = \frac{64}{27}$$

7. No se puede porque al aplicarla se obtiene un límite de la misma naturaleza.

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{5x+1}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5\sqrt{x+1}}{\sqrt{5x+1}} = \ldots$$

   Para hallar este límite multiplicamos el numerador y el denominador por $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{5x+1}}{\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{5+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\sqrt{5}$$

8. $f'(x) = 2x - 1$

a) $f'(0) = -1 \to 45°$

b) $f'(1/2) = 0 \to 0°$

c) $f'(1) = 1 \to 45°$

9. $f'(x) = \cos x$

$f'(\pi) = -1$

El ángulo es de 45°.

10. $e^x = 1 \to x = 0 \to f$ se corta con $y = 1$ en el punto $(0, 1)$

$f'(x) = e^x$

$f'(0) = 1$

El ángulo es de 45°.

11. $f'(x) = 3x^2 - 3x$

Buscamos x tal que $f'(x) = 0$:

$3x^2 - 3x = 0 \to x = 0, x = 1$

$x = 0 \to (0, 0)$

$x = 1 \to (1, -1/2)$

12. $f'(x) = 5x^4 = 5 \to x = 1, x = -1$

Los puntos son $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.

13. a) $y - 31 = 11(x - 5)$

$y = 11x - 24$

b) $y - 2 = -4(x - 1/2)$

$y = -4x + 4$

c) $y + 3 = -4(x + 6)$

$y = -4x - 27$

d) $y - \sqrt{8} = \frac{3\sqrt{8}}{8}(x - 4)$

$y = \frac{3\sqrt{2}}{4}x - \sqrt{2}$

e) $y - 1 = 3(x - 1)$

$y = 3x - 2$

f) $y - 1 = 2(x - \pi/4)$

$y = 2x - \pi/2 + 1$

14. La recta es $y = -kx + \ln 2$.

$f'(x) = -\frac{1}{(x+2)(x+1)}$

La recta tangente a f en $x = 0$ es: $y = -x/2 + \ln 2$.

Por lo tanto, $k = 1/2$.

15. $f'(x) = 4ax^3 + 6ax^2 - a$

$f''(x) = 12ax^2 + 12ax$

$f''(x) = 0 \to x = 0, x = -1$

Recta tangente en $x = 0$:

$y - 1512 = -ax;$

$y = -ax + 1512$

Recta tangente en $x = -1$:

$y - 1512 = a(x + 1);$

$y = ax + a + 1512$

Son perpendiculares si:

$a \cdot (-a) = -1 \to a = 1, a = -1$

16. a) $(3x^2 + 10x - 3)\,dx$

b) $\frac{-x-8}{x^3}\,dx$

c) $\frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+1}}\,dx$

d) $(1 + tg^2\,x)e^{tg\,x}\,dx$

17. a) $f'(x) = 2x$

$df(3) = 6 \cdot 0{,}1 = 0{,}6$

b) $f'(x) = 3x^2$

$df(4) = 48 \cdot 0{,}01 = 0{,}48$

c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

$df(4) = 0{,}25 \cdot 0{,}001 = 0{,}00025$

18. $S(x) = 6x^2$

$S(10) = 600\ cm^2$

$h = 0{,}3\ cm$

$dS(x) = 12xh$

$dS(10) = 120 \cdot 0{,}3 = 36$

Utilizando la diferencial, se comete un error absoluto de 36 cm^2

El error relativo es de 36 / 600 = 0,06

19. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

$h = 0{,}2$ cm $= 0{,}002$ m

$dV(r) = 4\pi r^2 \cdot h$

$dV(6) = 4\pi \cdot 36 \cdot 0{,}002 = 0{,}288\pi = 0{,}905$ m^3

Varía unos 0,905 m^3

20. a) $f'(x) = 3x^2 - 4x = 0 \rightarrow x = 0, x = 4/3$

f crece en $(-\infty, 0) \cup (4/3, +\infty)$

f decrece en $(0, 4/3)$

Máximo en $(0, 2)$

Mínimo en $(4/3, 22/27)$

b) $f'(x) = 8x^3 - 8x = 0 \rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$

f crece en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Máximo en $(0, 0)$

Mínimo en $(-1, -2), (1, -2)$

c) $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{-1\}$

$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} = 0$ no tiene solución

f crece en $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

d) $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2} = 0$ no tiene solución

f crece en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

f) $\text{Dom} = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}} = 0 \rightarrow$ no tiene solución en el dominio de *f*

f crece en $(2, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -2)$

g) $\text{Dom} = (2, +\infty)$

$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{(x-2)^3}} = 0$ no tiene solución

f decrece en $(2, +\infty)$

Página 241

21. a) $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^2} = 0$ no tiene solución

f decrece en $\mathbb{R} - \{0\}$

b) $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = 0 \rightarrow x = 0, x = -2$

f crece en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

f decrece en $(-2, 0)$

Máximo en $(-2, 4e^{-2})$

Mínimo en $(0, 0)$

c) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = 0 \rightarrow x = 1$

f crece en $(-\infty, 1)$

f decrece en $(1, +\infty)$

Máximo en $(1, e^{-1})$

d) $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} = 0 \rightarrow x = 0$

f crece en $(0, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, 0)$

Mínimo en $(0, 0)$

e) $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = 2x\ln x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{e^{-1}}$

f crece en $(-\sqrt{e^{-1}}, 0) \cup (\sqrt{e^{-1}}, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -\sqrt{e^{-1}}) \cup (0, \sqrt{e^{-1}})$

Mínimo en $(-\sqrt{e^{-1}}, -e^{-1}), (\sqrt{e^{-1}}, -e^{-1})$.

f) $\text{Dom} = (0, +\infty)$

$f'(x) = \frac{-\ln x - 1}{x^2 \ln^2 x} = 0 \rightarrow x = e^{-1}$

f crece en $(0, e^{-1})$

f decrece en $(e^{-1}, 1) \cup (1, +\infty)$

Máximo en $(e^{-1}, -e)$

22. a) $f'(x) = -\text{sen } x = 0 \rightarrow x = k\pi$, *k* entero

f crece en $((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$, *k* entero

f decrece en $(2k\pi, (2k+1)\pi)$, *k* entero

Máximo en $(2k\pi, 1)$, *k* entero

Mínimo en $((2k+1)\pi, -1)$, *k* entero

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{(2k+1)\pi / 2, \text{k entero}\}$

$f'(x) = \sec(x) \text{ tg}(x) = 0 \rightarrow x = k\pi$, *k* entero

f crece en $(k\pi, (2k+1)\pi/2) \cup ((2k+1)\pi/2, (k+1)\pi)$, *k* par

f decrece en $((k\pi, (2k+1)\pi/2) \cup ((2k+1)\pi/2, (k+1)\pi)$, *k* impar

Máximo en $((2k+1)\pi, -1)$, *k* entero

Mínimo en $(2k\pi, 1)$, *k* entero

c) $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x, & x \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ -\text{sen } x, & x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi] \end{cases}$,

k entero

$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \\ -\cos x, & x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi] \end{cases} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow x = (2k+1)\pi/2$, *k* entero

f crece en $(k\pi, (2k+1)\pi/2)$, *k* entero

f decrece en $((2k+1)\pi/2, (k+1)\pi,)$, *k* entero

Máximo en $((2k+1)\pi/2, 1)$, *k* entero

Mínimo en $(k\pi, 0)$, *k* entero

d) Dom $f = \mathbb{R} - \{(2k+1)\pi/2, \text{k entero}\}$

$f'(x) = 1 + \text{tg}^2 x = 0$ no tiene solución

f crece en todo su dominio

e) Dom $f = \mathbb{R} - \{k\pi, \text{k entero}\}$

$f'(x) = -\text{cosec}(x) \text{ cotg}(x) = 0 \rightarrow x = (2k+1)\pi/2$, *k* entero

f crece en $((4k+1)\pi/2, (2k+1)\pi) \cup ((2k+1)\pi, (4k+3)\pi/2)$, *k* entero

f decrece en $((4k-1)\pi/2, 2k\pi) \cup (2k\pi, (4k+1)\pi/2)$, *k* entero

Máximo en $((4k-1)\pi/2, -1)$, *k* entero

Mínimo en $((4k+1)\pi/2, 1)$, *k* entero

f) $f'(x) = 2\cos 2x = 0 \rightarrow x = (4k+1)\pi/4$, *k* entero

f crece en $((2k+1)\pi/4, (2k+1)\pi/4 + \pi/2)$, *k* impar

f decrece en $((2k+1)\pi/4, (2k+1)\pi/4 + \pi/2)$, *k* par

Máximo en $((2k+1)\pi/4, 1)$, *k* par

Mínimo en $((2k+1)\pi/4, -1)$, *k* impar

23. a) $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

Se cumple $f'(0) = 0 \rightarrow c = 0$

b) $f'(-2) = -32 + 12a - 4b = 0$

$f(1) = 0 \rightarrow 1 + a + b + 7 = 0$

Se obtiene un sistema cuya solución es:

$a = 0, b = -8$

c) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$

$f'(x) = 4x^3 - 16x = 0 \rightarrow x = 0, x = 2, x = -2$

f crece en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

24. a) $f'(x) = 6 - 3x^2$

$f''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$

f cóncava en $(-\infty, 0)$

f convexa en $(0, +\infty)$

Punto de inflexión $(0, 0)$

b) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$

f cóncava en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

f convexa en $(0, 2)$

Punto de inflexión $(0, -12), (2, -28)$

c) Dom $= \mathbb{R} - \{1, 2\}$

$f'(x) = \dfrac{-2x+3}{(x^2-3x+2)^2}$

$f''(x) = \dfrac{6x^2-18x+14}{(x^2-3x+2)^3} = 0 \rightarrow$ no tiene solución

f cóncava en $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

f convexa en $(1, 2)$

d) Dom = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$f'(x) = \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = 0 \rightarrow x = 0$

f cóncava en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Punto de inflexión en $(0, 0)$

25. a) $f'(x) = -e^{-x}(x-1) + e^{-x}$

$f''(x) = -3e^{-x} + xe^{-x} = 0 \rightarrow x = 3$

f cóncava en $(3, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, 3)$

Punto de inflexión $(3, 2e^{-3})$

b) $f'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$

$f''(x) = 6x\,e^{x^2} + 4x^3e^{x^2} = 0 \rightarrow x = 0$

f cóncava en $(0, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, 0)$

Punto de inflexión $(0, 0)$

c) $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+3}$

$f''(x) = \dfrac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

f cóncava en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

f convexa en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Punto de inflexión $(-\sqrt{3}, \ln 6)$, $(\sqrt{3}, \ln 6)$

d) $\mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = \dfrac{2-2\ln x^2}{x^3}$

$f''x) = \dfrac{-10+6\ln x^2}{x^4} = 0 \rightarrow x = -e^{5/6}, x = e^{5/6}$

f cóncava en $(-\infty, -e^{5/6}) \cup (e^{5/6}, +\infty)$

f convexa en $(-e^{5/6}, 0) \cup (0, e^{5/6})$

Punto de inflexión $(-e^{5/6}, \dfrac{5}{3e^{5/3}})$, $(e^{5/6}, \dfrac{5}{3e^{5/3}})$

26. a) $f'(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x + \cos x = 0 \rightarrow x = \pi/4, x = 5\pi/4$

f cóncava en $(0, \pi/4) \cup (5\pi/4, 2\pi)$

f convexa en $(\pi/4, 5\pi/4)$

Punto de inflexión $(\pi/4, 0)$, $(5\pi/4, 0)$

b) $f'(x) = 4\cos^2 x - 2 - 2\operatorname{sen} x$

$f''(x) = -8\cos x \operatorname{sen} x - 2\cos x = 0 \rightarrow x = \pi/2$, $x = 3\pi/2$, $x = 6{,}03$, $x = 3{,}39$

f cóncava en $(\pi/2, 3{,}39) \cup (3\pi/2, 6{,}03)$

f convexa en $(0, \pi/2) \cup (3{,}39, 3\pi/2)$

Punto de inflexión en $(\pi/2, 0)$, $(3\pi/2, 0)$, $(3{,}3$. $-1{,}46)$, $(6{,}03, 1{,}45)$

27. $C'(t) = 0{,}3 + 0{,}08t - 0{,}0012t^2 = 0 \rightarrow t = -3{,}56$, $t = 70{,}23$

La solución negativa no nos sirve.

$C''(t) = 0{,}08 - 0{,}0024t$

$C''(70{,}23) = -0{,}089 \rightarrow$ máximo

Se alcanza la máxima concentración en el minuto 70,23.

28. $f'(x) = \dfrac{-4x+48}{(x+12)^3} = 0 \rightarrow x = 12$

$f''(x) = \dfrac{8(x-24)}{(x+12)^4} =$

$f''(12) = \dfrac{-1}{3456} \rightarrow$ máximo f(12) = 1 / 12

La potencia máxima es de 1 / 12 vatios y se alcanza cuando la resistencia es de 12 ohmios.

29. $C'(x) = \frac{x}{30} - \frac{450}{x^2} = 0 \rightarrow x = 23{,}81$

$C''(x) = \frac{1}{30} + \frac{900}{x^3}$

$C''(23{,}81) = 0{,}1 \rightarrow$ mínimo

La velocidad más económica es de 23,81 nudos / hora, y a esta velocidad el consumo es C(23,81) = 28,35.

30. x + y = 81

P(x) = x (81 – x)

$P'(x) = 81 - 2x = 0 \rightarrow x = 81 / 2$

$P''(x) = -2 \rightarrow$ máximo

Los números son:

x = 81 / 2

y = 81 / 2

31. *x*: amplitud del rectángulo, lados del triángulo.

y: altura del rectángulo

$3x + 2y = 11 \rightarrow y = \frac{11 - 3x}{2}$

Por otra parte:

$A(x, y) = A_{\text{rectángulo}}(x, y) + A_{\text{triángulo}}(x, y) =$

$$= xy + \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2}}{2} = x\left(\frac{11-3x}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} = A(x)$$

$A'(x) = \frac{11}{2} - 3x + \frac{\sqrt{3}x}{2} = 0 \rightarrow x = 2{,}58$

$A''(x) = -3 + \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$ máximo

Las dimensiones son:

x = 2,58 m   y = 1,63 m

32. *x*: cantidad de hilo dedicada al cuadrado → el lado del cuadrado mide x / 4

y: cantidad de hilo dedicada al rectángulo → las dimensiones del rectángulo son y / 3, y / 6.

$x + y = 34 \rightarrow x = 34 - y$

$$A(x, y) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{y}{3} \cdot \frac{y}{6} = \frac{(34-y)^2}{16} + \frac{y^2}{18} = A(y)$$

$A'(y) = -\frac{17}{4} + \frac{17x}{72} = 0 \rightarrow y = 18$

$A''(y) = \frac{17}{72} \rightarrow$ mínimo

Las longitudes de los trozos de hilo son:

y = 18 m

x = 16 m

33. Análoga a la *Actividad 31*, en este caso:

$3x + 2y = 100 \rightarrow y = \frac{100 - 3x}{2}$

$A(x) = x\left(\frac{100-3x}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$

El máximo se alcanza en x = 23,43 m, y = 14,86 m.

34. *x*: lados iguales

y: lado desigual

$2x + y = 80 \rightarrow y = 80 - 2x$

$$A(x) = \frac{(80-2x) \cdot \sqrt{x^2 - \left(\frac{80-2x}{2}\right)^2}}{2} =$$

$= 2\,(80 - 2x)\,\sqrt{5x - 100}$

$A'(x) = \frac{-10(-80+3x)}{\sqrt{5x-100}} = 0 \rightarrow x = 80 / 3$

$A''(x) = \frac{-5(-40+3x)}{(-20+x)\sqrt{-100+5x}}$

$A''(80 / 3) = -5{,}20 \rightarrow$ máximo

Los lados iguales del triángulo miden 80 / 3 cm mientras que el desigual mide 80 / 3 cm, por lo tanto, se trata de un triángulo equilátero.

35. $3x + 3y = 60 \rightarrow x = 20 - y$

$$S(y) = \frac{(20-y) \cdot \sqrt{(20-y)^2 - \left(\frac{20-y}{2}\right)^2}}{2} + \frac{y \cdot \sqrt{y^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}(20-y)^2}{4} + \frac{\sqrt{3} \cdot y^2}{4}$$

11

$$S'(y) = \frac{-\sqrt{3}(20-y)}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot y}{2} = 0 \rightarrow y = 10$$

$S''(y) = \sqrt{3} = 0 \rightarrow$ mínimo

Por lo tanto:

$x = y = 10$ cm

Página 242

36. *x, y*: lados de los cuadrados

$4x + 4y = 100 \rightarrow x = 25 - y$

$P(y) = 2y^2 + 3\,(25 - y)^2$

$P'(y) = 10y - 150 = 0 \rightarrow y = 15$

$P''(y) = 10 \rightarrow$ mínimo

Las longitudes de los lados de los cuadrados son:

$x = 10$ cm

$y = 15$ cm

37. Si x,y son las dimensiones del rectángulo:

$xy = 1 \rightarrow y = 1 / x$

$S(x) = x + 2\,(1 / x)$

$S'(x) = 1 - 2 / x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ la solución negativa no nos sirve $\rightarrow x = \sqrt{2}$

$S''(x) = 4 / x^3$

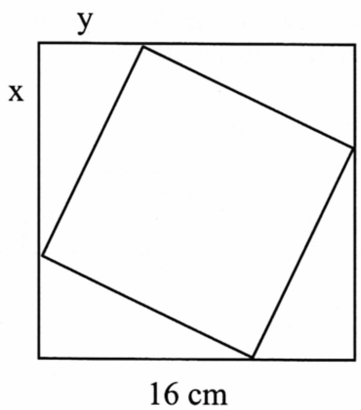
$S''(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \rightarrow$ mínimo

Las medidas de los lados del rectángulo son:

$x = \sqrt{2}$ m

$y = \sqrt{2}\ / 2$ m

38. Consideramos el siguiente esquema:



Buscamos x e $y = 16 - x$ tal que el área del triángulo rectángulo de catetos x, y sea máxima.

$A(x) = x\,(16 - x)$

$A'(x) = 16 - 2x = 0 \rightarrow x = 8$

$A''(x) = -2 \rightarrow$ máximo

Por lo tanto:

$x = y = 8$ cm

La longitud del lado del cuadrado que buscamos es:

$l = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$ cm

39. Sean *x, y* las dimensiones de la parte del papel que ocupa el texto.

$xy = 18 \rightarrow y = 18 / x$

Las dimensiones totales de la hoja son:

$x + 2$

$y + 4 = 18 / x + 4$

Por tanto:

$A(x) = (x + 2)\,(18 / x + 4)$

$A'(x) = \dfrac{4x^2 - 36}{x^2} = 0 \rightarrow x = 3,\ x = -3$, la solución negativa no nos sirve.

$$A''(x) = \frac{72}{x^3}$$

$A''(3) = 8 / 3 \rightarrow$ mínimo

Las dimensiones de la parte escrita deben ser 3 cm y 6 cm y, por lo tanto, las dimensiones totales del papel serán 5 cm y 10 cm.

40. Si *h* es la altura del trapecio y *x* el cateto que falta del triángulo rectángulo que tiene como hipotenusa el lado oblicuo:

$x^2 + h^2 = 400^2 \rightarrow x = \sqrt{160.000 - h^2}$

El área del trapecio viene dada por la expresión:

$$A(x) = \frac{h\sqrt{160.000 - h^2}}{2} + 200h$$

$$A'(x) = \frac{80.000 - h^2 + 200\sqrt{160.000 - h^2}}{\sqrt{160.000 - h^2}} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow h = \pm\ 200\sqrt{3}$, la negativa no nos sirve

$$A''(x) = \frac{-h\left(-240000 + h^2\right)}{\left(-160.000 + h^2\right)\sqrt{160.000 - h^2}}$$

$A''(200\sqrt{3}) = -\dfrac{3\sqrt{120.000}}{200} \rightarrow$ máximo

Por lo tanto, $h = 200\sqrt{3}$ cm

Como el triángulo es rectángulo:

$\text{sen } \alpha = 200\sqrt{3} / 400 = \sqrt{3} / 2 \rightarrow \alpha = 60°$

El área máxima es:

$A(200\sqrt{3}) = 103.923{,}05 \text{ cm}^2$

41. Sea *a* la medida del lado de la base y *b* la altura del prisma:

Volumen $\rightarrow a^2b = 768 \rightarrow ab = 768 / a$

Pérdida de calor por las paredes $\rightarrow 400ab$

Pérdida de calor por el techo $\rightarrow 300a^2$

La función que hay que minimizar es:

$C(a, b) = 400ab + 300a^2 = 400 \cdot 768 / a + 300a^2 =$
$= 307.200 / a + 300a^2 = C(a)$

$C'(a) = -307.200 / a^2 + 600a = 0 \rightarrow a = 8$

$C''(a) = 614.400 / a^3 + 600$

$C''(8) = 1.800 \rightarrow$ mínimo

Las dimensiones deben ser:

$a = 8$ m

$ab = 768 / 8 = 96 \rightarrow b = 12$ m

42. Sea *x* la medida del lado del fondo e *y* la profundidad:

$x^2y = 32 \rightarrow y = 32 / x^2$

$S(x, y) = x^2 + 4xy = x^2 + 128 / x = S(x)$

$S'(x) = 2x - 128 / x^2 = 0 \rightarrow x = 4$

$S''(x) = 2 + 256 / x^3$

$S''(4) = 6 \rightarrow$ mínimo

Las dimensiones de la piscina son:

Fondo cuadrado de lado 4 m.

Profundidad de 32 / 16 = 2 m.

43. Los tres trozos serán de longitud x, 2x, y:

$x + 2x + y = 140 \rightarrow y = 140 - 3x$

$A(x) = (x / 4)^2 + (x / 2)^2 + [(140 - 3x) / 4]^2$

$A'(x) = 7x / 4 - 105 / 2 = 0 \rightarrow x = 30$

$A''(x) = 7 / 4 \rightarrow$ mínimo

Los trozos son de longitud:

30 m

60 m

$140 - 90 = 50$ m

44. Buscamos *x* tal que:

$g(x) = f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$

es máxima.

Para ello, volvemos a derivar:

$g'(x) = f''(x) = \dfrac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3} / 3$

Por lo tanto, *g* = *f'* tiene dos extremos relativos. Comprobamos ahora si son máximo o mínimo.

$g''(x) = f'''(x) = \dfrac{-24x(x^2-1)}{(x^2+1)^4}$

$g''(-\sqrt{3}/3) = -27\sqrt{3} / 16 \rightarrow$ máximo

$g''(\sqrt{3}/3) = 27\sqrt{3} / 16 \rightarrow$ mínimo

El punto de la curva que tiene pendiente máxima es:

$(-\sqrt{3}/3 , 3 / 4)$

La recta tangente es:

$y - \dfrac{3}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\left(x + \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

45. a) *f* continua y derivable para todo valor de *x*.

$f(-3) = -3$

$f(-2) = 4$

No se cumplen las condiciones del teorema.

b) *f* continua y derivable para todo valor de *x*.

$f(0) = 1$

$f(2\pi) = 1$

Se cumplen las condiciones del teorema de Rolle.

$f'(x) = -\text{sen } x = 0$

Por lo tanto, $c = \pi$

c) *f* continua en $(-\pi, 0)$

$f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{1 + \text{sen } x}}$

Por lo tanto, como $\text{sen } (-\pi / 2) = -1$, el denominador de la función se anula $\rightarrow$ *f* no es derivable en $(-\pi, 0)$.

No se cumplen las condiciones del teorema.

11

46. a) Polinómica → continua y derivable para todo valor de *x*.

$$3\,(c-2)^2=\frac{1+8}{3-0}=3\;\rightarrow c=1,\,c=3$$

El valor que buscamos es c = 1.

b) 1 + 2x > 0 en (3 / 2, 4) → *f* continua y derivable en el intervalo

$$\frac{1}{\sqrt{1+2c}}=\frac{3-2}{4-3/2}=\frac{2}{5}=\rightarrow c=21/8$$

47. Por el teorema del valor medio, existe $c \in (0, 1)$:

$$\cos(\operatorname{sen} c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0};$$

$$\cos(\operatorname{sen} c)=f(1)-1;$$

$$f(1)=1+\cos(\operatorname{sen} c);$$

Por lo tanto:

f(1) = 2 si cos (sen c) = 1, es decir, si sen c = 0, imposible en (0, 1).

48. $$f'(x)=2\sec^2 x\,\operatorname{tg} x-2\operatorname{tg} x\,(1+\operatorname{tg}^2 x)=\frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}-$$

$$-\frac{2\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}=0$$

Por lo tanto, *f* es constante en cualquier intervalo real.

49. Todas las indeterminaciones son 0 / 0.

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}-\operatorname{sen} x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{\cos^3 x+1}{\cos^2 x}}{2}=-1$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-3\operatorname{sen} 3x}{\cos 3x}}{\dfrac{-2\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-3\operatorname{sen} 3x\cos 2x}{-2\operatorname{sen} 2x\cos 3x}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{\cos 3x}=$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3\cos 3x}{2\cos 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{\cos 3x}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{9}{4}$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\operatorname{sen} x}{2\operatorname{sen} x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\cos x}{2\cos^2 x-2\operatorname{sen}^2 x}=$$

$$=\frac{2}{2}=1$$

d) $$\lim_{x\to 0}\frac{2\left(e^{2x}-e^{-2x}\right)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}+4e^{-2x}}{2}=\frac{8}{2}=4$$

e) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x+x\cos x}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-x\operatorname{sen} x}{\cos x}=$$

$$=\frac{2}{1}=2$$

f) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{1+\operatorname{tg}^2 x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{2\operatorname{tg} x\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2+8\operatorname{tg}^2 x+6\operatorname{tg}^4 x}=\frac{-1}{2}$$

50. a) $\infty\cdot 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{arctg}(e^x)-\dfrac{\pi}{2}}{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{e^x}{e^{2x}+1}}{-1/x^2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x^2e^x}{e^{2x}+1}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{2xe^x+x^2e^x}{2e^{2x}}=$$

$$=-\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+x^2}{2e^x}=0$$

b) $\infty-\infty$

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, no hace falta aplica la regla de l'Hôpital.

c) 1^∞

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{x}\ln\frac{x^2+2}{2-2\operatorname{sen} x}\right)=2\lim_{x\to 0}\frac{\ln\dfrac{x^2+2}{2-2\operatorname{sen} x}}{x}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2\operatorname{sen} x+x^2+2x\cos x+2\operatorname{sen} x+2}{\cos x\left(x^2+2\right)}}{1}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{1}=2$$

El límite del enunciado es e^2.

d) $\infty-\infty$

$$\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}=\frac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-x\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{-\ln x}{\frac{x\ln x+x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-x\ln x}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-\ln x-1}{\ln x+2}=\frac{-1}{2}$$

e) ∞^0

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x\ \ln(\text{tg } x))=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\text{tg } x)}{\frac{1}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1+\text{tg}^2 x}{\text{tg } x}}{\frac{\text{sen } x}{\cos^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\text{tg } x)}{\frac{1}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1+\text{tg}^2 x}{\text{tg } x}}{\frac{\text{sen } x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\text{sen}^2 x}=\frac{0}{1}=$$

$$=0$$

El límite del enunciado es $e^0 = 1$.

f) 1^∞

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\ \ln\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-6}{(3x+1)(3x-1)}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2}{9x^2-1}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}=$$

El límite del enunciado es $e^{2/3}$.

g) 1^∞

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\text{sen}^2 x}\ln(\cos 2x)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 2x)}{\text{sen}^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2\text{sen}2x}{\cos 2x}}{2\text{sen } x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\text{sen}2x}{2\text{sen } x\cos x\cdot\cos 2x}=$$

$$=\frac{-2}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}2x}{\text{sen } x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x\cdot\cos 2x}=$$

$$=-1\cdot 2\cdot 1=-2$$

El límite del enunciado es e^{-2}.

h) $\infty-\infty$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\text{sen } x}=\frac{\text{sen } x-x}{x\text{sen } x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen } x-x}{x\text{sen } x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x-1}{\text{sen } x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\text{sen } x}{2\cos x-x\text{sen } x}=\frac{0}{2}=0$$

i) 0^0

$$\lim_{x\to 0}(\text{tg } x\ \ln(x))=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{\text{tg } x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1-\text{tg}^2 x}{\text{tg}^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\text{tg}^2 x}{-x-x\text{tg}^2 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\text{tg}x\left(1+\text{tg}^2 x\right)}{-1-\text{tg}^2 x-2x\text{tg}x-2x\text{tg}^3 x}=\frac{0}{-1}=0$$

El límite del enunciado es $e^0 = 1$.

j) $\infty\cdot 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{1/x}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{e^{1/x}}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}e^{1/x}=1$$

51. $0/0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2mx-\text{sen}x}{2x\cos^2 x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2m-\cos x}{-4\text{sen}x^2+2\cos x^2}=$$

$$\frac{2m-1}{2}$$

El límite se anula si $m = 1/2$.

Página 243

52.a) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Buscamos *a* y *b* tal que:

$f'(2) = 0 \rightarrow 12 + 4a + b = 0$

$f'(4) = 12 + 4a + b =$

11

Se obtiene:

$a = -9,\ b = 24$

b) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$f''(x) = 6x - 18 = 0 \rightarrow x = 3$

Buscamos *c* tal que:

$f(3) = 0$

$18 + c = 0$

$c = -18$

53. $f(0) = 0 \rightarrow b = 0$

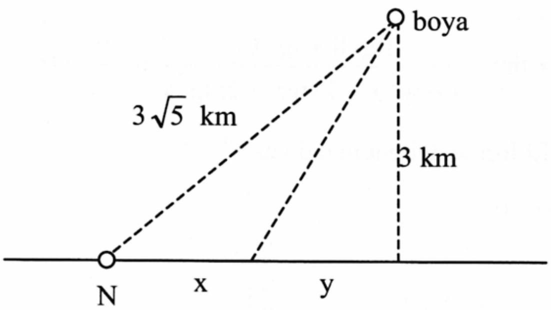
$f'(x) = a + \cos x$

$f'(0) = 0;$

$a + 1 = 0 \rightarrow a = -1$

54. *Espacio que camina* $\rightarrow x$

Espacio que nada $\rightarrow \sqrt{9 + y^2}$



Por otra parte:

$x + y = \sqrt{45 - 9} = \sqrt{36} = 6 \rightarrow y = 6 - x$

$v = e / t \rightarrow t = e / v$

El tiempo que emplea en el recorrido es:

$$T(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{9 + (6 - x)^2}}{3}$$

$$T'(x) = \frac{1}{5} + \frac{(-12 + 2x)}{6\sqrt{9 + (6 - x)^2}} = 0 \rightarrow x = 15/4$$

$$T''(x) = \frac{3}{\sqrt{\left(9 + (6 - x)^2\right)^3}} > 0 \rightarrow \text{mínimo}$$

Deberá caminar por la orilla $\frac{15/4}{5} = \frac{3}{4}$ de hora = 45 minutos.

55.a) $A(t) = \pi\,(1{,}8t)^2 = 3{,}24\pi t^2$

Donde *t* es el tiempo expresado en minutos y A(t) es el área quemada expresada en m^2.

b) $A'(t) = 6{,}28\pi t$

$A'(45) = 282{,}60\pi$

El área quemada crece $282{,}60\pi\ m^2$ / min

56.a) B(20, 5)

Sea D(x, y):

x verifica, por semejanza de triángulos:

$$\frac{x}{5 - a/2} = \frac{20}{5} \rightarrow x = 20 - 2a$$

$y = 5 + a/2$

Por lo tanto, D (20 – 2a, 5 + a / 2)

b) $A(a) = a\,(20 - 2a)$

$A'(a) = 20 - 4a = 0 \rightarrow a = 5$

$A''(a) = -4 \rightarrow$ máximo

Por lo tanto, si *a* = 5 cm, el área del rectángulo es máxima.

Autoevaluación

1. a) $y = x$

b) $y = x - 2$

2. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

$f''(x) = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$, punto de inflexión

La ecuación tangente en este punto es:

$y - 8 = 2\,(x - 1);$

$y = 2x + 6$

3. a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x = 1,\ x = 3$

$f''(x) = 6x - 12$

$f''(1) = -12$

$f''(3) = 24$

f crece en $(-\infty, 1)\ (3, +\infty)$

f decrece en (1, 3)

máximo en (1, 9)

máximo en (3, 5)

b) $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{-4\}$

$$f'(x) = \frac{5}{(x + 4)^2} > 0 \text{ para todo } x$$

11

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

f crece en $(-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$

4. a) $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$

$f''(x) = 12x^2 - 12x = 0 \rightarrow x = 0, x = 1$

f cóncava en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

f convexa en $(0, 1)$

Punto de inflexión en $(0, 0), (1, -1)$

b) $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{\pm\sqrt{3}\}$

$$f'(x) = \frac{-x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3} = 0 \rightarrow x = 0$$

f cóncava en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

f convexa en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Punto de inflexión en $(0, 0)$

5. Sean x, y los catetos del triángulo:

$x + y = 16 \rightarrow x = 16 - y$

$A(y) = y\,(16 - y) / 2$

$A'(y) = 8 - y = 0 \rightarrow y = 8$

$A''(y) = -1 \rightarrow$ máximo

El área máxima se alcanza cuando los lados son de 8 cm y vale 32 cm^2.

6. $x + y = 100 \rightarrow y = 100 - x$

$S(x) = x^2 + (100 - x)^2$

$S'(x) = 4x - 200 = 0 \rightarrow x = 50$

$S''(x) = 4 \rightarrow$ mínimo

Los números 50 y 50.

7. La función es polinómica, por lo tanto, es continua y derivable para todo valor de x.

$f(0) = f(1) = 0$

Se cumplen las condiciones del teorema.

$$f'(x) = -4x^3 + 2x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto, $c = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

8. La función es continua y derivable para todo x.

El punto c verifica:

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{1-0}{\pi - 0} = \frac{1}{\pi}$$

$$\cos\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \rightarrow \frac{c}{2} = 0{,}88 \rightarrow c = 1{,}76$$

9. a) $0 / 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\text{sen}\,x + 2x\cos x}{\text{sen}\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{4\cos x - 2x\,\text{sen}\,x}{\cos x} = 4$$

b) ∞ / ∞

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

10. a) $\infty - \infty$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\text{arctg}\,x} = \frac{\text{arctg}\,x - x}{x\,\text{arctg}\,x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\text{arctg}\,x - x}{x\,\text{arctg}\,x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{x^2}{1+x^2}}{\dfrac{x + \arctan x + x^2\arctan x}{1+x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x + \arctan x + x^2\arctan x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{2 + 2x\arctan x} = 0$$

b) 0^0

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\frac{1}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{1}{2x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

El límite que buscamos es $e^0 = 1$.

c) $0 \cdot \infty$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{\dfrac{1}{\text{tg}\,\frac{\pi x}{2}}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{2x}{\dfrac{-\pi\left(1+\text{tg}^2\,\frac{\pi x}{2}\right)}{2\left(\text{tg}^2\,\frac{\pi x}{2}\right)}} = \frac{2}{\frac{-\pi}{2}} = \frac{-4}{\pi}$$

d) $0 \cdot \infty$

11

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}}{-\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1}\cdot(-1) = -1$$

El límite que buscamos es e^{-1}.

e) $\infty \cdot 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x(x+1)}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$$

f) ∞^0

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \ln \cot g\, x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cot g\, x)}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1+\cot g^2 x}{\cot g\, x}}{\frac{\cos x}{-1+\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = 0$$

El límite que buscamos vale $e^0 = 1$.

11