SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 246

1. **a)** $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R} - \{0, 1\}$

c) $(-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$

d) $\mathbb{R} - \{0\}$

2. **a)** $f(-x) = (-x)^3 - 4(-x) + 2 = -x^3 + 4x + 2$

No tiene simetrías.

b) $f(-x) = \dfrac{3(-x)^2 - 4}{(-x)^3 - (-x)^2} = \dfrac{3x^2 - 4}{-x^3 - x^2}$

No tiene simetrías.

c) $f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 3(-x)} = \sqrt{x^2 + 3x}$

No tiene simetrías.

d) $f(-x) = \ln(-x)^2 = \ln x^2$

Es par.

3. **a)** Asíntotas verticales $\rightarrow x = -1, x = 1$

Asíntotas horizontales $\rightarrow y = 0$

b) Asíntotas verticales $\rightarrow x = -1, x = 1$

Asíntotas horizontales $\rightarrow y = 1$

c) Asíntotas verticales $\rightarrow x = -1, x = 1$

Asíntotas oblicua $\rightarrow y = 2x$

4. **a)** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Página 248

Piensa y contesta

- $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(0) = -5 \rightarrow d = -5$

$f(-1) = 0 \rightarrow -a + b - c - 5 = 0$

$f(1) = -2 \rightarrow a + b + c - 5 = -2$

$f(2) = -1 \rightarrow 8a + 4b + 2c - 5 = -1$

Por lo tanto:

$a = -5/3,\ b = 4,\ c = 2/3$

El polinomio es:

$$f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + 4x^2 + \frac{2x}{3} - 5$$

5. **a)** Dom $= \mathbb{R}$

Im $= \mathbb{R}$

Cortes con OX $\rightarrow (0, 0)$

Corte con OY $\rightarrow (0, 0)$

		0	
Signo	−	0	+

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1 > 0$ para todo x

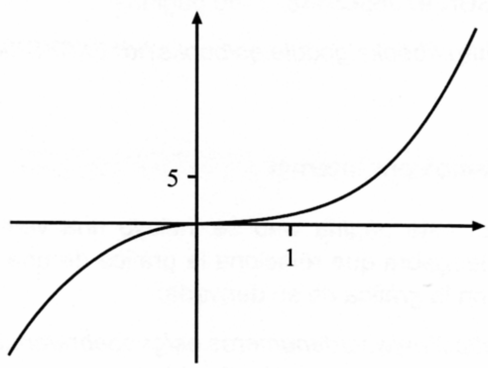
f crece en todo el dominio

$f''(x) = 6x - 2 = 0 \rightarrow x = 1/3$

f cóncava en $(1/3, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, 1/3)$

Punto de inflexión en $(1/3, 7/27)$



b) Dom $= \mathbb{R}$

Im $= [-27/256, +\infty)$

Cortes con OX $\rightarrow (0, 0), (1, 0)$

Corte con OY $\rightarrow (0, 0)$

		0		1	
Signo	+	0	–	0	+

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 4x^3 - 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0, x = 3/4$

f crece en $(3/4, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, 0) \cup (0, 3/4)$

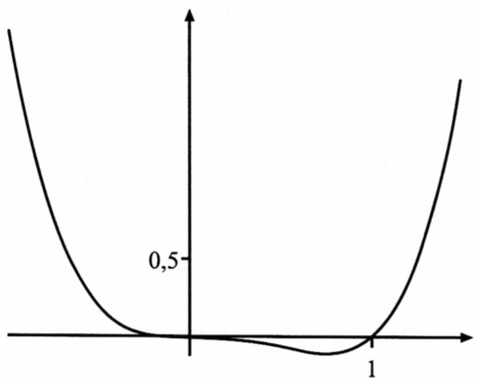
Mínimo en $(3/4, -27/256)$

$f''(x) = 12x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0, x = 1/2$

f cóncava en $(-\infty, 0) \cup (1/2, +\infty)$

f convexa en $(0, 1/2)$

Puntos de inflexión en $(0, 0)$, $(1/2, -1/16)$



c) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $[-16, +\infty)$

Cortes con OX $\rightarrow$ $(3, 0)$, $(-5, 0)$

Corte con OY $\rightarrow$ $(0, -15)$

		–5		3	
Signo	+	0	–	0	+

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

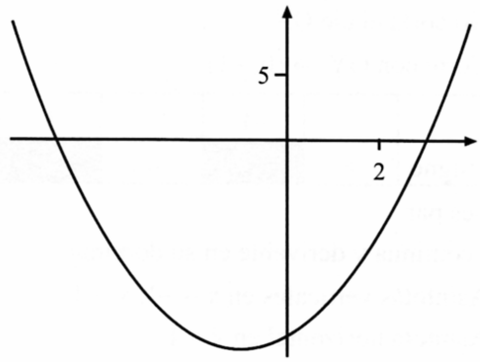
f crece en $(-1, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -1)$

Mínimo en $(-1, -16)$

$f''(x) = 2$

f cóncava en para todo x



d) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $\mathbb{R}$

Cortes con OX $\rightarrow$ $(-2, 0)$, $(2, 0)$

Corte con OY $\rightarrow$ $(0, 8)$

		–2		2	
Signo	–	0	+	0	–

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 = 0 \rightarrow x = 2, x = -2/3$

f crece en $(-\infty, -2/3) \cup (2, +\infty)$

f decrece en $(-2/3, 2)$

Máximo en $(-2/3, 256/27)$

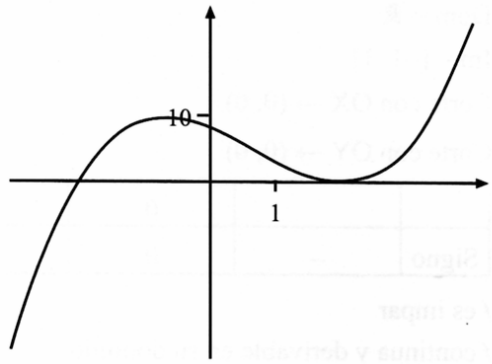
Mínimo en $(2, 0)$

$f''(x) = 6x - 4 = 0 \rightarrow x = 2/3$

f cóncava en $(2/3, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, 2/3)$

Punto de inflexión en $(2/3, 128/27)$



Página 251

6. a) Dom = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Im = $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

No corta el eje OX

Corte con OY $\rightarrow$ (0, −1)

		−1		1	
Signo	+		−		+

f es par

f continua y derivable en su dominio

Asíntotas verticales en x = −1, x = 1.

Asíntota horizontal en y = 1

$$f'(x) = \frac{-4x}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

f crece en (−∞, −1) ∪ (−1, 0)

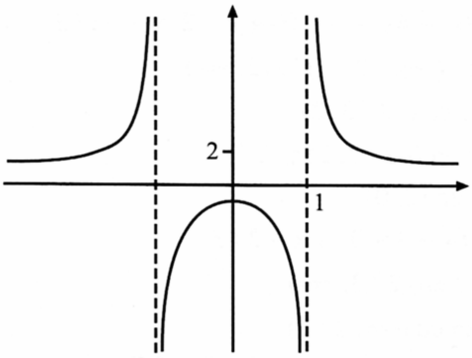
f decrece en (0, 1) ∪ (1, +∞)

Máximo en (0, −1)

$$f''(x) = \frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} = 0 \text{ No tiene solución}$$

f cóncava en (−∞, −1) ∪ (1, +∞)

f convexa en (−1, +∞)



b) Dom = ℝ

Im = [−1, 1]

Corte con OX $\rightarrow$ (0, 0)

Corte con OY $\rightarrow$ (0, 0)

		0	
Signo	−	0	+

f es impar

f continua y derivable en su dominio

Asíntota horizontal en y = 0

$$f'(x) = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = -1, x = 1$$

f crece en (−1, 1)

f decrece en (−∞, −1) ∪ (1, +∞)

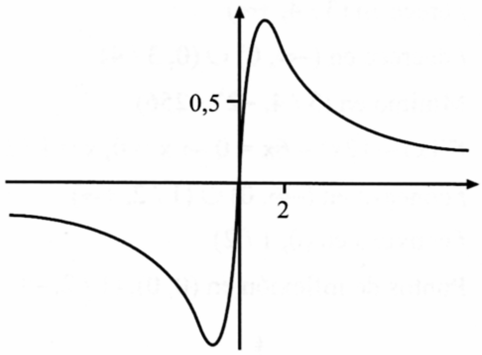
Máximo en (1, 1)

Mínimo en (−1, −1)

$$f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3}$$

f cóncava en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$



Puntos de inflexión en (0, 0), $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/2)$, $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/2)$

c) Dom = ℝ

Im = [0, 2]

Corte con OX $\rightarrow$ (0, 0)

Corte con OY $\rightarrow$ (0, 0)

		0	
Signo	+	0	+

f no tiene simetrías

f continua y derivable en su dominio

Asíntota horizontal en y = 1

$$f'(x) = \frac{-2x(x-2)}{(x^2-2x+2)^2} = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$$

f crece en (0, 2)

f decrece en (−∞,0) ∪ (2, +∞)

Máximo en (2, 2)

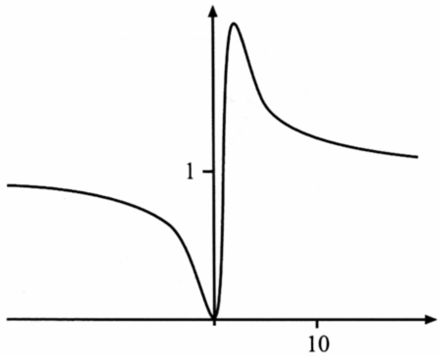
Mínimo en (0, 0)

$$f''(x) = \frac{4(x^3-3x^2+2)}{(x^2-2x+2)^3} = 0 \rightarrow x = 1, x = 1 \pm \sqrt{3}$$

f cóncava en $(1-\sqrt{3}, 1) \cup (1+\sqrt{3}, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, 1-\sqrt{3}) \cup (1, 1+\sqrt{3})$

Punto de inflexión en (1, 1), $(1-\sqrt{3}, 0{,}13)$, $(1+\sqrt{3}, 1{,}87)$



d) Dom = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Im $\mathbb{R}$

Corte con OX $\rightarrow$ (0, 0)

Corte con OY $\rightarrow$ (0, 0)

		-2		0		2	
Signo	$-$		+	0	$-$		+

f impar

f continua y derivable en su dominio

Asíntota vertical en x = −2, x, = 2

Asíntota oblicua en y = x / 2

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-12)}{2(x^2-4)^2} = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \pm 2\sqrt{3}$$

f crece en $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$

f decrece en $(-2\sqrt{3}, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup (2, 2\sqrt{3})$

Máximo en $(-2\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/2)$

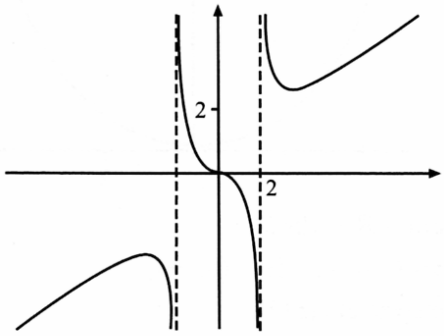
Mínimo en $(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/2)$

$$f''(x) = \frac{4x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} = 0 \rightarrow x = 0$$

f cóncava en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

Punto de inflexión en (0, 0)



Página 253

Piensa y contesta

- 1^{er} cuadrante $\rightarrow \sqrt{x}$

  2^{o}cuadrante $\rightarrow \sqrt{-x}$

  3^{er} cuadrante $\rightarrow -\sqrt{-x}$

  2^{o}cuadrante $\rightarrow -\sqrt{x}$

7. a) Dom = $[-5, +\infty)$

Im = $[0, +\infty)$

Corte con OX $\rightarrow$ (−5, 0)

Corte con OY $\rightarrow$ $(0, \sqrt{5})$

	-5	
Signo	0	+

f continua y derivable en su dominio

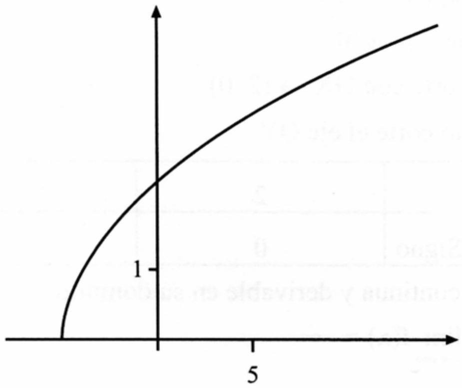
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+5}} > 0$ para todo *x* del dominio de *f*

f crece en todo su dominio

$f''(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt{(x+5)^3}} < 0$ para todo *x* del dominio de *f*

f convexa en todo su dominio



b) Dom = $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

Im = $[0, +\infty)$

Corte con OX $\rightarrow$ (−3, 0), (3, 0)

No corte el eje OY

		-3		3	
Signo	+	0		0	+

f par

f continua y derivable en su dominio

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

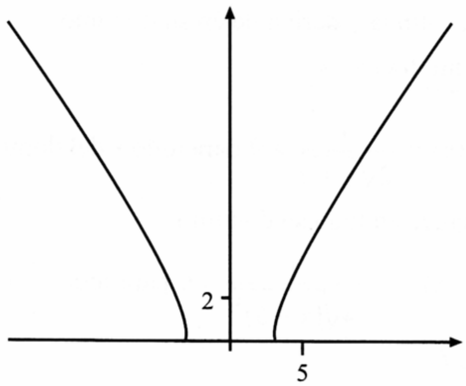
$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}} = 0 \rightarrow\ x = 0$ que no pertenece al dominio de *f*

f crece en $(3, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -3)$

$f''(x) = \dfrac{-9}{\sqrt{(x^2-9)^3}} < 0$ para todo *x* del dominio de *f*

f convexa en todo su dominio



c) Dom = $[2, +\infty)$

Im = $(-\infty, 0]$

Corte con OX $\rightarrow$ (2, 0)

No corte el eje OY

	2	
Signo	0	–

f continua y derivable en su dominio

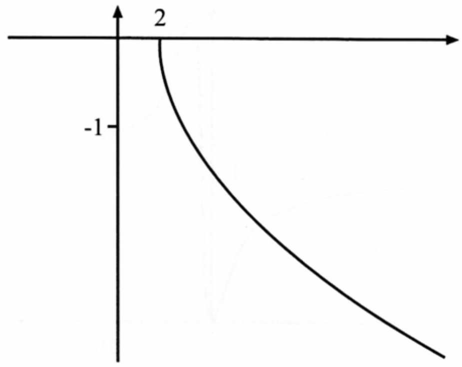
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} < 0$ para todo *x* del dominio de *f*

f decrece en todo su dominio

$f''(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{(x-2)^3}} > 0$ para todo *x* del dominio de *f*

f cóncava en todo su dominio



Página 255

8. a) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $[2, +\infty)$

No corta el eje OX

Corte con OY $\rightarrow$ (0, 2)

$f > 0$ para todo *x*

f par

f continua y derivable en todo el dominio

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$f'(x) = \ln 2\,(-2^{-x} + 2^{x}) = 0 \rightarrow x = 0$

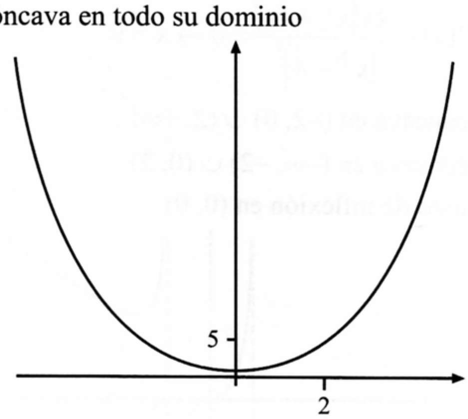
f crece en $(0, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, 0)$

Mínimo en (0, 2)

$f''(x) = \ln^2 2\,(2^{-x} + 2^{x}) > 0$ para todo *x*

f cóncava en todo su dominio



b) Dom = $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$

Im = $(-\infty, -1/2) \cup (0, +\infty)$

No corta el eje OX

Corte con OY → (0, –1)

		ln 2	
Signo	–		+

f continua y derivable en todo el dominio

Asíntota vertical en x = ln 2

Asíntota horizontal por la derecha en y = 0.

Asíntota horizontal por la izquierda en y = –1 / 2

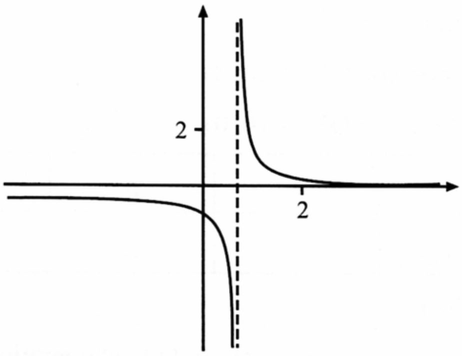
$f'(x) = -\dfrac{e^x}{(e^x - 2)^2} < 0$ para todo *x* del dominio de *f*

f decrece en todo su dominio

$f''(x) = \dfrac{e^x(e^x + 2)}{(e^x - 2)^3} = 0$ no tiene solución

f cóncava en (ln 2, +∞)

f convexa en (–∞, ln 2)



c) Dom = ℝ

Im = [1, +∞)

No corta el eje OX

Corte con OY → (0, 1)

f > 0 para todo *x*

f par

f continua y derivable en todo el dominio

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \rightarrow x = 0$

f crece en (0, +∞)

f decrece en (–∞, 0)

Mínimo en (0, 1)

$f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \rightarrow x = 0$

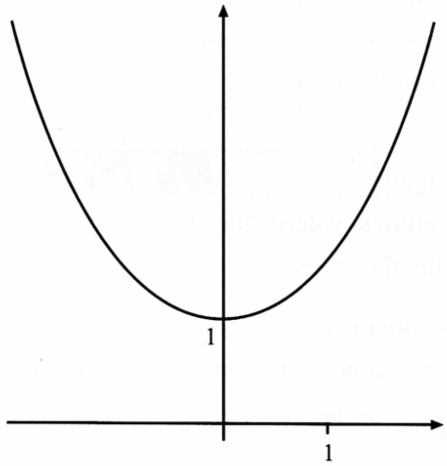
f crece en (0, +∞)

f decrece en (–∞, 0)

Mínimo en (0, 1)

$f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 0$ no tiene solución

f cóncava en todo su dominio



d) Dom = ℝ

Im = ℝ

Corte con OX → (0, 0)

Corte con OY → (0, 0)

		0	
Signo	–	0	+

f impar

f continua y derivable en todo el dominio

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ para todo *x*

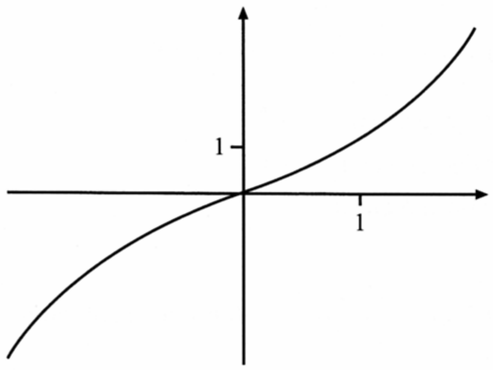
f crece en todo su dominio

$f''(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 0 \rightarrow x = 0$

f cóncava en (0, +∞)

f convexa en (–∞, 0)

Punto de inflexión en (0, 0)



e) Dom = $\mathbb{R} - \{0\}$

Im = $(-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$

No corta los ejes

		0	
Signo	–		+

f continua y derivable en todo el dominio

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota vertical en x = 0.

Asíntota horizontal por la izquierda en y = 0.

$$f'(x) = \frac{e^x (x-1)}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1$$

f crece en $(1, +\infty)$

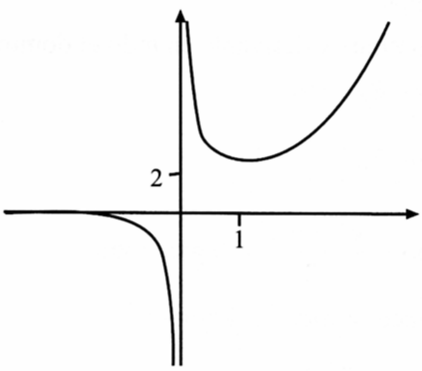
f decrece en $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

Mínimo en (1, e)

$$f''(x) = \frac{e^x (x^2 - 2x + 2)}{x^3} = 0 \text{ no tiene solución}$$

f cóncava en $(0, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, 0)$

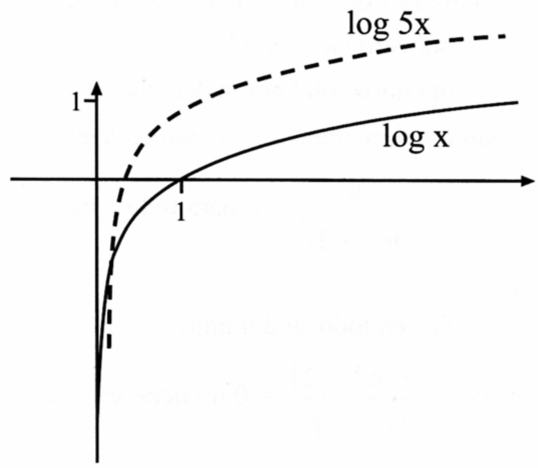


Página 257

9. a) $f(x) = \log 5 + \log x$

La gráfica es, por lo tanto, una traslación vertical en sentido positivo de *log x*.

Hay que tener en cuenta que el corte con el eje OX será (1 / 5, 0).



b) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $(-\infty, 0]$

Corte con OX → (0, 0)

Corte con OY → (0, 0)

		0	
Signo	–	0	+

f par

f continua y derivable en todo el dominio

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$$f'(x) = \frac{-2x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 0$$

f crece en $(-\infty, 0)$

f decrece en $(0, +\infty)$

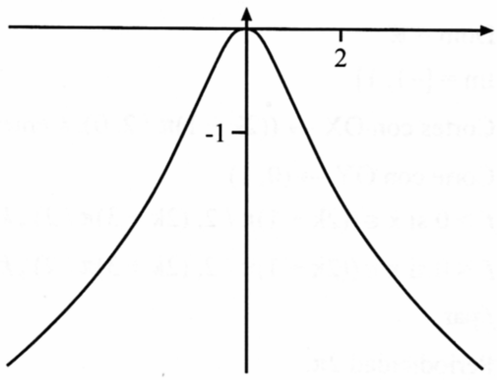
Máximo en (0, 0)

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = -1, x = 1$$

f cóncava en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

f convexa en $(-1, 1)$

Punto de inflexión en $(-1, -\ln 2)$, $(1, -\ln 2)$



c) Dom = $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Im = $\mathbb{R}$

Corte con OX $\rightarrow$ $(-\sqrt{2}, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$

No corta el eje OY

		$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$	
Signo	+	0	–				–	0	+

f par

f continua y derivable en todo el dominio

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

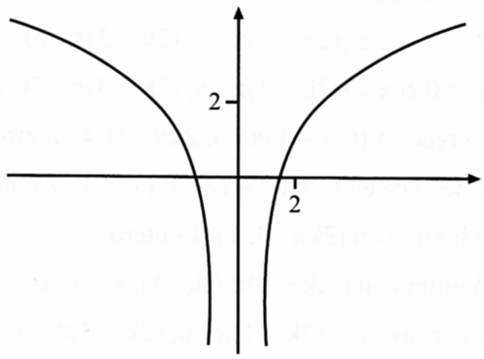
$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x = 0$ que no pertenece al dominio

f crece en $(1, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -1)$

$f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2} < 0$ para todo x

f convexa en todo su dominio



Página 259

10. a) Si *sen x* tiene periodo $2\pi \rightarrow f(x) = \text{sen}(2x)$ tiene periodo π .

Por lo tanto, las diferencias respecto de la gráfica de sen x serán:

Corte con OX $\rightarrow$ $(k\pi / 2, 0)$, *k* entero

Corte con OY $\rightarrow$ $(0, 0)$

$f > 0$ si $x \in (k\pi, (2k + 1)\pi / 2)$, *k* entero

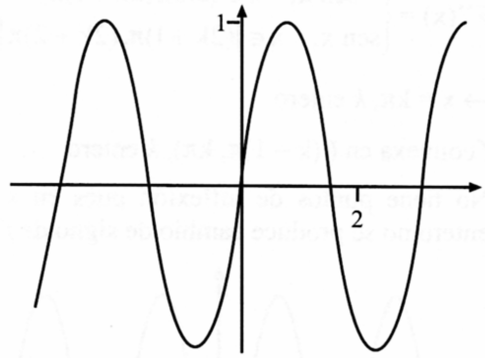
$f < 0$ si $x \in ((2k - 1)\pi / 2, k\pi)$, *k* entero

f impar

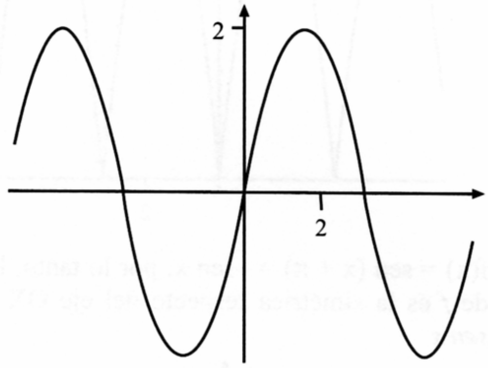
Máximos en $(\pi / 4 + k\pi, 1)$, *k* entero

Mínimos en $(3\pi / 4 + k\pi, -1)$, *k* entero

Puntos de inflexión en $(\pi / 2 + k\pi, 0)$, *k* entero



b) La única diferencia con *sen x* es que Im f(x) = [–2, 2]:



c) $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x, & x \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ -\text{sen } x, & x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi] \end{cases}$,

k entero

Dom = $\mathbb{R}$

Im = [0, 1]

Cortes con OX $\rightarrow$ $(k\pi, 0)$, *k* entero

Corte con OY $\rightarrow$ $(0, 0)$

$f \geq 0$ para todo x.

f par

Periodicidad π.

f continua pero no derivable en $x = k\pi$, k entero

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \\ -\cos x, & x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi] \end{cases} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow x = (2k + 1)\pi / 2$, k entero

f crece en $(k\pi, (2k + 1)\pi / 2)$, k entero

f decrece en $((2k + 1)\pi / 2, (k + 1)\pi,)$, k entero

Máximo en $((2k + 1)\pi / 2, 1)$, k entero

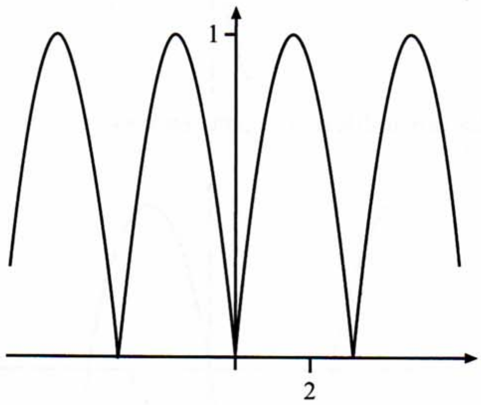
Mínimo en $(k\pi, 0)$, k entero

$$F''(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \\ \operatorname{sen} x, & x \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi] \end{cases} = 0 \rightarrow$$

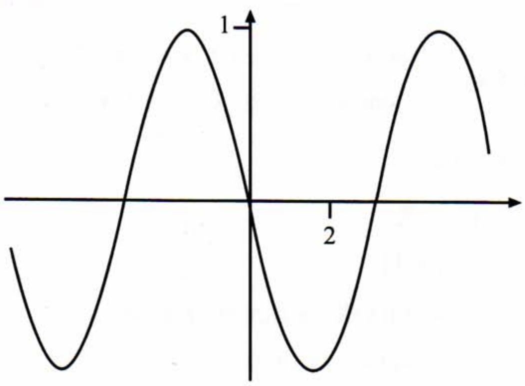
$\rightarrow x = k\pi$, k entero

f convexa en $((k - 1)\pi, k\pi)$, k entero

No tiene puntos de inflexión pues en $x = k\pi$, k entero no se produce cambio de signo de f''



d) $f(x) = \operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$, por lo tanto, la gráfica de f es la simétrica respecto del eje OX de la de *sen x*.



11. a) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $[-1, 1]$

Cortes con OX $\rightarrow ((2k + 1)\pi / 2, 0)$, k entero

Corte con OY $\rightarrow (0, 1)$

$f > 0$ si $x \in ((2k + 1)\pi / 2, (2k + 3)\pi / 2)$, k impar

$f < 0$ si $x \in ((2k + 1)\pi / 2, (2k + 3)\pi / 2)$, k par

f par

Periodicidad 2π.

f continua y derivable

$f'(x) = -\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = k\pi$, k entero

f crece en $((2k - 1)\pi, 2k\pi)$, k entero

f decrece en $(2k\pi, (2k + 1)\pi,)$, k entero

Máximo en $(2k\pi, 1)$, k entero

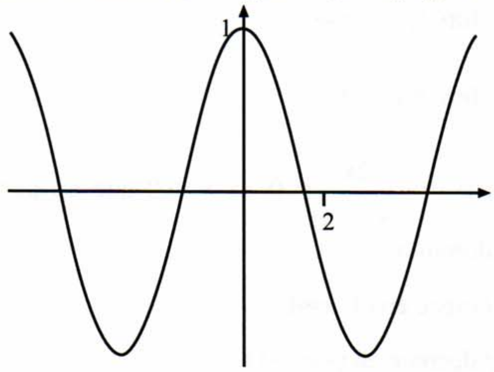
Mínimo en $((2k + 1)\pi, -1)$, k entero

$f''(x) = -\cos x = 0 \rightarrow x = (2k + 1)\pi / 2$, k entero

f cóncava en $((2k + 1)\pi / 2, (2k + 3)\pi / 2)$, k par

f convexa en $((2k + 1)\pi / 2, (2k + 3)\pi / 2)$, k impar

Puntos de inflexión en $((2k + 1)\pi / 2, 0)$, k entero.



b) El periodo de f es $2\pi / 3$.

Por lo tanto, las diferencias entre las gráficas de f y la de *cos x* son las siguientes:

Corte con OX $\rightarrow ((2k + 1)\pi / 6, 0)$, k entero

$f > 0$ si $x \in ((2k + 1)\pi / 6, (2k + 3)\pi / 6)$, k impar

$f < 0$ si $x \in ((2k + 1)\pi / 6, (2k + 3)\pi / 6)$, k par

f crece en $((2k - 1)\pi / 3, 2k\pi / 3)$, k entero

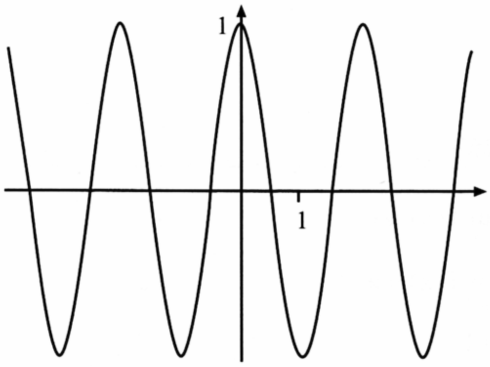
f decrece en $(2k\pi / 3, (2k + 1)\pi / 3)$, k entero

Máximo en $(2k\pi / 3, 1)$, k entero

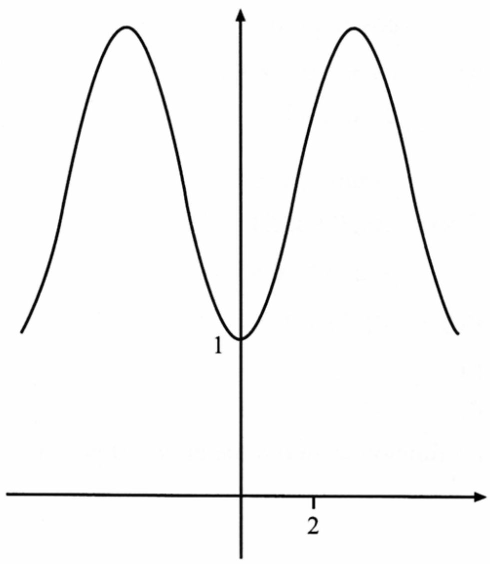
Mínimo en $((2k + 1)\pi / 3, -1)$, k entero

f cóncava en $((2k + 1)\pi / 6, (2k + 3)\pi / 6)$, k par *f* convexa en $((2k + 1)\pi / 6, (2k + 3)\pi / 6)$, *k* impar

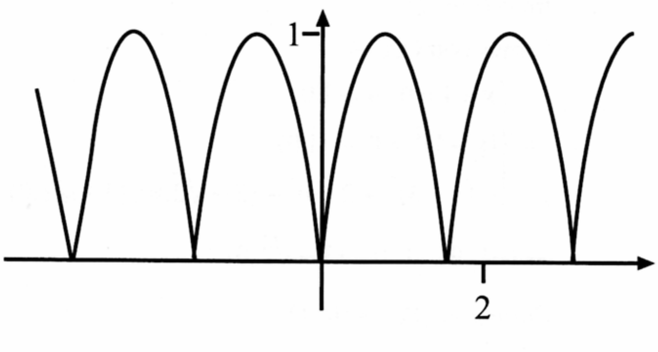
Puntos de inflexión en $((2k + 1)\pi / 6, 0)$, *k* entero.



c) Se consigue a partir de la gráfica de *cos x,* dibujando su simétrica respecto del eje OX y desplazándola verticalmente dos unidades en sentido positivo:

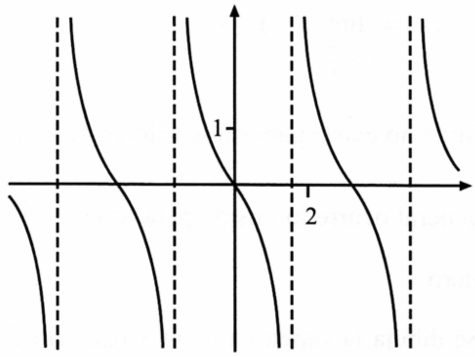


d) Análogo al caso del apartado *c* de la *Actividad 10.* En los intervalos en los que la gráfica de *cos x* queda por debajo del eje de abscisas se dibuja su simétrica respecto de dicho eje.

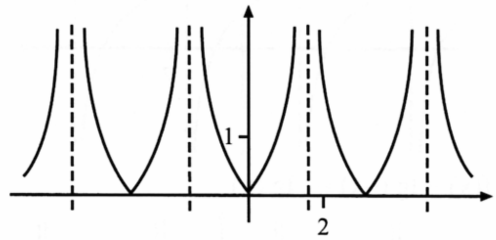


Página 261

12. a) Simétrica de *tg x* respecto del eje OX:



b) $f(x) = \begin{cases} \text{tg } x, & x \in \left[k\pi, \dfrac{(2k+1)\pi}{2}\right) \\ -\text{tg } x, & x \in \left[\dfrac{(2k+1)\pi}{2}, (k+1)\pi\right) \end{cases}$, *k* entero



c) Periodo $\pi / 2$, por lo tanto, las diferencias con la gráfica de *tg x* son las siguientes:

Dom = $\mathbb{R} - \{\pi / 4 + k\pi / 2$, *k* entero$\}$

Cortes con OX $\rightarrow (k\pi / 2, 0)$

$f > 0$ si $x \notin (k\pi / 2, \pi / 4 + k\pi / 2)$, *k* entero

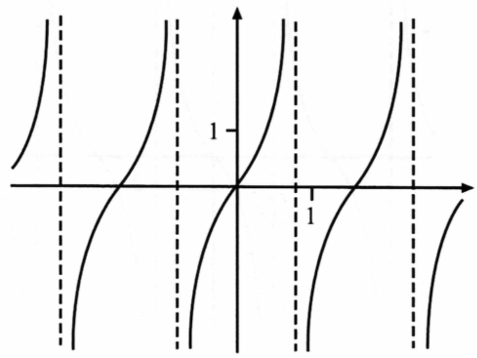
$f < 0$ si $x \notin (\pi / 4 + k\pi / 2, \pi / 2 + k\pi / 2)$, *k* entero

Asíntotas verticales $\rightarrow x = \pi / 4 + k\pi / 2$, *k* entero

f cóncava en $(k\pi / 2, (2k + 1)\pi / 4)$, *k* entero

f convexa en $((2k + 1)\pi / 4, (k + 1)\pi / 2)$, *k* entero

Puntos de inflexión en $(k\pi / 2, 0)$, *k* entero



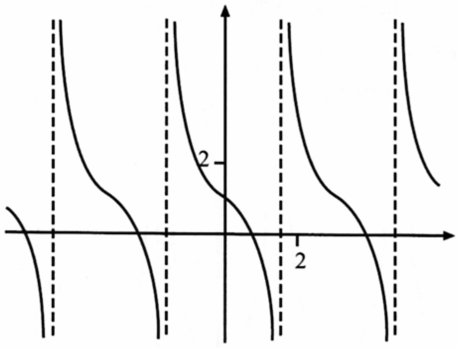
13. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$

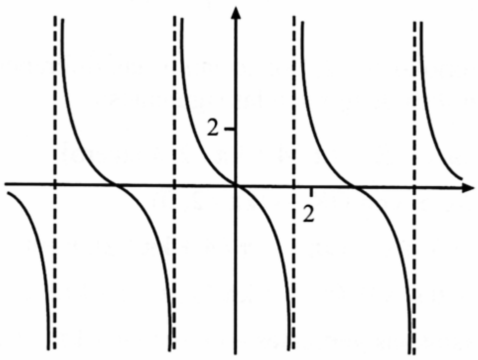
El límite no existe para estos valores de *x*.

En general ocurre lo mismo para todo $x = \left(\frac{2k+1}{2}\right)\pi$, k entero

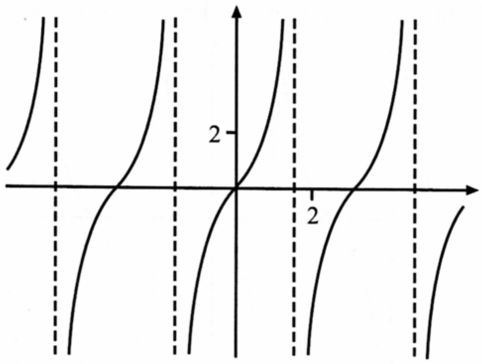
14. a) Se dibuja la simétrica de tg x respecto del eje OX y se traslada una unidad verticalmente hacia arriba:



b) f(x) = tg (–x) = –tg (x)



c) Lo único que cambia respecto de la gráfica de *tg x* es la velocidad de crecimiento de la función, que, en este caso es el doble:



15. a) Impar

b) Impar

c) Par

Página 263

16. a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = a$

$a = 1$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = b$

$b = 2$

Por lo tanto:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0 \\ 1 + x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 2/x, & x > 1 \end{cases}$$

b) $$f'(x) = \begin{cases} -\text{sen } x, & x < 0 \\ 2x, & 0 \le x \le 1 \\ -2/x^2, & x > 1 \end{cases}$$

$f'(0^-) = f'(0^+) = 0$

$f'(1^-) = 2$

$f'(1^+) = -2$

La función es derivable en x = 0 pero no lo es en x = 1.

Página 264

17. a) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $(-\infty, 2]$

Cortes con OX →

$$\to \begin{cases} x + 1 = 0 \to (-1,0) \\ (x-1)^2 = 0 \to (1,0) \\ -(x-3)^2 + 2 = 0 \to (3-\sqrt{2},0), (3+\sqrt{2},0) \end{cases}$$

$\to (-1, 0), (1, 0), (3+\sqrt{2},0)$

Corte con OY → (0, 1)

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

		-1		1		$(3+\sqrt{2},0)$	
Signo	$-$	0	+	0	+	0	$-$

Continua en todo el dominio con f(0) = 1, f(2) = 1.

$$f'(x)=\begin{cases}1, \text{ si } x<0\\ 2(x-1), \text{ si } 0\le x\le 2\\ -2(x-3), \text{ si } x>2\end{cases}$$

$f'(0^-) = 1$

$f'(0^+) = -2$

No es derivable en x = 0

$f'(2^-) = 2$

$f'(2^+) = 2$

Es derivable en x = 2.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

f crece en $(-\infty, 0) \cup (1, 3)$

f decrece en $(0, 1) \cup (3, +\infty)$

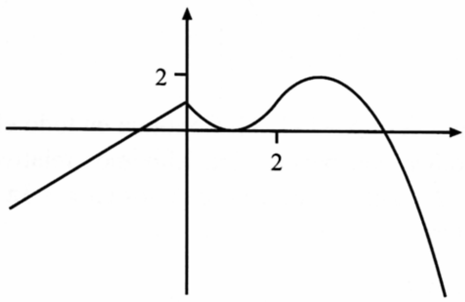
Máximo en (0, 1), (3, 2)

Mínimo en (1, 0)

$$f''(x)=\begin{cases}0, \text{ si } x<0\\ 2, \text{ si } 0\le x\le 2\\ -2\\ , \text{ si } x>2\end{cases}$$

f cóncava en (0, 2)

f convexa en $(2, +\infty)$



b) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $(-\infty, 1]$

Cortes con OX →

$$\rightarrow \begin{cases}x=0\rightarrow(0,0)\\ -x^2+2=0\rightarrow(\sqrt{2},0),(-\sqrt{2},0)\end{cases}$$

→ (0, 0), ($\sqrt{2}$, 0)

Corte con OY → (0, 0)

		0		$\sqrt{2}$	
Signo	$-$	0	+	0	$-$

Continua en todo el dominio con f(1) = 1.

$$f'(x)=\begin{cases}1, \text{ si } x\le 1\\ -2x, \text{ si } x>1\end{cases}$$

$f'(1^-) = 1$

$f'(1^+) = -2$

No es derivable en x = 1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

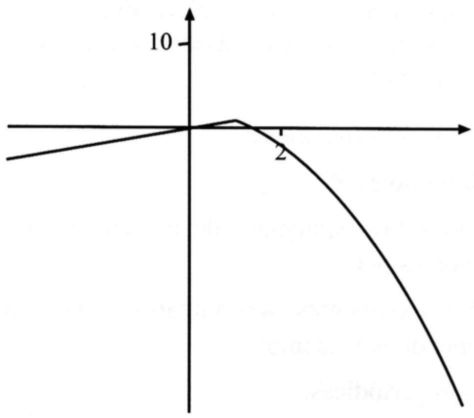
f crece en $(-\infty, 1)$

f decrece en $(1, +\infty)$

Máximo en (1, 1)

$$f''(x)=\begin{cases}0, \text{ si } x\le 1\\ -2, \text{ si } x>1\end{cases}$$

f convexa en $(1, +\infty)$



c) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $(-\infty, 0)$

No corta el eje OX.

Corte con OY → (0, −1)

f < 0 en todo el dominio

Discontinua en x = 0 → tampoco es derivable para esta valor de *x*

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1}{x^2}, \text{ si } x<0\\ -2x, \text{ si } x\ge 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

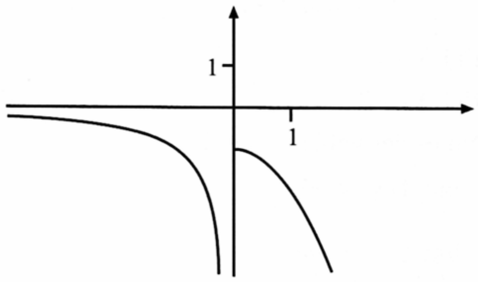
Asíntota horizontal por la izquierda en y = 0.

12

f decrece en todo su dominio

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3}, \text{ si } x < 0 \\ -2, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

f convexa en todo su dominio



Página 267

1. Dominio, Imagen, Puntos de corte con los ejes, Regiones de existencia, Simetrías, Periodicidad, Continuidad y derivabilidad, Asíntotas y ramas infinitas, Crecimiento y decrecimiento, Máximos y mínimos relativos, Concavidad y convexidad, Puntos de inflexión.

2. *Funciones polinómicas*:

El dominio es $\mathbb{R}$.

Si todos los exponentes de la variable son pares, la función es par.

Si los exponentes son impares y no hay término independiente, es impar.

No son periódicas.

Son continuas y derivables en $\mathbb{R}$.

Tienen ramas infinitas si el grado del polinomio es mayor que 1.

Funciones racionales:

Los puntos en los que el denominador se anula no pertenecen al dominio.

No son periódicas

Son continuas y derivables en todo su dominio.

x = a es asíntota vertical si *a* anula el dominador y los límites laterales de la función cuando *x* tiende a *a* son infinitos.

Si el grado del polinomio del numerador es menor o igual que el del denominador, la función tiene una asíntota horizontal.

Si el grado del polinomio del numerador es una unidad más grande que el del denominador, la función tiene una asíntota oblicua.

3. La función derivada será de grado $n - 1$ y, por lo tanto, la función, como mucho, podrá tener $n - 1$ extremos relativos.

4. Una función definida a trozos puede tener, como máximo, una por la derecha y otra por la izquierda.Actividad personal.

5. Con las verticales, no.

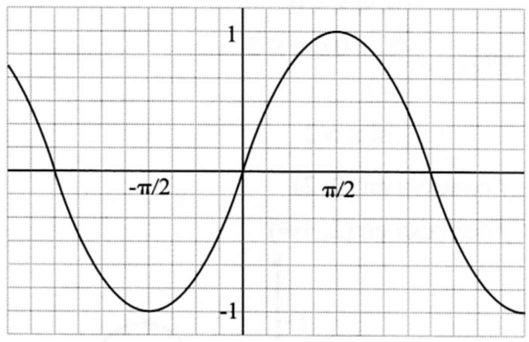
Por ejemplo, la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ tiene com asíntota horizontal y = 0 y como f(0) = 0, la función corta a la asíntota en (0, 0)

6. Por ejemplo, si a = 0 y $f(x) = x^n$, con *n* par y mayor que 2, se cumplen las condiciones del enunciado.

7. *n* par → Dom f = $\{x \mid g(x) \geq 0\}$

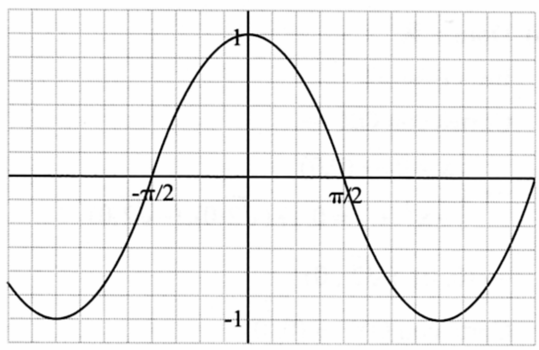
n impar → Dom f = $\mathbb{R}$

8. *y = sen x*



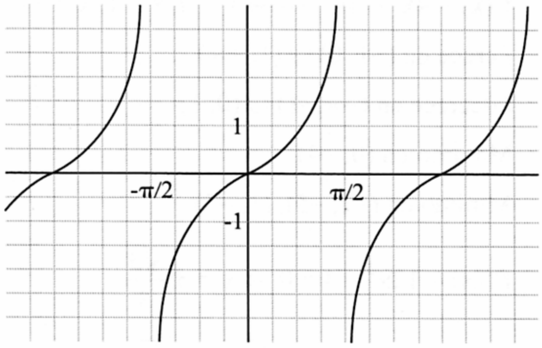
Dom = $\mathbb{R}$; Im = [−1, 1]; Continua en todo el dominio; Periódica con periodo 2π; Máximos relativos en x = = π / 2 + 2kπ y mínimos relativos en x = 3π / 2 + 2kπ, *k* entero.

y = cos x



Dom = $\mathbb{R}$; Im = [−1, 1]; Continua en todo el dominio; Periódica con periodo 2π; Máximos relativos en $x = 2k\pi$ y mínimos relativos en $x = \pi + 2k\pi$, *k* entero.

$y = tg\, x$



Dom = $\mathbb{R} - \{\pi / 2 + k\pi,\ k \text{ entero}\}$; Im = $\mathbb{R}$; Discontinua en los puntos de abscisa $x = \pi / 2 + k\pi$, *k* entero. Las rectas correspondientes son asíntotas verticales ; Periódica con periodo π; Es creciente en todo el dominio.

9. Se deben estudiar las función en cada uno de los trozos en los que se define. En los puntos frontera se deberá estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función:

Dom = $\mathbb{R}$

Im = $(-\infty, 1]$

Cortes con OX →

$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x} = 0 \rightarrow \text{No tiene solución} \\ -x^2 + 1 = 0 \rightarrow (1,0), (-1,0) \end{cases}$$

→ (1, 0)

Corte con OY → (0, 1)

		0		1	
Signo	−	1	+	0	−

Tiene una discontinuidad en x = 0 ya que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \rightarrow$ no es derivable en x = 0

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2}, \text{ si } x < 0 \\ -2x, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

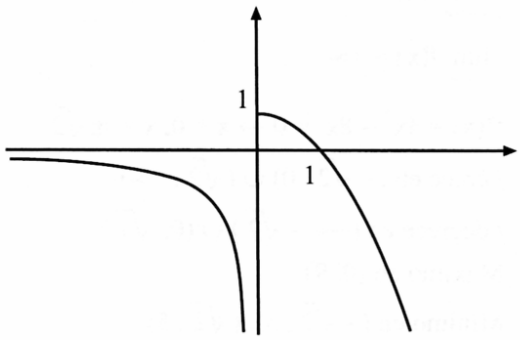
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

Asíntota horizontal por la izquierda en y = 0.

f crece en todo su dominio.

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3}, \text{ si } x < 0 \\ -2, \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

f convexa en todo su dominio



10. a) $\mathbb{R}$

b) OX → (3, 0)

OY → (0, −6)

c) No tiene.

d) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0 \rightarrow x = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$x = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

f crece en $(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

f decrece en $(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{3})$

Máximo en $(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, -6 + \frac{2\sqrt{3}}{9})$

Mínimo en $(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, -6 - \frac{2\sqrt{3}}{9})$

e) En [0, 3] están los dos extremos relativos, por lo tanto, evaluamos la función en x = 0 y en x = 3:

f(0) = −6

f(3) = 0

En [0, 3] el valor máximo se alcanza en x = 3, mientras que el valor mínimo se alcanza en x $= 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

11. a) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $[5, +\infty)$

No corta el eje OX

12

Corte con OY $\rightarrow$ (0, 9)

$f > 0$ para todo x

f par

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 4x^3 - 8x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{2}$

f crece en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$

Máximo en (0, 9)

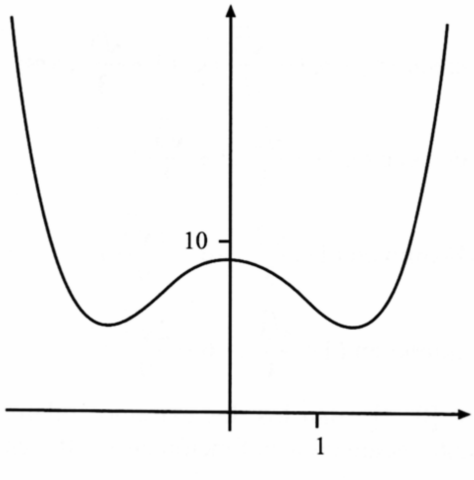
Mínimo en $(-\sqrt{2}, 5), (\sqrt{2}, 5)$

$f''(x) = 12x^2 - 8 = 0 \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

f cóncava en $(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty)$

f convexa en $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$

Punto de inflexión en $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{61}{9}), (\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{61}{9})$



b) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $[-5, +\infty)$

Corte con OX $\rightarrow \left(\pm\sqrt{1+\sqrt{5}}, 0\right)$

Corte con OY $\rightarrow$ (0, –4)

		$-\sqrt{1+\sqrt{5}}$		$\sqrt{1+\sqrt{5}}$		
Signo	+	0	–	0	+	

f par

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = -1$

f crece en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Máximo en (0, –4)

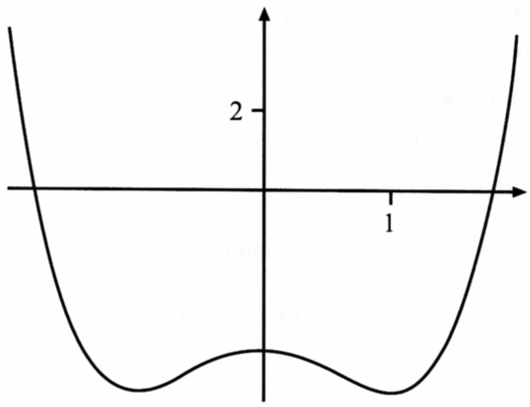
Mínimo en (–1, –5), (1, –5)

$f''(x) = 12x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

f cóncava en $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

f convexa en $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

Punto de inflexión en $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{41}{9}), (\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{41}{9})$



12. a) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $\mathbb{R}$

Corte con OX $\rightarrow$ (0, 0)

Corte con OY $\rightarrow$ (0, 0)

		0	
Signo	–	0	+

f impar

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ para todo x

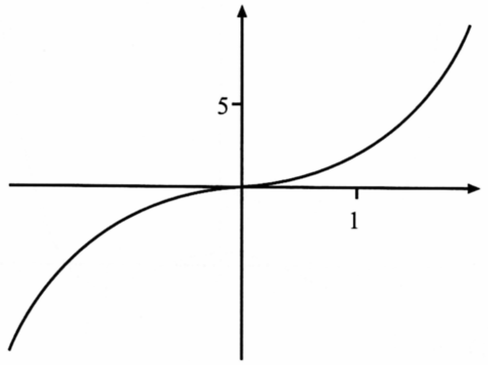
f crece en todo su dominio

$f''(x) = 6x = 0 \to x = 0$

f cóncava en $(0, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, 0)$

Punto de inflexión en $(0, 0)$



b) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $[-4, +\infty)$

Corte con OX $\to (-2, 0), (0, 0), (2, 0)$

Corte con OY $\to (0, 0)$

		–2		0		2	
Signo	+	0	–	0	–	0	+

f par

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 4x^3 - 8x = 0 \to x = 0, x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$

f crece en $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$

Máximo en $(0, 0)$

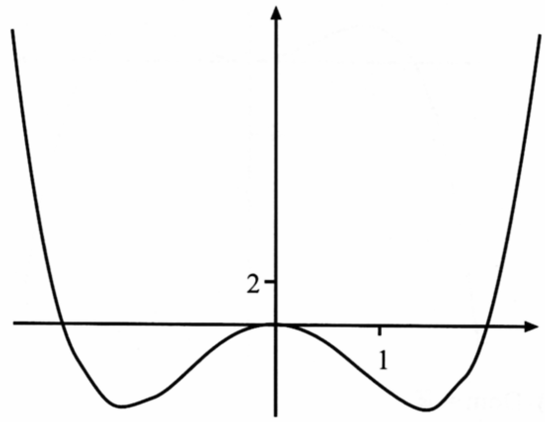
Mínimo en $(-\sqrt{2}, -4), (\sqrt{2}, -4)$

$f''(x) = 12x^2 - 8 = 0 \to x = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

f cóncava en $(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty)$

f convexa en $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3})$

Punto de inflexión en $(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{20}{9}), (\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{20}{9})$



c) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $(-\infty, \frac{5}{9}]$

Corte con OX $\to (-\sqrt{2}, 0), (0, 0), (\sqrt{2}, 0)$

Corte con OY $\to (0, 0)$

		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
Signo	–	0	+	0	+	0	–

f par

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = -4x^3 + 4x = 0 \to x = 0, x = 1, x = -1$

f crece en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

f decrece en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Máximo en $(-1, 1), (1, 1)$

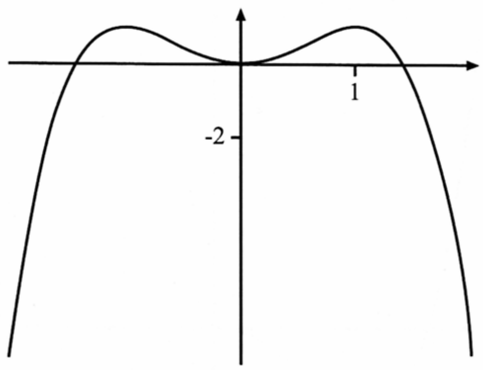
Mínimo en $(0, 0)$

$f''(x) = -12x^2 + 4 = 0 \to x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

f cóncava en $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

f convexa en $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty,)$

Punto de inflexión en $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{9}), (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{9})$



d) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $[-7 / 9, +\infty)$

Corte con OX $\rightarrow$ $(-\frac{\sqrt{25+5\sqrt{15}}}{5}, 0)$, $(-\frac{\sqrt{25-5\sqrt{15}}}{5}, 0)$, $(0, 0)$, $(\frac{\sqrt{25+5\sqrt{15}}}{5}, 0)$, $(\frac{\sqrt{25-5\sqrt{15}}}{5}, 0)$

Corte con OY $\rightarrow$ (0, 2)

		$-\frac{\sqrt{25+5\sqrt{15}}}{5}$		$-\frac{\sqrt{25-5\sqrt{15}}}{5}$	
Signo	+	0	–	0	+

		$\frac{\sqrt{25-5\sqrt{15}}}{5}$		$\frac{\sqrt{25+5\sqrt{15}}}{5}$	
Signo	+	0	–	0	+

f par

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 20x^3 - 20x = 0 \rightarrow x = 0, x = 1, x = -1$

f crece en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Máximo en (0, 2)

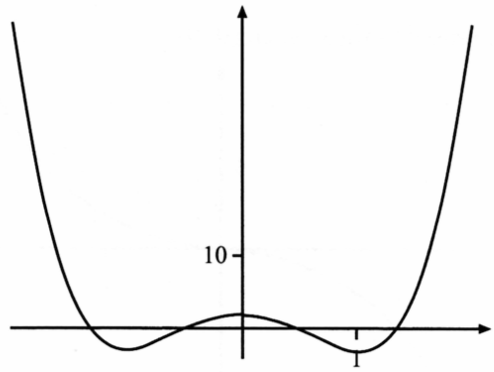
Mínimo en (–1, –3), (1, –3)

$f''(x) = 60x^2 - 20 = 0 \rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

f cóncava en $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

f convexa en $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

Punto de inflexión en $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{7}{9}), (\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{7}{9})$



e) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $\mathbb{R}$

Corte con OX $\rightarrow$ (–2, 0), (–1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0)

Corte con OY $\rightarrow$ (0, 0)

		–2		–1	
Signo	–	0	+	0	–

		0		1		2	
Signo	–	0	+	0	–	0	+

f impar

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = 5x^4 - 15x^2 + 4 = 0 \rightarrow x = -1{,}64, x = -0{,}54, x = 0{,}54, x = 1{,}64$

f crece en $(-\infty, -1{,}64) \cup (-0{,}54, 0{,}54) \cup (1{,}64, +\infty)$

f decrece en $(-1{,}64, -0{,}54) \cup (0{,}54, 1{,}64)$

Máximo en (–1,64, 3,63), (0,54, 1,42)

Mínimo en (–0,54, –1,42), (1,64, –3,63)

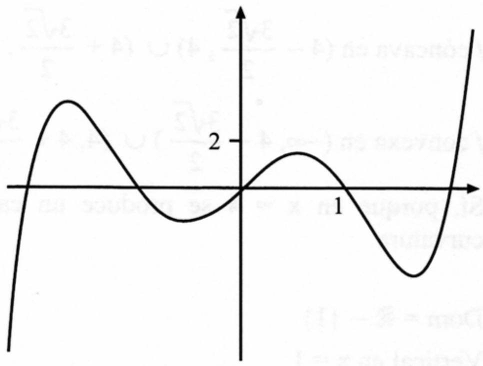
$f''(x) = 20x^3 - 30x = 0 \rightarrow x = 0, x = -1{,}22, x = = 1{,}22$

f cóncava en $(-1{,}22, 0) \cup (1{,}22, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, -1{,}22) \cup (0, 1{,}22)$

Punto de inflexión en (–1,22, 1,53), (0, 0), (1,2 –1,53)

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES



f) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $\mathbb{R}$

Corte con OX → (−1, 0), (2, 0)

Corte con OY → (0, 4)

		−1		2	
Signo	−	0	+	0	+

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$

f crece en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

f decrece en (0, 2)

Máximo en (0, 4)

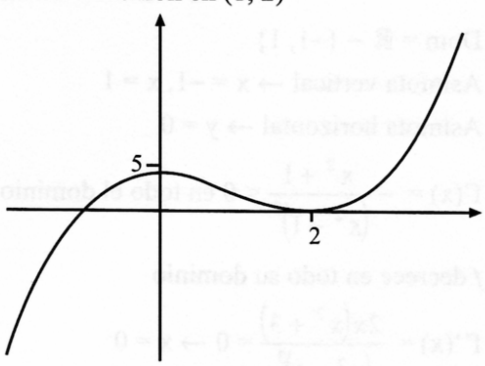
Mínimo en (2, 0)

$f''(x) = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$

f cóncava en $(1, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, 1)$

Punto de inflexión en (1, 2)



13. Representamos *f*:

Dom = $\mathbb{R}$

Im = $[-1, +\infty)$

Corte con OX → (1, 0), (3, 0)

Corte con OY → (0, 3)

		1		3	
Signo	+	0	−	0	+

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$

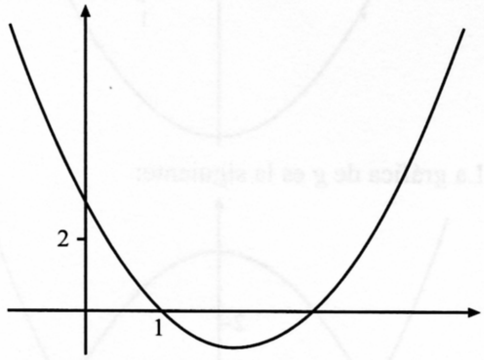
f crece en $(2, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, 2)$

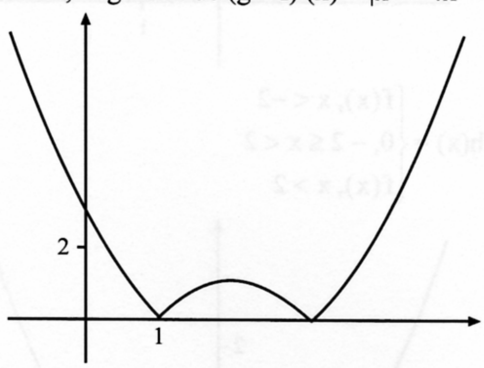
Mínimo en (2, −1)

$f''(x) = 2 > 0$ para todo *x*

f cóncava en todo $\mathbb{R}$



Por lo tanto, la gráfica de $(g \circ f)(x) = |x^2 - 4x + 3|$ es:



14. Representamos *f*:

Dom = $\mathbb{R}$

Im = $[-4, +\infty)$

Corte con OX → (−2, 0), (2, 0)

Corte con OY → (0, −4)

		−2		2	
Signo	+	0	−	0	+

f par

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

12

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 2x = 0 \to x = 0$

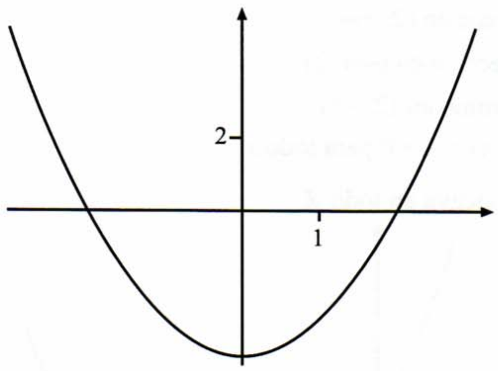
f crece en $(0, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, 0)$

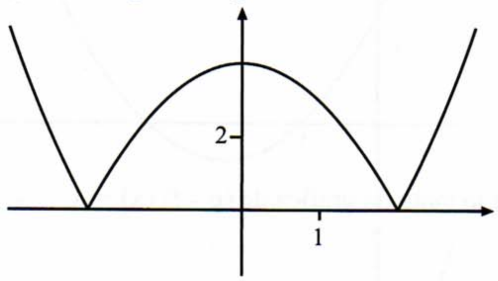
Mínimo en $(0, -4)$

$f''(x) = 2 > 0$ para todo *x*

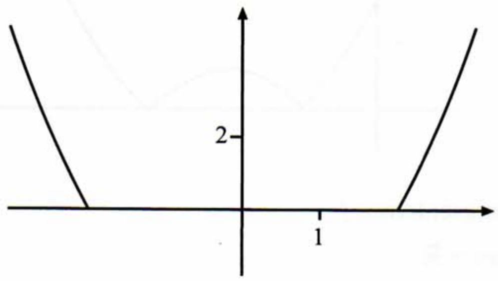
f cóncava en todo $\mathbb{R}$



a) La gráfica de *g* es la siguiente:



b) $h(x) = \begin{cases} f(x), x < -2 \\ 0, -2 \le x < 2 \\ f(x), x > 2 \end{cases}$



15. a) $f'(x) = 0 \to x = 1, x = 4, x = 7$

f crece en $(-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$

f decrece en $(1, 4) \cup (4, 7)$

Tiene un máximo en $x = 4$ y un mínimo en $x = 7$.

b) $f''(x) = 4x^3 - 48x^2 + 174x - 184 = 0 \to x = 4$, $x = 4 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $x = 4 + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

f cóncava en $(4 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, 4) \cup (4 + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, 4 - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}) \cup (4, 4 + \dfrac{3\sqrt{2}}{2})$

c) Sí, porque en $x = 4$ se produce un cambio de curvatura.

16. a) $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{1\}$

b) Vertical en $x = 1$

Oblicua en $y = x + 2$

c) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} = 0 \to x = 1 - \sqrt{2}$, $x = 1 + \sqrt{2}$

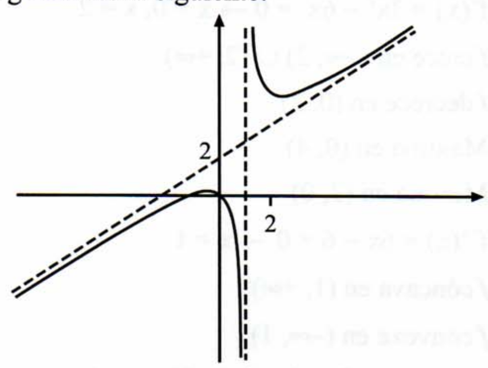
f crece en $(-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty)$

f decrece en $(1 - \sqrt{2}, 1) \cup (1, 1 + \sqrt{2})$

Máximo en $(1 - \sqrt{2}, 0{,}17)$

Mínimo en $(1 + \sqrt{2}, 5{,}83)$

d) La gráfica es la siguiente:



17. a) $\text{Dom} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Asíntota vertical $\to x = -1, x = 1$

Asíntota horizontal $\to y = 0$

b) $f'(x) = -\dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} < 0$ en todo el dominio de *f*

f decrece en todo su dominio

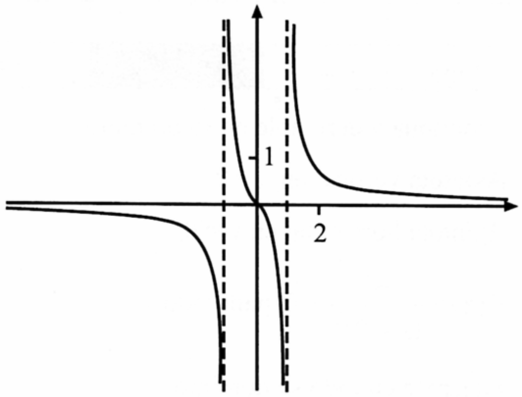
c) $f''(x) = \dfrac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} = 0 \to x = 0$

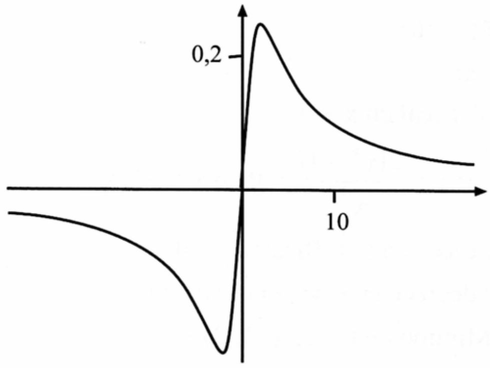
f cóncava en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Punto de inflexión en $(0, 0)$

d) La gráfica es la siguiente:





Página 268

18. a) Dom = $\mathbb{R} - \{0\}$

b) Impar

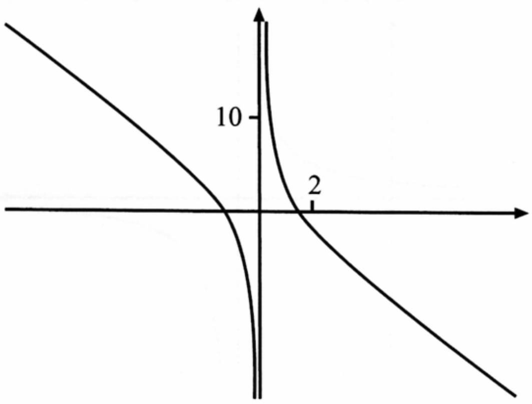
c) Vertical en x = 0

Oblicua en y = –2x

d) $f'(x) = \dfrac{-2(x^2+2)}{x^2} < 0$ para todo *x* del dominio

f decrece en todo su dominio

e) La gráfica es la siguiente:



19. a) $f'(x) = \dfrac{-x^2+4}{(x^2+4)^2} = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 2$

f crece en (–2, 2)

f decrece en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

b) Horizontal en y = 0.

c) La gráfica es la siguiente:

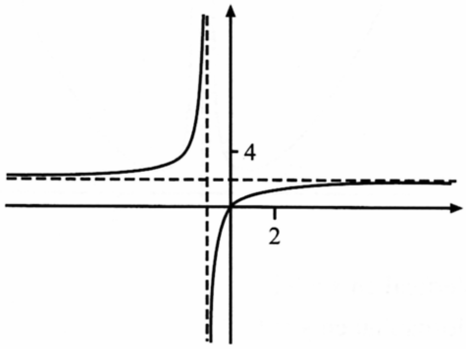
20. Dom = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2} > 0$ para todo *x* del dominio

f crece en todo su dominio

Asíntota vertical en x = –1.

Asíntota horizontal en y = 2



21. Dom = $\mathbb{R} - \{-1\}$

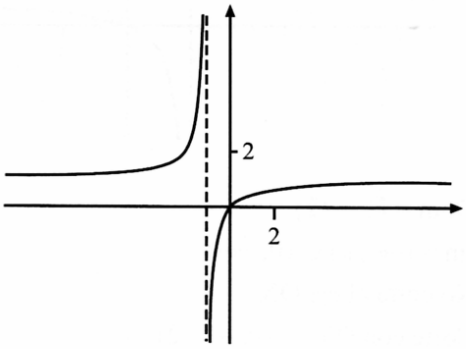
$f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ para todo *x* del dominio

f crece en todo su dominio

$f''(x) = \dfrac{-2}{(x+1)^3} = 0$ no tiene solución

f cóncava en $(-\infty, -1)$

f convexa en $(-1, +\infty)$



22. a) $\mathbb{R} - \{0\}$

b) Par

c) Vertical en x = 0

d) $f'(x) = \dfrac{2(x^4 - 1)}{x^3} = 0 \rightarrow x = -1, x = 1$

f crece en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

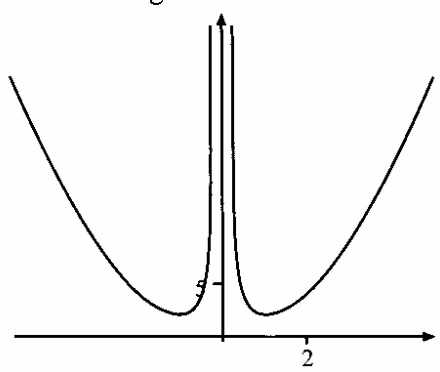
f decrece en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Mínimo en (1, 2), (−1, 2)

e) $f'(x) = \dfrac{2(x^4 + 3)}{x^4} > 0$ en todo el dominio de *f*

f cóncava en todo su dominio

f) La gráfica es la siguiente:



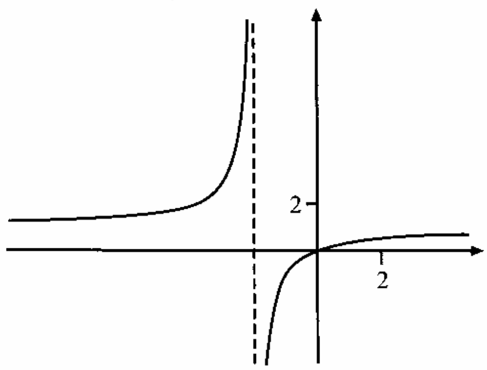
23. a) Vertical en x = −2

Horizontal en y = 1

b) $f'(x) = \dfrac{2}{(x + 1)^2} > 0$ para todo *x* del dominio de *f*

f crece en todo su dominio

c) El esbozo es el siguiente:



24. a) Dom = $\mathbb{R} - \{2\}$

Im = $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

No corta el eje OX

Corte con OY $\rightarrow$ (0, −1 / 2)

		2	
Signo	−		+

f continua y derivable en su dominio

Asíntota vertical en x = 2

Asíntota horizontal en y = 0

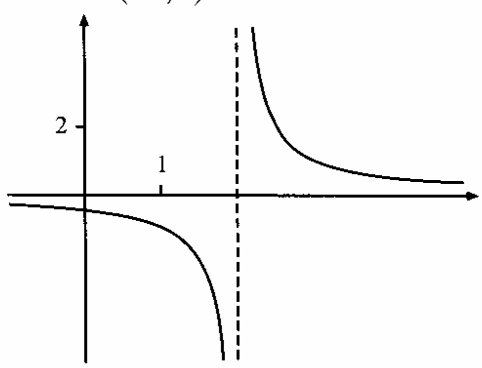
$f'(x) = \dfrac{-1}{(x - 2)^2} < 0$ para todo *x*

f decrece en todo su dominio

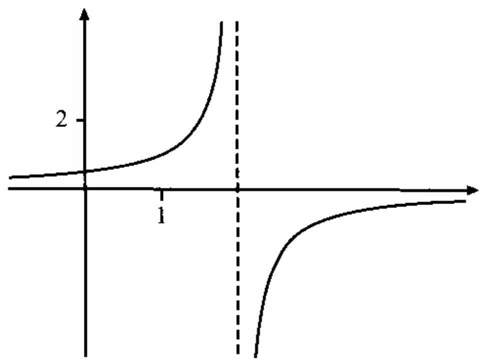
$f''(x) = \dfrac{2}{(x - 2)^3} = 0$ No tiene solución

f cóncava en $(2, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, 2)$



b) Es la simétrica de la anterior respecto del eje OX:



25. a) Dom = $\mathbb{R}$

Im = (0, 1 / 4]

No corta el eje OX

Corte con OY $\rightarrow$ (0, 1 / 4)

f > 0 en todo su dominio

f par

f continua y derivable en su dominio

Asíntota horizontal en y = 0

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+4)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

f crece en $(-\infty, 0)$

f decrece en $(0, +\infty)$

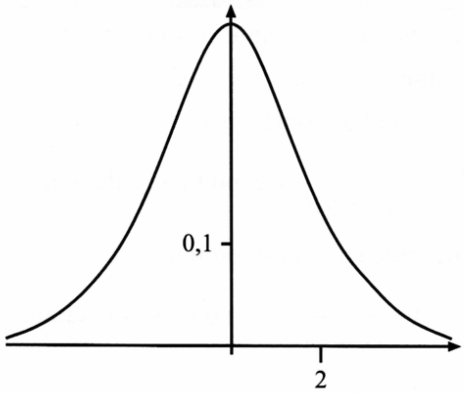
Máximo en $(0, 1/4)$

$$f''(x) = \frac{2(3x^2-4)}{(x^2+4)^3} = 0 \rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

f cóncava en $(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

f convexa en $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$

Punto de inflexión en $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{16}), (\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{16})$.



b) Dom = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Im = $(-\infty, -1/4] \cup (0, +\infty)$

No corta el eje OX

Corte con OY $\rightarrow (0, -1/4)$

		−2		−2	
Signo	+		−		+

f par

f continua y derivable en su dominio

Asíntota vertical en $x = -2$, $x = 2$

Asíntota horizontal en $y = 0$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-4)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

f crece en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$

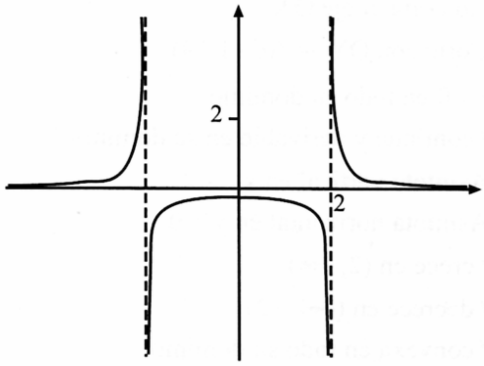
f decrece en $(-0, 2) \cup (2, +\infty)$

Máximo en $(0, -1/4)$

$$f''(x) = \frac{6x^2+8}{(x^2-4)^3} = 0 \text{ No tiene solución}$$

f cóncava en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

f convexa en $(-2, 2)$



c) Dom = $\mathbb{R} - \{2\}$

Im = $(0, +\infty)$

No corta el eje OX

Corte con OY $\rightarrow (0, 1/4)$

$f > 0$ en todo su dominio

f continua y derivable en su dominio

Asíntota vertical en $x = 2$

Asíntota horizontal en $y = 0$

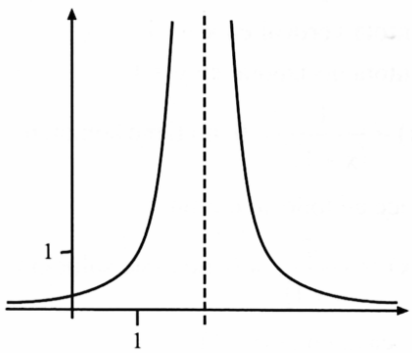
$$f'(x) = \frac{-2}{(x-2)^3} = 0 \text{ no tiene solución}$$

f crece en $(-\infty, 2)$

f decrece en $(2, +\infty)$

$$f''(x) = \frac{6}{(x-4)^4} > 0 \text{ para todo } x$$

f cóncava en todo su dominio



d) Si a la gráfica del apartado anterior se le aplican sucesivamente una simetría de eje OX y otra de eje OY, se obtiene la gráfica de $f(x)=\dfrac{-1}{(x+2)^3}$.

Por lo tanto:

Dom = $\mathbb{R} - \{-2\}$

Im = $(-\infty, 0,)$

No corta el eje OX

Corte con OY $\rightarrow (0, -1/4)$

$f < 0$ en todo su dominio

f continua y derivable en su dominio

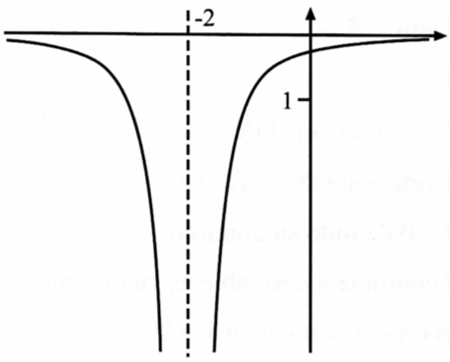
Asíntota vertical en $x = -2$

Asíntota horizontal en $y = 0$

f crece en $(2, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -2)$

f convexa en todo su dominio



26. a) Dom = $\mathbb{R} - \{-1\}$

Im = $\mathbb{R} - \{1\}$

Corte con OX $\rightarrow (0, 0)$

Corte con OY $\rightarrow (0, 0)$

		−1		0	
Signo	+		–	0	+

f continua y derivable en su dominio

Asíntota vertical en $x = -1$

Asíntota horizontal en $y = 1$

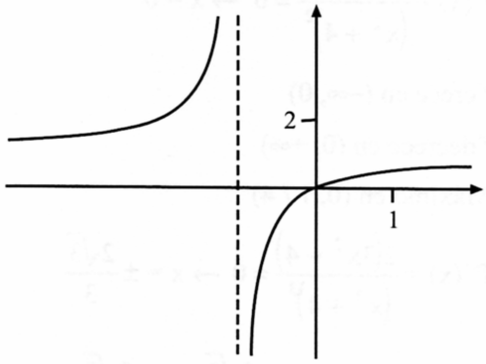
$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}=0 \text{ no tiene solución}$$

f crece en todo su dominio

$$f''(x)=\frac{-2}{(x+1)^3}=0 \text{ no tiene solución}$$

f cóncava en $(-\infty, -1)$

f convexa en $(-1, +\infty)$



b) Dom = $\mathbb{R} - \{-2\}$

Im = $\mathbb{R} - \{-2\}$

Corte con OX $\rightarrow (0, 0)$

Corte con OY $\rightarrow (0, 0)$

		−2		0	
Signo	–		+	0	–

f continua y derivable en su dominio

Asíntota vertical en $x = -2$

Asíntota horizontal en $y = -2$

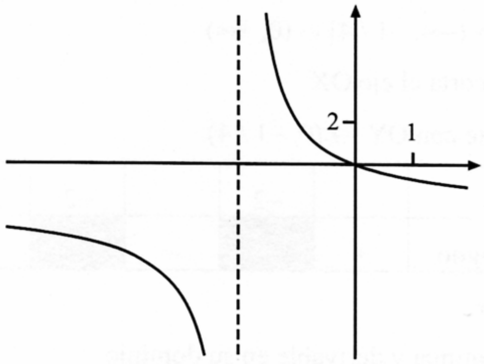
$$f'(x)=\frac{-4}{(x+2)^2}=0 \text{ no tiene solución}$$

f decrece en todo su dominio

$$f''(x)=\frac{8}{(x+2)^3}=0 \text{ no tiene solución}$$

f cóncava en $(-2, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, -2)$



c) Dom = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Im = $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

Corte con OX $\rightarrow (0, 0)$

Corte con OY $\rightarrow (0, 0)$

		−2		0		2	
Signo	+		–	0	–		+

f par

f continua y derivable en su dominio

Asíntota vertical en x = –2, x = 2

Asíntota horizontal en y = 1

$$f'(x) = \frac{-8x}{(x^2-4)^2} = 0 \to x = 0$$

f crece en (–∞, –2) ∪ (–2, 0)

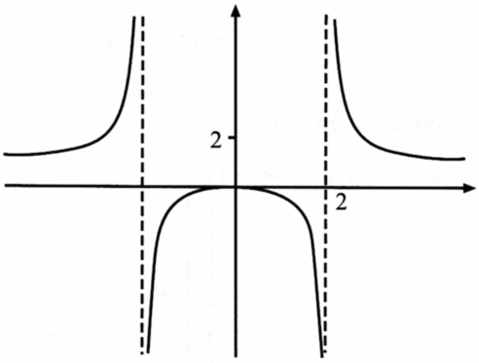
f decrece en (0, 2) ∪ (2, +∞)

Máximo en (0, 0)

$$f''(x) = \frac{8(3x^2+4)}{(x^2-4)^3} = 0 \text{ no tiene solución}$$

f cóncava en (–∞, –2) ∪ (2, +∞)

f convexa en (–2, 2)



d) Dom = ℝ

Im = (1, 2]

No corta el eje OX

Corte con OY → (0, 2)

f > 0 para todo *x*

f par

f continua y derivable en su dominio

Asíntota horizontal en y = 1

$$f'(x) = \frac{-8x}{(x^2+4)^2} = 0 \to x = 0$$

f crece en (–∞, 0)

f decrece en (0, +∞)

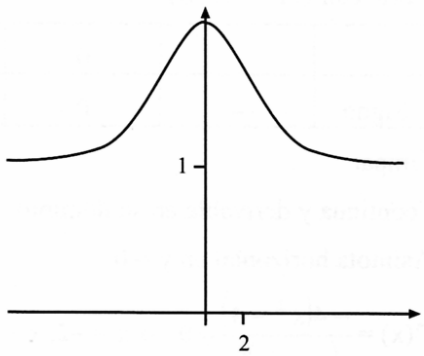
Máximo en (0, 2)

$$f''(x) = \frac{8(3x^2-4)}{(x^2+4)^3} = 0 \to x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

f cóncava en $(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}) \cup (\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty)$

f convexa en $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$

Punto de inflexión en $(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{7}{4})$, $(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{7}{4})$



e) Dom = ℝ – {0}

Im = ℝ

Corte con OX → $(-\sqrt[3]{2}, 0)$

No corte el eje OY

		$-\sqrt[3]{2}$		0	
Signo	+	0	–		+

f continua y derivable en su dominio

Asíntota vertical en x = 0

$$f'(x) = \frac{2(x^3-1)}{x^2} = 0 \to x = 1$$

f crece en (1, +∞)

f decrece en (–∞, 0) ∪ (0, 1)

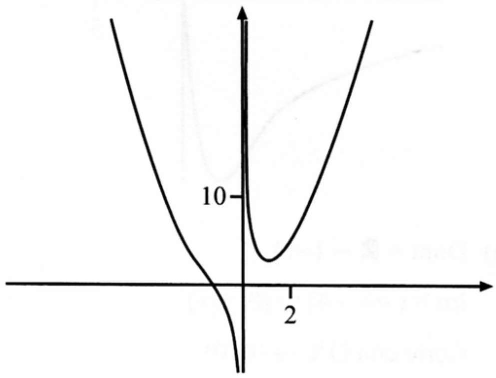
Mínimo en (1, 3)

$$f''(x) = \frac{2(x^3+2)}{x^3} = 0 \to x = -\sqrt[3]{2}$$

f cóncava en $(-\infty, -\sqrt[3]{2}) \cup (0, +\infty)$

f convexa en $(-\sqrt[3]{2}, 0)$

Punto de inflexión en $(-\sqrt[3]{2}, 0)$



f) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $[-1, 1]$

Corte con OX $\rightarrow (0, 0)$

Corte con OY $\rightarrow (0, 0)$

		0	
Signo	−	0	+

f impar

f continua y derivable en su dominio

Asíntota horizontal en $y = 0$

$$f'(x) = \frac{-4(x^2-4)}{(x^2+4)^2} = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 2$$

f crece en $(-2, 2)$

f decrece en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Máximo en $(2, 1)$

Mínimo en $(-2, -1)$

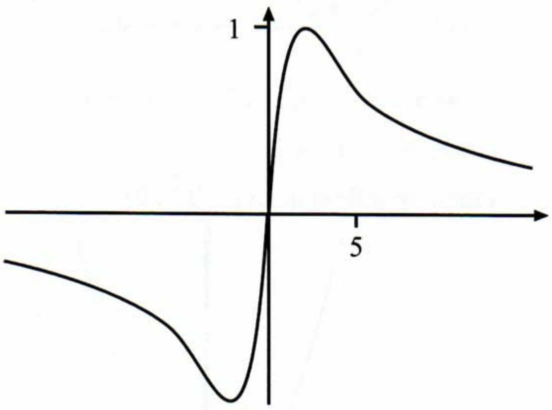
$$f''(x) = \frac{8x(x^2-12)}{(x^2+4)^3} = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \pm 2\sqrt{3}$$

f cóncava en $(-2\sqrt{3}, 0) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, 2\sqrt{3})$

Punto de inflexión en $\left(-2\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$(0, 0)$



27. a) Dom = $\mathbb{R} - \{-1\}$

Im = $(-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$

Corte con OX $\rightarrow (0, 0)$

Corte con OY $\rightarrow (0, 0)$

		−1		0	
Signo	−		+	0	+

f continua y derivable en su dominio

Asíntota vertical en $x = -1$

Asíntota oblicua en $y = x - 1$

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x = 0,\ x = -2$$

f crece en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

f decrece en $(-2, -1) \cup (-1, 0)$

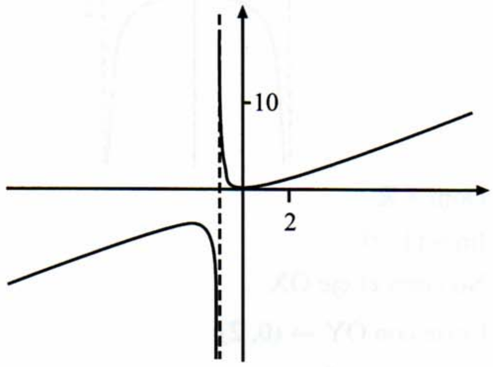
Máximo en $(-2, -4)$

Mínimo en $(0, 0)$

$$f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} = 0 \text{ no tiene solución}$$

f cóncava en $(-1, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, -1)$



b) Dom = $\mathbb{R} - \{2\}$

Im = $(-\infty, -8] \cup [0, +\infty)$

Corte con OX $\rightarrow (0, 0)$

Corte con OY $\rightarrow (0, 0)$

		0		2	
Signo	+	0	+		−

f continua y derivable en su dominio

Asíntota vertical en $x = 2$

Asíntota oblicua en $y = -x - 2$

$$f'(x) = -\frac{x(x-4)}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 4$$

f crece en $(0, 2) \cup (2, 4)$

f decrece en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

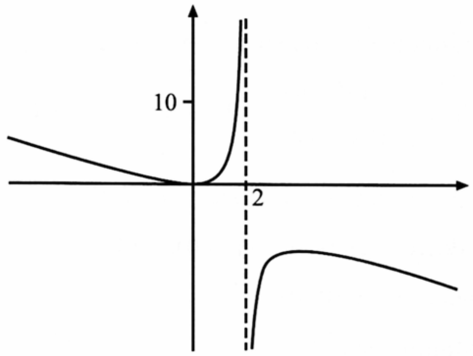
Máximo en $(4, -8)$

Mínimo en $(0, 0)$

$$f''(x) = \frac{-8}{(x-2)^3} = 0 \text{ no tiene solución}$$

f cóncava en $(-\infty, 2)$

f convexa en $(2, +\infty)$



c) Dom = $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

Im = $\mathbb{R}$

Corte con OX $\rightarrow (0, 0)$

Corte con OY $\rightarrow (0, 0)$

		-3		0		3	
Signo	$-$		$+$	0	$-$		$+$

f impar

f continua y derivable en su dominio

Asíntota vertical en $x = -3$, $x = 3$

Asíntota oblicua en $y = x$

$$f'(x) = -\frac{x^2(x^2-27)}{(x^2-9)^2} = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm 3\sqrt{3}$$

f crece en $(-\infty, -3\sqrt{3}) \cup (3\sqrt{3}, +\infty)$

f decrece en $(-3\sqrt{3}, -3) \cup (-3, 0) \cup (0, 3) \cup (3, 3\sqrt{3})$

Máximo en $(-3\sqrt{3}, -\frac{9\sqrt{3}}{2})$

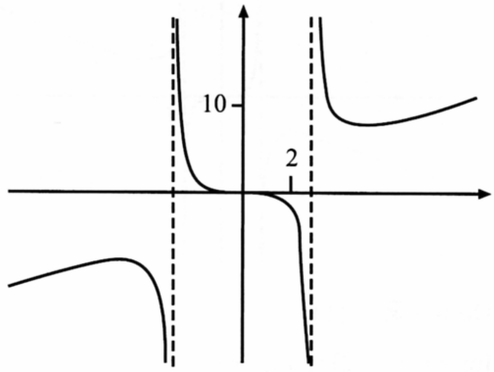
Mínimo en $(3\sqrt{3}, \frac{9\sqrt{3}}{2})$

$$f''(x) = \frac{18x(x^2+27)}{(x^2-9)^3} = 0 \rightarrow x = 0$$

f cóncava en $(-3, 0) \cup (3, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, -3)$ $(0, 3)$

Punto de inflexión $(0, 0)$



d) Dom = $\mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

Im = $\mathbb{R}$

Corte con OX $\rightarrow (0, 0)$

Corte con OY $\rightarrow (0, 0)$

		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
Signo	$-$		$+$	0	$-$		$+$

f impar

f continua y derivable en su dominio

Asíntota vertical en $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$

Asíntota oblicua en $y = x$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2} = 0 \rightarrow x = 0, x = -3, x = 3$$

f crece en $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

f decrece en $(-3, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, 0) \cup (0, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 3)$

Máximo en $(-3, -\frac{9}{2})$

Mínimo en $(3, \frac{9}{2})$

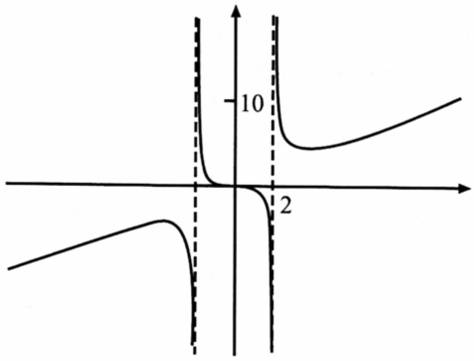
$$f''(x) = \frac{6x(x^2+9)}{(x^2-3)^3} = 0 \rightarrow x = 0$$

f cóncava en $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, -\sqrt{3})$ $(0, \sqrt{3})$

Punto de inflexión $(0, 0)$

12



e) Dom = $\mathbb{R} - \{1\}$

Im = $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

No corta el eje OX

Corte con OY $\rightarrow$ $(0, -2)$

		1	
Signo	–		+

f continua y derivable en su dominio

Asíntota vertical en $x = 1$

Asíntota oblicua en $y = x - 1$

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$$

f crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

f decrece en $(0, 1) \cup (1, 2)$

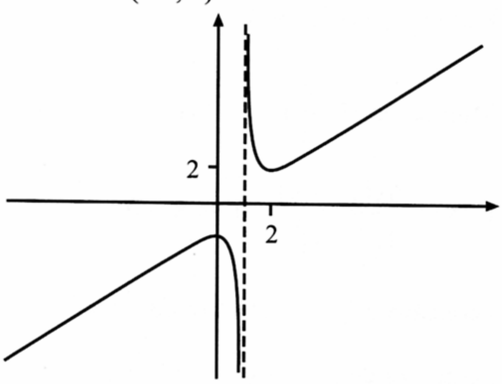
Máximo en $(0, -2)$

Mínimo en $(2, 2)$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} = 0 \text{ no tiene solución}$$

f cóncava en $(1, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, 1)$



f) Dom = $\mathbb{R} - \{-1/2\}$

Im = $(-\infty, 0 \cup [2, +\infty)$

Corte con OX$\rightarrow$ $(0, 0)$

Corte con OY $\rightarrow$ $(0, 0$

		$-1/2$		0	
Signo	+		–	0	–

f continua y derivable en su dominio

Asíntota vertical en $x = -1/2$

Asíntota oblicua en $y = -x + 1/2$

$$f'(x) = \frac{-4x(x+1)}{(2x+1)^2} = 0 \rightarrow x = 0, x = -1$$

f crece en $(-1, -1/2) \cup (-1/2, 0)$

f decrece en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$

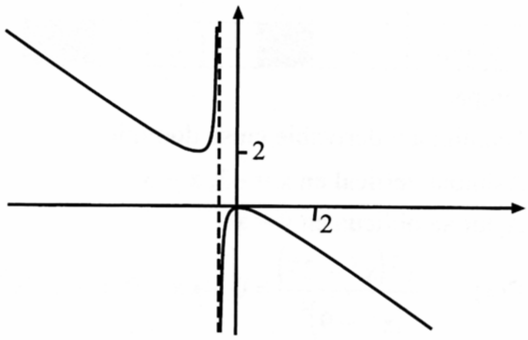
Máximo en $(0, 0)$

Mínimo en $(-1, 2)$

$$f''(x) = \frac{-4}{(2x+1)^3} = 0 \text{ no tiene solución}$$

f cóncava en $(-\infty, -1/2)$

f convexa en $(-1/2, +\infty)$



28. a) Dom = $(0, 2]$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2\sqrt{\frac{2}{x} - 1}} = 0 \text{ no tiene solución}$$

f es decreciente en todo su dominio

$$f''(x) = \frac{2(-3+2x)}{(x-2)x^3\sqrt{-\frac{x-2}{x}}} = 0 \rightarrow x = 3/2$$

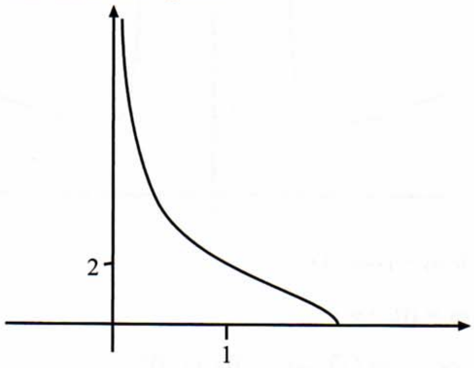
f cóncava en $(0, 3/2)$

f convexa en $(3/2, 2)$

12

Punto de inflexión en $(3/2, \dfrac{2\sqrt{3}}{3})$

b) La gráfica es la siguiente:



29. a) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $[1, +\infty)$

No corta el eje OX

Corte con OY $\rightarrow (0, \sqrt{2})$

$f > 0$ en todo $\mathbb{R}$

f continua y derivable en su dominio

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = 0 \rightarrow x = 1$

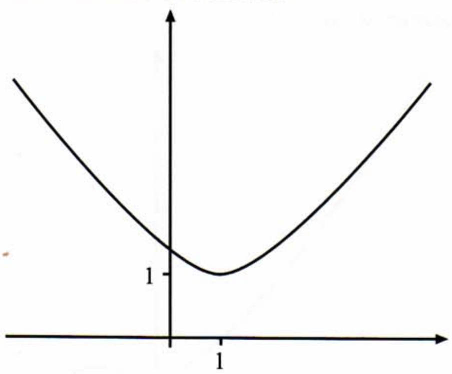
f crece en $(1, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, 1)$

Mínimo en $(1, 1)$

$f''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2 - 2x + 2)^3}} = 0$ no tiene solución

f cóncava en todo el dominio



b) Dom = $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

Im = $[0, +\infty)$

Corte con OX $\rightarrow (-2, 0), (2, 0)$

No corte el eje OY

		-2		2	
Signo	+	0		0	+

f par

f continua y derivable en su dominio

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

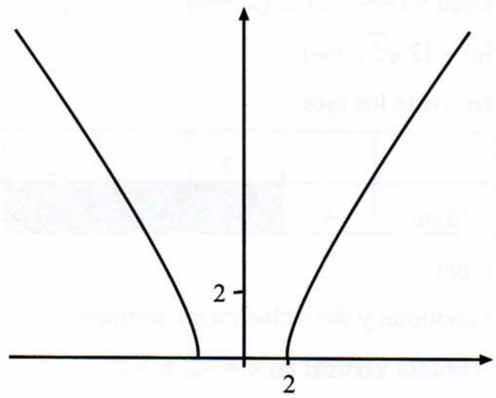
$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} = 0 \rightarrow x = 0$

f crece en $(2, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -2)$

$f''(x) = \dfrac{-4}{\sqrt{(x^2 - 4)^3}} = 0$ no tiene solución

f convexa en todo el dominio



c) Dom = $[-3, +\infty)$

Im = $[-2, +\infty)$

Corte con OX $\rightarrow (-3, 0), (0, 0)$

Corte con OX $\rightarrow (0, 0)$

		-3		0	
Signo		0	$-$	0	+

f continua y derivable en su dominio

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \dfrac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}} = 0 \rightarrow x = -2$

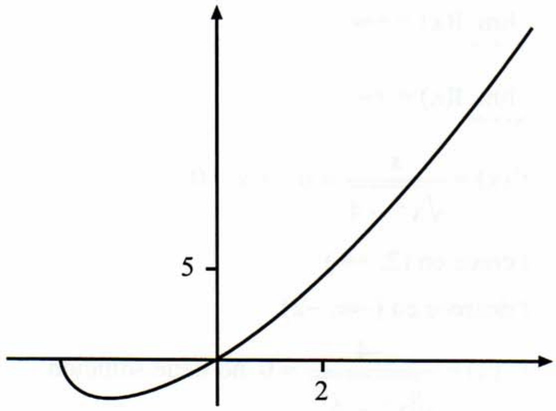
f crece en (–2, +∞)

f decrece en (–3, –2)

Mínimo en (–2, –2)

$f''(x) = \dfrac{3(x+4)}{4\sqrt{(x+3)^3}} = 0 \rightarrow x = -4$ que no pertenece al dominio de la función

f cóncava en todo el dominio



d) Dom = (–∞, –2) ∪ (2, +∞)

Im = [$2\sqrt{5}$, +∞)

No corta los ejes

		–2		2	
Signo	+				+

f par

f continua y derivable en su dominio

Asíntota vertical en x = –2, x = 2

Asíntota oblicua por la derecha, y = x.

Asíntota oblicua por la izquierda, y = –x.

$f'(x) = \dfrac{x(x^2-9)}{\sqrt{(x^2-4)^3}} = 0 \rightarrow x = -3,\ x = 0,\ x = 3$

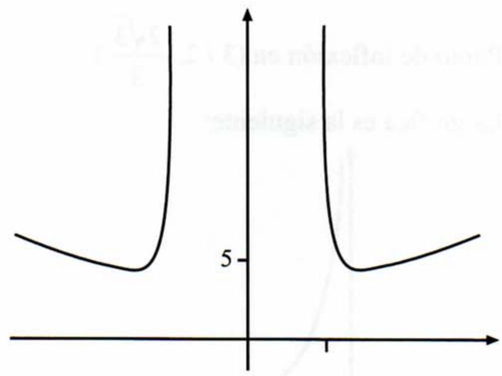
f crece en (–3, –2) ∪ (3, +∞)

f decrece en (–∞, –3) ∪ (2, 3)

Mínimo en (–3, $2\sqrt{5}$), (3, $2\sqrt{5}$)

$f''(x) = \dfrac{6(x^2+6)}{\sqrt{(x^2-4)^5}} = 0$ no tiene solución

f cóncava en todo el dominio



e) Dom = (–∞, 1]

Im = [0, +∞)

Corte con OX → (0, 0), (1, 0)

Corte con OY → (0, 0)

		0		1	
Signo	+	0	+	0	+

f continua pero no es derivable en x = 0.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = -\dfrac{x(3x-2)}{2\sqrt{-x^2(x-1)}} = 0 \rightarrow x = 2/3$

f crece en (0, 2 / 3)

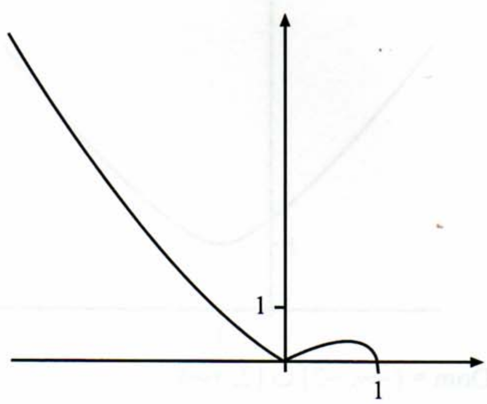
f decrece en (–∞, 0) ∪ (2 / 3, 1)

Máximo en $\left(\dfrac{2}{3}, \sqrt{4}\cdot\dfrac{\sqrt{27}}{27}\right)$

$f''(x) = -\dfrac{x(3x-4)}{4(x-1)\sqrt{-x^2(x-1)}} = 0 \rightarrow x = 4/3$ que no pertenece al dominio de *f*''

f cóncava en (–∞, 0)

f convexa en (0, 1)



12

© VICENS VIVES

f) Dom = [–4, 4]

Im = [0, 8]

Corte con OX → (–4, 0), (0, 0), (4, 0)

Corte con OY → (0, 0)

		–4		0		4	
Signo	+	0	+	0	+	0	+

f continua pero no es derivable en x = 0.

$$f'(x) = \frac{-2x\left(x^2-8\right)}{\sqrt{-x^2\left(x^2-16\right)}} = 0 \rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

f crece en $(-4,\ -2\sqrt{2}) \cup (0,\ 2\sqrt{2})$

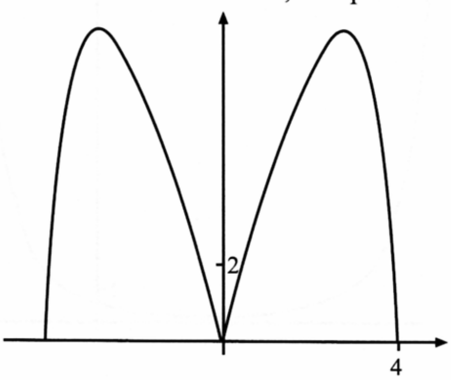
f decrece en $(-2\sqrt{2},\ 0) \cup (2\sqrt{2},\ 4)$

Máximo en $(-2\sqrt{2}, 8)$, $(2\sqrt{2}, 8)$

$$f''(x) = -\frac{-2x^2\left(x^2-24\right)}{\left(x^2-16\right)\sqrt{-x^2\left(x^2-16\right)}} = 0 \rightarrow x =$$

$= \pm 2\sqrt{6}$ que no pertenecen al dominio de la función

f convexa en todo el dominio, excepto en x = 0



30. a) Dom = (–∞, –2] ∪ [2, +∞)

Im = (–1, 1)

Corte con OX → (–2, 0), (2, 0)

No corta el eje OY

		–2		2	
Signo	–	0		0	+

f impar

f continua y derivable en su dominio

Asíntota horizontal en y = 1

$$f'(x) = \frac{4}{x^2\sqrt{x^2-4}} = 0 \text{ no tiene solución}$$

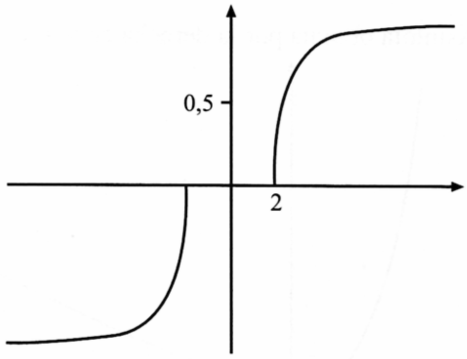
f es creciente en todo su dominio

$$f''(x) = \frac{-4\left(3x^2-8\right)}{x^3\sqrt{\left(x^2-4\right)^3}} = 0 \rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ que no}$$

pertenecen al dominio de la función

f cóncava en (–∞, –2)

f convexa en (2, +∞)



b) Dom = (–∞, –2) ∪ (2, +∞)

Im = (–∞, 0) ∪ (0, +∞)

No corta los ejes

		–2		2	
Signo	–				+

f impar

Asíntota vertical en x = –2, x = 2

Asíntota horizontal en y = 0

$$f'(x) = \frac{-2\left(x^2-2\right)}{x^2\sqrt{\left(x^2-4\right)^3}} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{2} \text{ que no}$$

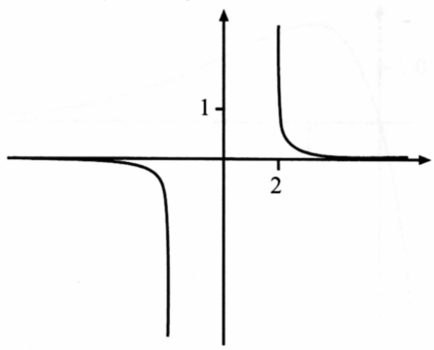
pertenecen al dominio

f decrece en todo su dominio

$$f''(x) = \frac{2\left(3x^4-10x^2+16\right)}{x^3\sqrt{\left(x^2-4\right)^5}} = 0 \text{ no tiene solución}$$

f cóncava en (2, +∞)

f convexa en (–∞, –2)



12

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

31. a) $f'(x) = 1 - e^{-x} = 0 \rightarrow x = 0$

f crece en $(0, +\infty)$

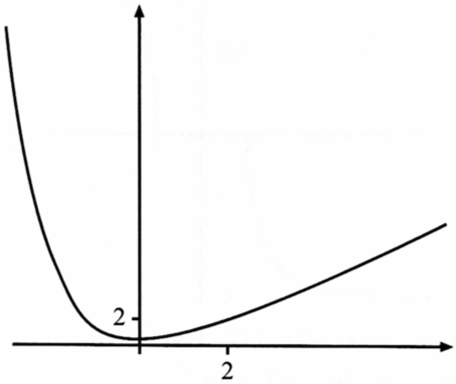
f decrece en $(-\infty, 0)$

Mínimo en $(0, 1)$

b) $f'(x) = e^{-x} = 0$ no tiene solución

f cóncava en todo su dominio

c) Asíntota oblicua por la derecha en $y = x$.



Página 269

32. a) $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = 0 \rightarrow x = 1$

f crece en $(-\infty, 1)$

f decrece en $(1, +\infty)$

Máximo en $(1, e^{-1})$

b) $f''(x) = -2e^{-x} + xe^{-x} = 0 \rightarrow x = 2$

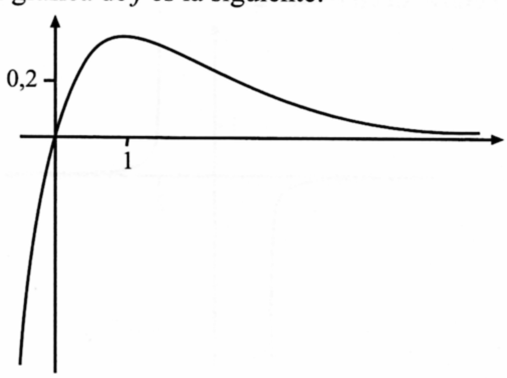
f cóncava en $(2, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, 2)$

Punto de inflexión en $(2, 2e^{-2})$

c) Asíntota horizontal por la derecha en $y = 0$

d) La gráfica de *f* es la siguiente:



e) Si consideramos cualquier *x*:

$$f(x) - f(1) = \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e} = \frac{xe - e^x}{e^{x+1}} \leq 0 \rightarrow \frac{x}{e^x} \leq \frac{1}{e}$$

Por lo tanto, $f(x) \leq f(1) = \frac{1}{e}$

f) Consideramos $g(x) = 3x - e^x$, continua:

$g(1) = 3 - e > 0$

$g(0) = -1 < 0$

Por el teorema de Bolzano, la función *g* tiene un cero en $(0, 1)$ y, por lo tanto, la ecuación tiene una solución.

33. a) $f'(x) = (2 + 2x)\,e^{2x+x^2} = 0 \rightarrow x = -1$

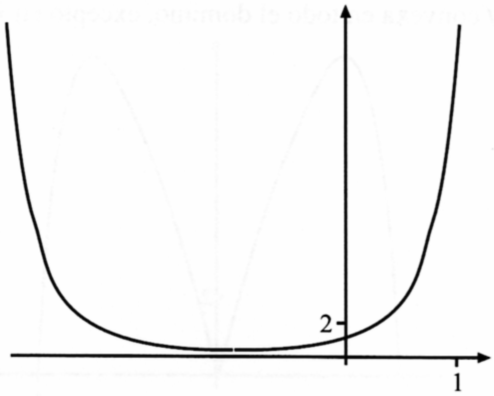
f crece en $(-1, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -1)$

Mínimo en $(-1, e^{-1})$

No tiene asíntotas.

b) La gráfica es la siguiente:



c) $e^{2x+x^2} = 2$

$$x^2 + 2x - \ln 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4\ln 2}}{2} =$$

$$= -1 \pm \sqrt{1 + \ln 2}$$

De las dos soluciones $x = -1 + \sqrt{1 + \ln 2}$ pertenece al intervalo $[0, 1]$

34. a) Asíntota horizontal por la derecha en $y = 0$.

b) $f'(x) = 2\,(x - 1)e^{-x} - (x - 1)^2\,e^{-x} = 0 \rightarrow x = 1, x =$ $= 3$

f crece en $(1, 3)$

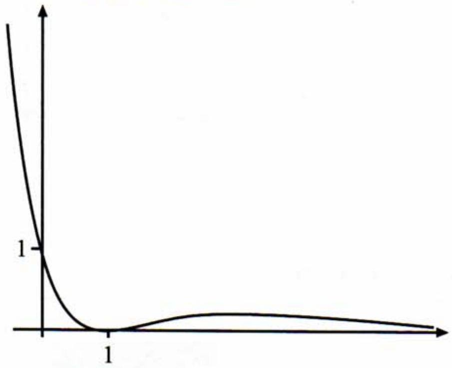
f decrece en $(3, +\infty) \cup (-3, 1)$

Máximo relativo en $(3, 4e^{-3})$

Mínimo relativo en $(1, 0)$, también es mínimo absoluto porque $f(x) \geq 0$ para todo x.

$f(-3) = 16e^3 \rightarrow$ Máximo absoluto en $(-3, 16e^3)$

b) La gráfica es la siguiente:



35. a) Dom $= \mathbb{R}$

No corta el eje OX

Corte con OY $\rightarrow (0, 1)$

b) $f''(x) = (-2x + 2)\, e^{-x^2+2x} = 0 \rightarrow x = 1$

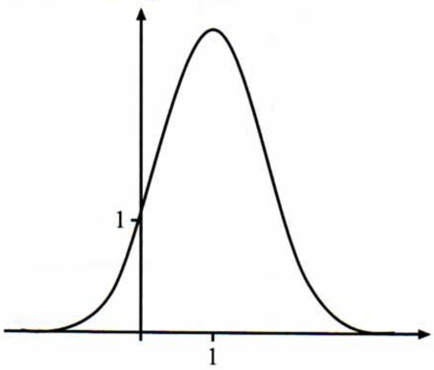
f crece en $(-\infty, 1)$

f decrece en $(1, +\infty)$

Máximo en $(1, e)$

c) Asíntota horizontal en $y = 0$

d) La gráfica es la siguiente:



36. a) Horizontal en $y = 1$

b) $f'(x) = \dfrac{(x^2-1)\, e^{\frac{x}{x^2+1}}}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = -1, x = 1$

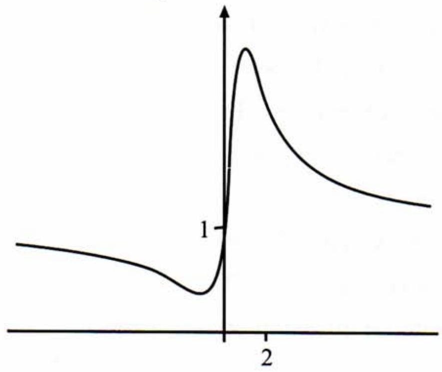
f crece en $(-1, 1)$

f decrece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Máximo en $(1, e^{1/2})$

Mínimo en $(-1, e^{-1/2})$

c) La gráfica es la siguiente:



37. a) Dom $= \mathbb{R}$

Im $= (0, +\infty)$

No corta el eje OX

Corte con OY $\rightarrow (0, 1)$

$f > 0$ para todo x

f continua y derivable en todo el dominio

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

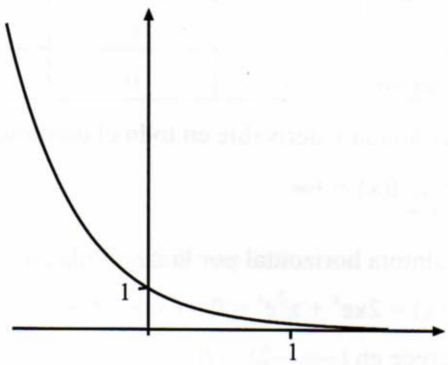
Asíntota horizontal por la derecha en $y = 0$.

$f'(x) = -2e^{-2x} < 0$ para todo x

f decrece en todo $\mathbb{R}$

$f''(x) = 4e^{-2x} > 0$ para todo x

f cóncava en todo su dominio



b) Dom $= \mathbb{R}$

Im $= [-e^{-1}, +\infty)$

Corte con OX $\rightarrow (0, 0)$

Corte con OY $\rightarrow (0, 0)$

		0	
Signo	–	0	+

f continua y derivable en todo el dominio

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota horizontal por la izquierda en y = 0

$f'(x) = e^x + xe^x = 0 \rightarrow x = -1$

f crece en $(-1, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -1)$

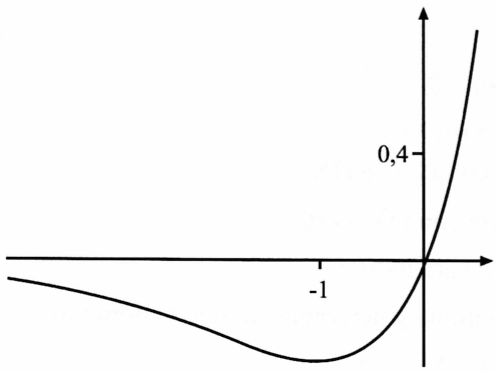
Mínimo en $(-1, -e^{-1})$

$f''(x) = 2e^x + xe^x = 0 \rightarrow x = -2$

f cóncava en $(-2, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, -2)$

Punto de inflexión en $(-2, -2e^{-2})$



c) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $[0, +\infty)$

Corte con OX $\rightarrow$ (0, 0)

Corte con OY $\rightarrow$ (0, 0)

		0	
Signo	+	0	+

f continua y derivable en todo el dominio

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota horizontal por la izquierda en y = 0

$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 0$

f crece en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$

f decrece en $(-2, 0)$

Máximo en $(-2, 4e^{-2})$

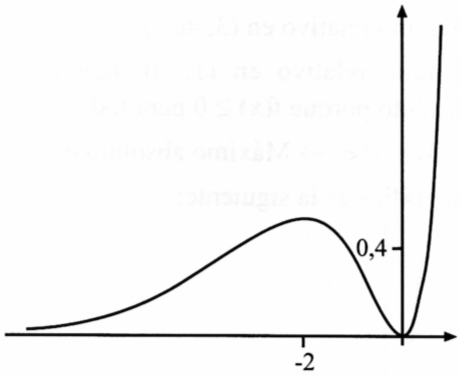
Mínimo en (0, 0)

$f''(x) = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x = 0 \rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$

f cóncava en $(-\infty, -2-\sqrt{2}) \cup (-2+\sqrt{2}, +\infty)$

f convexa en $(-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2})$

Punto de inflexión en $(-2-\sqrt{2},\ 0{,}38)$ y $(-2+\sqrt{2},\ 0{,}19)$



d) Dom = $\mathbb{R} - \{0\}$

Im = $[0, 1) \cup (1, +\infty)$

No corta los ejes

		0	
Signo	+		+

f continua y derivable en todo el dominio

Asíntota horizontal en y = 1

$f'(x) = -\dfrac{e^{1/x}}{x^2} < 0$ para todo *x*.

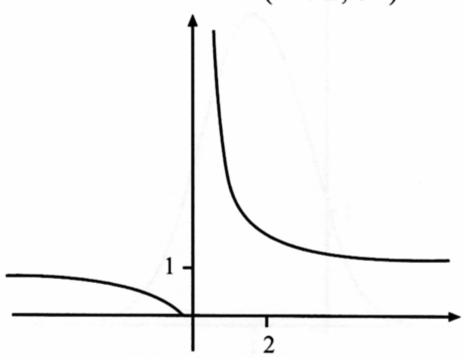
f decrece en todo su dominio

$f''(x) = \dfrac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}\ 0 \rightarrow x = -1/2$

f cóncava en $(-1/2, 0) \cup (0, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, -1/2)$

Punto de inflexión en $(-1/2, e^{-2})$



e) Dom = $\mathbb{R}$

Im = $[e^{-1}, +\infty)$

No corta el eje OX

Corte con OY $\rightarrow$ $(0, e^{-1})$

f > 0 en todo $\mathbb{R}$

f par

f continua y derivable en todo el dominio

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 2x\,e^{x^2-1} = 0 \rightarrow x = 0$

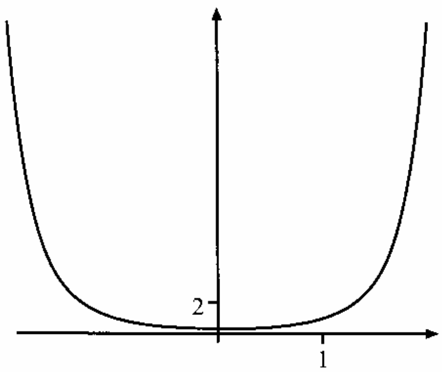
f crece en $(0, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, 0)$

Mínimo en $(0, e^{-1})$

$f''(x) = 2\,e^{x^2-1} + 4x^2\,e^{x^2-1} = 0$ no tiene solución

f cóncava en todo $\mathbb{R}$



f) Dom = $\mathbb{R} - \{1\}$

Im = $(0, +\infty)$

No corta el eje OX

Corte con OY $\rightarrow (0, 1)$

$f > 0$ en todo $\mathbb{R}$

f continua y derivable en todo el dominio

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota horizontal por la izquierda en $y = 0$

$$f'(x) = \frac{x(x-2)e^{\frac{x^2}{x-1}}}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2$$

f crece en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

f decrece en $(0, 1) \cup (1, 2)$

Máximo en $(0, 1)$

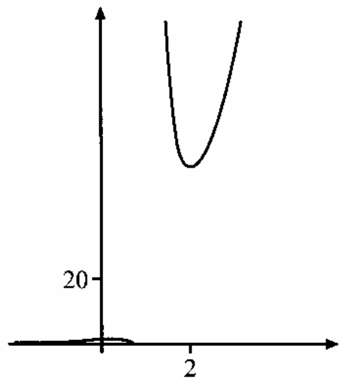
Mínimo en $(2, e^4)$

$$f''(x) = \frac{\left(-4x^3 + 4x^2 + 2x - 2 + x^4\right)e^{\frac{x^2}{x-1}}}{(x-1)^4} = 0 \rightarrow x$$

$= -0{,}68,\ x = 0{,}63$

f cóncava en $(-\infty, -0{,}68) \cup (0{,}63, 1) \cup (1, +\infty)$

f convexa en $(-0{,}68\ , 0{,}63\ )$



Punto de inflexión en $(-0{,}68; 0{,}76)$, $(0{,}63; 0{,}35)$

38. a) $f'(x) = \dfrac{-1 + 2\ln x}{x^3} = 0 \rightarrow x = e^{1/2}$

f crece en $(0, e^{1/2})$

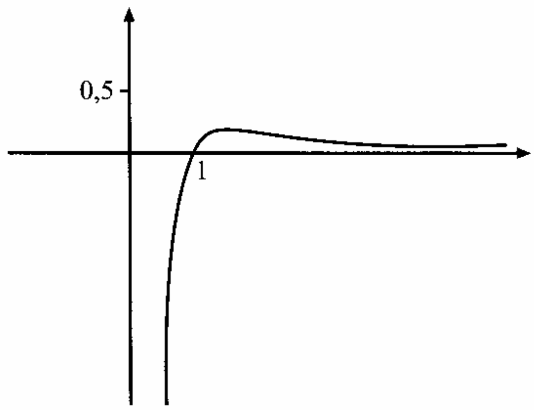
f decrece en $(e^{1/2}, +\infty)$

Máximo en $(e^{1/2}, 0{,}18)$

b) Vertical en $x = 0$

Horizontal por la derecha en $y = 0$

c) La gráfica es la siguiente:



39. a) $f'(x) = -\dfrac{x-1}{x} = 0 \rightarrow x = 1$

f crece en $(0, 1)$

f decrece en $(1, +\infty)$

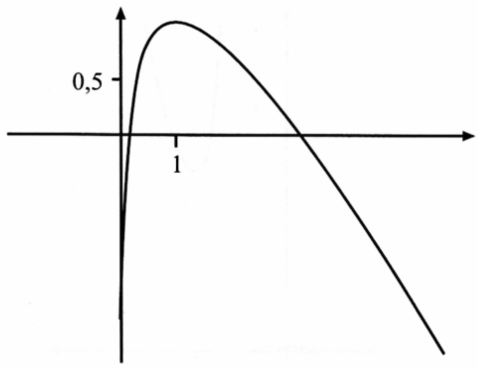
Máximo en $(1, 1)$

b) $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} = 0$ no tiene solución

f convexa en todo su dominio

c) No tiene asíntotas

d) La gráfica es la siguiente:



40. a) Si $a > 0 \rightarrow$ Dom = $(0, +\infty)$

Si $a < 0 \rightarrow$ Dom = $(-\infty, 0)$

b) No tiene asíntotas

c) $f'(x) = x \ln(x / a) + x / 2 = 0 \rightarrow x = ae^{-1/2}$

Si $a > 0$:

f crece en $(ae^{-1/2}, +\infty)$

f decrece en $(0, ae^{-1/2})$

Mínimo en $(ae^{-1/2}, -a^2/ 4e)$

Si $a < 0$:

f crece en $(ae^{-1/2}, 0)$

f decrece en $(-\infty, ae^{-1/2})$

Mínimo en $(ae^{-1/2}, -a^2/ 4e)$

d) $f''(x) = \ln(x / a) + 3 / 2 = 0 \rightarrow x = ae^{-3/2}$

Si $a > 0$:

f cóncava en $(ae^{-3/2}, +\infty)$

f convexa en $(0, ae^{-3/2})$

Punto de inflexión en $(ae^{-3/2}, -3a^2 e^{-3}/ 4)$

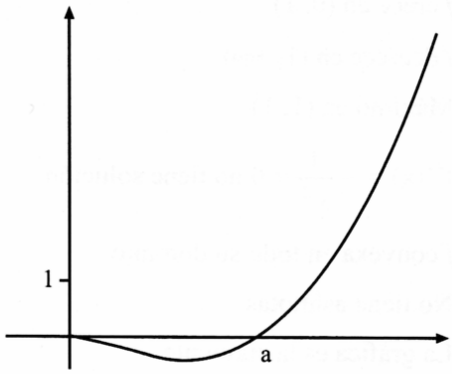
Si $a < 0$:

f cóncava en $(-\infty, ae^{-3/2})$

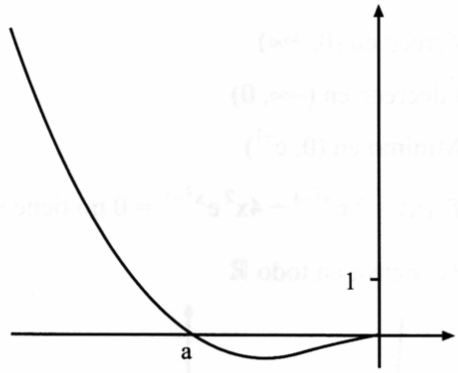
f convexa en $(ae^{-3/2}, 0)$

Punto de inflexión en $(ae^{-3/2}, -3a^2 e^{-3}/ 4)$

e) Si $a > 0$:



Si $a < 0$:



41. a) Dom = $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

b) $x = 1$

c) $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \rightarrow x = e$

f crece en $(e, +\infty)$

f decrece en $(0, 1) \cup (1, e)$

Mínimo en (e, e)

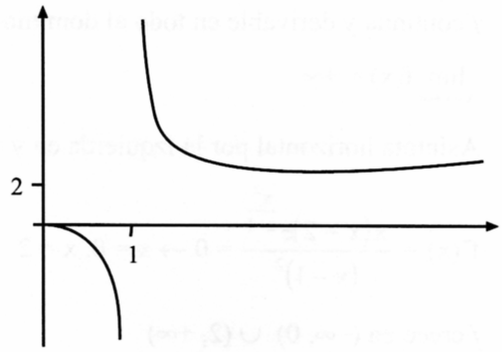
d) $f''(x) = -\dfrac{\ln x - 2}{x \ln^3 x} = 0 \rightarrow x = e^2$

f cóncava en $(1, e^2)$

f convexa en $(0, 1) \cup (e^2, +\infty)$

Punto de inflexión en $(e^2, e^2 / 2)$

e) La gráfica es la siguiente:



42. a) Dom = $(0, +\infty)$

Corte con OX $\rightarrow$ (e, 0)

No corta el eje OY

Asíntota vertical en $x = 0$

b) $f'(x) = -\dfrac{1}{x} = 0$ no tiene solución

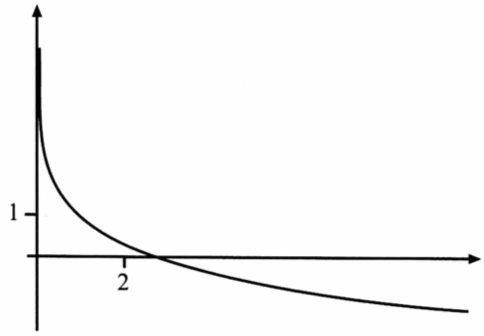
f decrece en todo su dominio

$f''(x) = \dfrac{1}{x^2}$

12

f cóncava en todo su dominio

c) La gráfica es la siguiente:



3. a) Dom = $(-1, +\infty)$

Im = $\mathbb{R}$

Corta el eje OX en (0, 0)

Corta el eje OY en (0, 0)

		−1		0	
Signo			−	0	+

f continua y derivable en todo el dominio

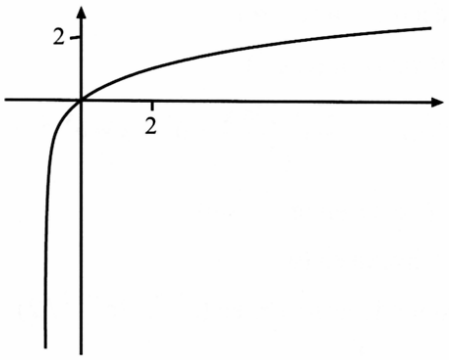
Asíntota vertical en x = −1

$f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)} = 0$ no tiene solución

f crece en todo su dominio

$f''(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} = 0$

f convexa en todo su dominio



b) Dom = $\mathbb{R} - \{0\}$

Im = $\mathbb{R}$

Corte con OX → (−1, 0), (1, 0)

No corta a OY

		−1		0		1	
Signo	−	0	+		+	0	−

f par

Asíntota vertical en x = 0

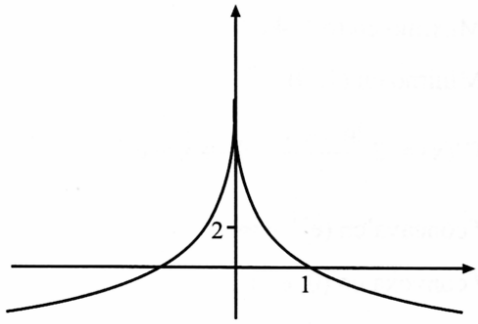
$f'(x) = \dfrac{-2}{x} = 0$ no tiene solución

f crece en $(-\infty, 0)$

f decrece en $(0, +\infty)$

$f''(x) = \dfrac{2}{x^2} = 0$ no tiene solución

f cóncava en todo su dominio



c) Dom = $(0, +\infty)$

Im = $[-e^{-1}, +\infty)$

Corte con OX → (1, 0)

		0		1	
Signo			−	0	+

f continua y derivable en todo el dominio

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \ln x + 1 = 0 \to x = e^{-1}$

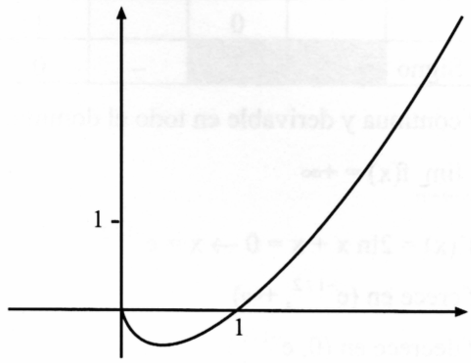
f crece en $(e^{-1}, +\infty)$

f decrece en $(0, e^{-1})$

Mínimo en $(e^{-1}, -e^{-1})$

$f''(x) = 1 / x = 0$ no tiene solución

f cóncava en todo su dominio



d) Dom = $(0, +\infty)$

Im = $[0, +\infty)$

Corte con OX → (1, 0)

12

$f > 0$ para todo $x \neq 1$

f continua y derivable en todo el dominio

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 2\ln x + \ln^2 x = 0 \to x = 1,\ x = e^{-2}$

f crece en $(0, e^{-2}) \cup (1, +\infty)$

f decrece en $(e^{-2}, 1)$

Máximo en $(e^{-2}, 4e^{-2})$

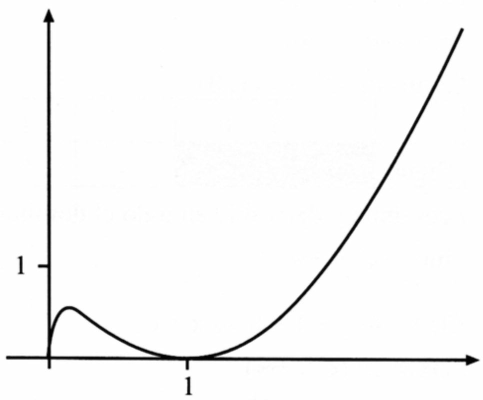
Mínimo en $(1, 0)$

$f''(x) = 2\dfrac{\ln x + 1}{x} = 0 \to x = e^{-1}$

f cóncava en $(e^{-1}, +\infty)$

f convexa en $(0, e^{-1})$

Punto de inflexión en (e^{-1}, e^{-1})



e) Dom = $(0, +\infty)$

Im = $[-e^{-1} / 2, +\infty)$

Corte con OX $\to$ (1, 0)

		0		1	
Signo			–	0	+

f continua y derivable en todo el dominio

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 2\ln x + x = 0 \to x = e^{-1/2}$

f crece en $(e^{-1/2}, +\infty)$

f decrece en $(0, e^{-1/2})$

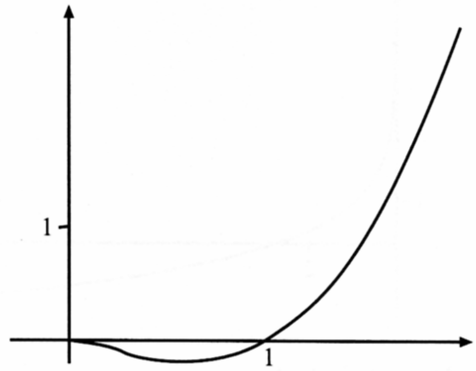
Mínimo en $(e^{-1/2}, -e^{-1} / 2)$

$f''(x) = 2\ln x + 3 = 0 \to x = e^{-3/2}$

f cóncava en $(e^{-3/2}, +\infty)$

f convexa en $(0, e^{-3/2})$

Punto de inflexión en $(e^{-3/2}, -3e^{-3/2})$



f) Dom = $(0, +\infty)$

Im = $(-\infty, e^{-1}]$

Corte con OX $\to$ (1, 0)

		0		1	
Signo			–	0	+

f continua y derivable en todo el dominio

Asíntota vertical en $x = 0$

Asíntota horizontal en $y = 0$

$f'(x) = -\dfrac{\ln x - 1}{x^2} = 0 \to x = e$

f crece en $(0, e)$

f decrece en $(e, +\infty)$

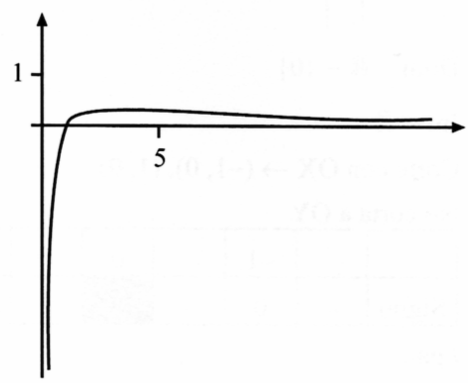
Máximo en (e, e^{-1})

$f''(x) = -\dfrac{-3 + 2\ln x}{x^3} = 0 \to x = e^{3/2}$

f cóncava en $(e^{3/2}, +\infty)$

f convexa en $(0, e^{3/2})$

Punto de inflexión en $(e^{3/2}, 3e^{-3/2} / 2)$



Página 270

44. $\text{Im} = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Corte con OX → $(3\pi / 4, 0), (7\pi / 4, 0)$

Corte con OY → $(0, 1)$

$f'(x) = \cos x - \text{sen } x = 0 \rightarrow x = \pi / 4, x = 5\pi / 4$

f crece en $(0, \pi / 4) \cup (5\pi / 4, 2\pi)$

f decrece en $(\pi / 4, 5\pi / 4)$

Máximo en $(\pi / 4, \sqrt{2})$

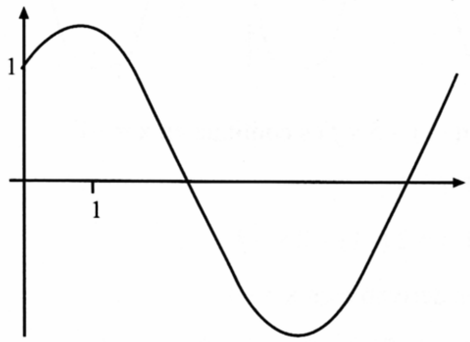
Mínimo en $(5\pi / 4, \sqrt{2})$

$f''(x) = -\text{sen } x - \cos x = 0 \rightarrow x = 3\pi / 4, x = 7\pi / 4$

f cóncava en $(3\pi / 4, 7\pi / 4)$

f convexa en $(0, 3\pi / 4) \cup (7\pi / 4, 2\pi)$

Punto de inflexión en $(3\pi / 4, 0), (7\pi / 4, 0)$



45. a) $\text{Im} = [-0{,}68; 6{,}97]$

Corte con OX → $(0, 0), (1{,}9; 0)$

Corte con OY → $(0, 0)$

$f'(x) = 1 - 2 \cos x = 0 \rightarrow x = \pi / 3, x = 5\pi / 3$

f crece en $(\pi / 3, 5\pi / 3)$

f decrece en $(0, \pi / 3) \cup (5\pi / 3, 2\pi)$

Máximo en $(5\pi / 3{,}6{,}97)$

Mínimo en $(\pi / 3, -0{,}68)$

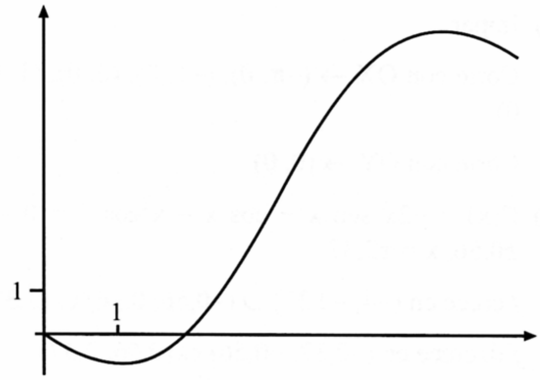
$f''(x) = 2 \text{ sen } x = 0 \rightarrow x = 0, x = \pi$

f cóncava en $(0, \pi)$

f convexa en $(\pi, 2\pi)$

Punto de inflexión en (π,π)

b) La gráfica es la siguiente:

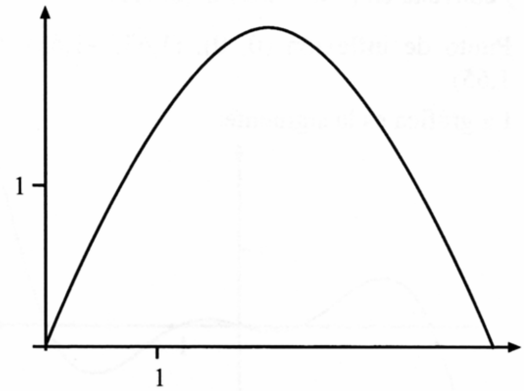


46. a) Corte con OX → $(0, 0), (4, 0)$

Corte con OY → $(0, 0)$

$$f'(x) = \frac{\pi \cos \frac{\pi x}{4}}{2} = 0 \rightarrow x = 2$$

Máximo en $(2, 2)$



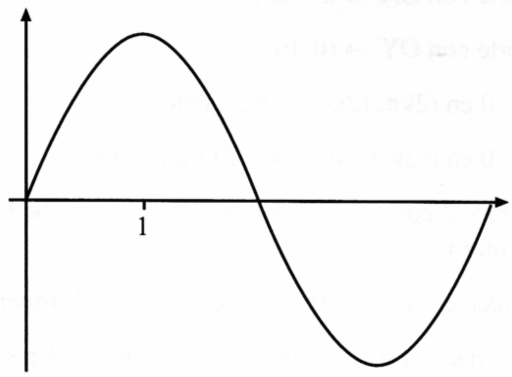
b) Corte con OX → $(0, 0), (2, 0), (4, 0)$

Corte con OY → $(0, 0)$

$$f'(x) = \frac{\pi \cos \frac{\pi x}{2}}{2} = 0 \rightarrow x = 1, x = 3$$

Máximo en $(1, 1)$

Mínimo en $(3, -1)$



47. a) Impar

Corte con OX → $(-\pi, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(\pi, 0)$

Corte con OY → $(0, 0)$

b) $f'(x) = -2x \text{ sen } x + \cos x - x^2 \cos x = 0 \rightarrow x = \pm 0{,}56$, $x = \pm 2{,}37$

f crece en $(-4, -2{,}37) \cup (-0{,}56, 0{,}56) \cup (2{,}37, 4)$

f decrece en $(-2{,}37, -0{,}56) \cup (0{,}56, 2{,}37)$

Máximo en $(-2{,}37, 3{,}22)$, $(0{,}56, 0{,}36)$

Mínimo en $(2{,}37, -3{,}22)$, $(-0{,}56, -0{,}36)$

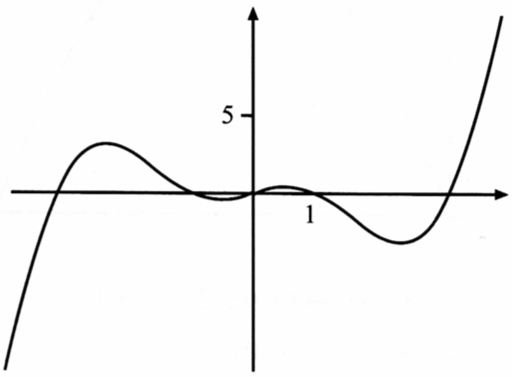
$f''(x) = -3\text{sen } x - 4x \cos x + x^2 \text{ sen } x = 0 \rightarrow x = 0$, $x = \pm 1{,}63$

f cóncava en $(-1{,}63, 0) \cup (1{,}63, 4)$

f convexa en $(-4, -1{,}63) \cup (0, 1{,}63)$

Punto de inflexión $(0, 0)$, $(1{,}63, -1{,}65)$, $(-1{,}63, 1{,}65)$

c) La gráfica es la siguiente:



48. Dom = $\mathbb{R}$

Im = $[-1, 3]$

Periodo = 2π

Corte con OX → $x = k\pi$, k entero

Corte con OY → $(0, 0)$

$f > 0$ en $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$, *k* entero

$f < 0$ en $((2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi)$, *k* entero

$f'(x) = 2 \cos x + 2\text{sen } x \cos x = 0 \rightarrow x = (2k + 1)\pi / 2$, *k* entero

f crece en $((2k + 1)\pi / 2, (2k + 3)\pi / 2)$, *k* impar

f decrece en $((2k + 1)\pi / 2, (2k + 3)\pi / 2)$, *k* par

Máximo en $((2k + 1)\pi / 2, 3)$, *k* par

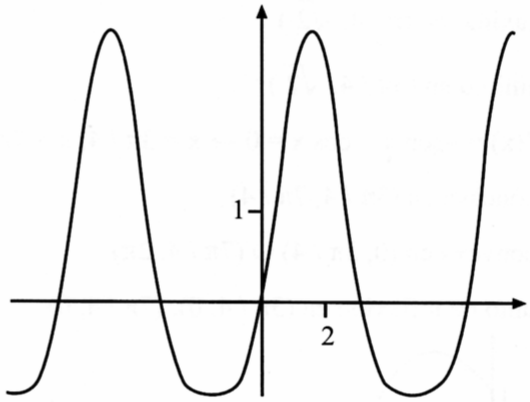
Mínimo en $((2k + 1)\pi / 2, -1)$, *k* impar

$f''(x) = -2 \text{ sen } x + 4 \cos^2 x - 2 = 0 \rightarrow x = -\pi / 2 + 2k\pi$, $x = \pi / 6 + 2k\pi$, $x = 5\pi / 6 + 2k\pi$, *k* entero

f cóncava en $(-\pi / 2 + 2k\pi, \pi / 6 + 2k\pi) \cup (5\pi / 6 + 2k\pi, 3\pi / 2 + 2k\pi)$, *k* entero

f convexa en $(\pi / 6 + 2k\pi, 5\pi / 6 + 2k\pi)$

Punto de inflexión $(-\pi / 2 + 2k\pi, -1)$, $(\pi / 6 + 2k\pi, 5 / 4)$, $(5\pi / 6 + 2k\pi, 5 / 4)$



49. a) No, $f(-1) = 5$ y *f* es continua en $x = -1$

b) $f'(-1^-) = 5$

$f'(-1^+) = 2(-1) - 2 = -4$

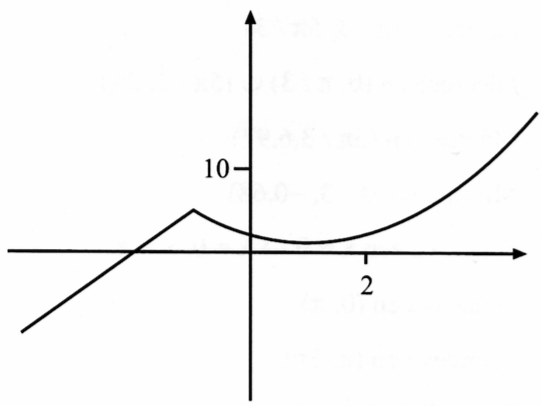
No es derivable en $x = -1$

c) Si $x > -1$, $f'(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$

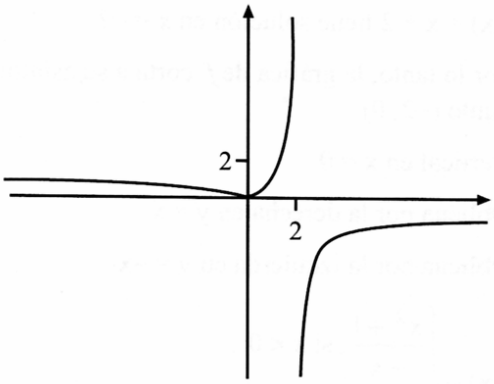
f tiene un mínimo relativo en $(1, 1)$

Aunque no es derivable en $x = -1$, la función tiene un máximo relativo en $(-1, 5)$

d) La gráfica es la siguiente:



50. La gráfica es la siguiente:



Dom = $\mathbb{R} - \{2\}$

Crece en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

Decrece en $(-\infty, 0)$

Asíntota vertical en $x = 2$

Asíntota horizontal por la derecha en $y = -1$, asíntota horizontal por la derecha en $y = 1$.

51. a) Dom = $\mathbb{R} - \{0\}$

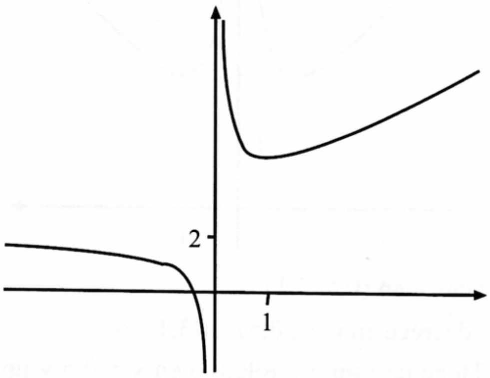
Continua en todo su dominio, $f(-1) = 1$

b) Horizontal por la izquierda en $y = 2$

Vertical en $x = 0$

Oblicua por la derecha en $y = x + 3$.

c) La gráfica es la siguiente:



52. a) *f* continua en $x = 2$ si:

$4a + 6 = 4 - 2b - 4$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3, \text{ si } x \le 2 \\ 2x - b, \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

$f'(2^-) = 4a + 3$

$f'(2^+) = 4 - b$

Por lo tanto, *f* es derivable si:

$$\begin{cases} 4a + 6 = 4 - 2b - 4 \\ 4a + 3 = 4 - b \end{cases};$$

$a = 2, b = -7$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x, \text{ si } x \le 2 \\ x^2 + 7x - 4, \text{ si } x > 2 \end{cases}$

Recta tangente:

$y - 26 = 13 (x - 3)$

Recta normal:

$y - 26 = -(x - 3) / 13$

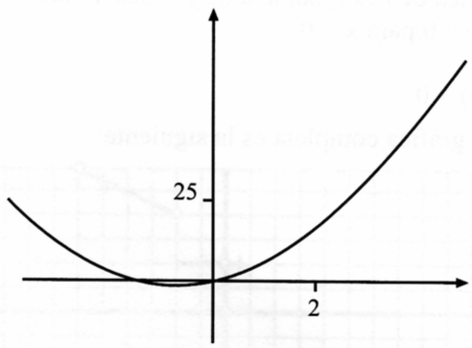
c) $f'(x) = \begin{cases} 4x + 3, \text{ si } x \le 2 \\ 2x + 7, \text{ si } x > 2 \end{cases}$

f crece en $(-3 / 4, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -3 / 4)$

d) Mínimo en $(-3 / 4, -9 / 8)$

e) La gráfica es la siguiente:



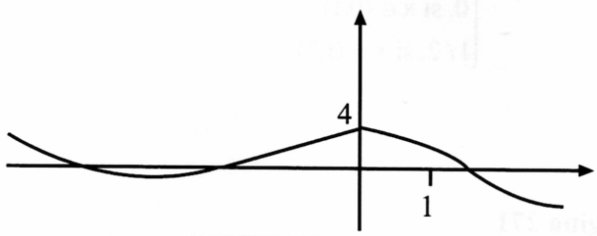
53. a) La función es continua si $a = 4$.

b) $f'(0^-) = 2$

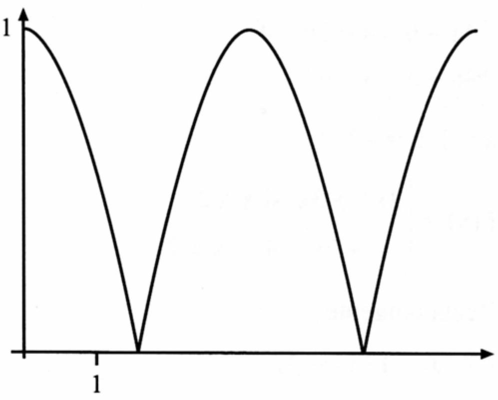
$f'(0^+) = 0$

f no es derivable en $x = 4$ para ningún valor de *a*.

c) La gráfica es la siguiente:



54. En la página 259 del libro de texto, tenemos la gráfica de *cos x*, por lo tanto, la gráfica de |*cos x*| es la siguiente:



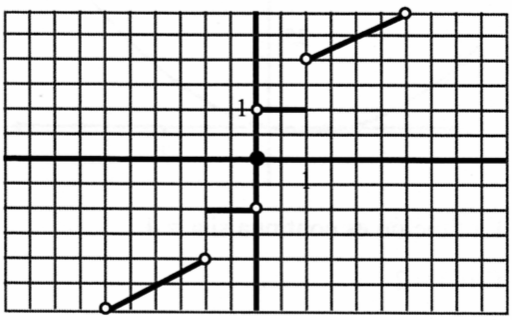
55. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} x}{2}, \text{ si } x\geq 0\\ \dfrac{\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}(-x)}{2}, \text{ si } x<0\end{cases}=$

$=\begin{cases}\operatorname{sen} x, \text{ si } x\geq 0\\ 0, \text{ si } x<0\end{cases}$

Por lo tanto, tomando como referencia la gráfica de *sen x* que aparece en la página 259 del libro de texto, la gráfica de *f* es igual a la de *y = sen x* para $x > 0$ y es la de *y* = 0 para $x < 0$.

56. a) $f(0) = 0$

b) La gráfica completa es la siguiente:



c) $f'(x)=\begin{cases}1/2, \text{ si } x\in(-3,-1)\\ 0, \text{ si } x\in(-1,0)\\ 0, \text{ si } x\in(0,1)\\ 1/2, \text{ si } x\in(1,3)\end{cases}$

Página 271

57. Actividad personal.

58. a) Oblicua en $y = x + 2$

b) $f(x) = x + 2$ tiene solución en $x = -2$

Por lo tanto, la gráfica de *f* corta a su asíntota en el punto $(-2, 0)$

59. a) Vertical en $x = 0$

Oblicua por la derecha en $y = x$

Oblicua por la izquierda en $y = -x$

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{-x}, \text{ si } x<0\\ \dfrac{x^2+1}{x}, \text{ si } x\geq 0\end{cases}$

$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2-1}{x^2}, \text{ si } x<0\\ \dfrac{x^2-1}{x^2}, \text{ si } x\geq 0\end{cases}$

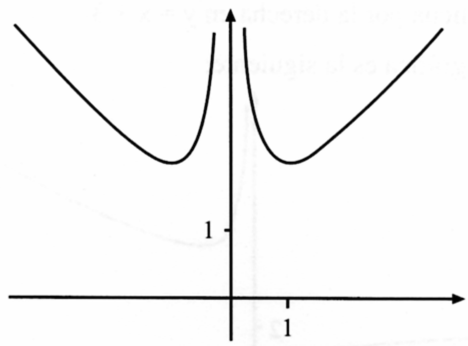
$f'(x) = 0 \rightarrow x = -1, x = 1$

f crece en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

f decrece en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

Mínimo en $(-1, 2), (1, 2)$

c) La gráfica es la siguiente:



60. a) *f* crece en $(0{,}5,\ 3{,}1)$

f decrece en $(-\infty,\ 0{,}5) \cup (3{,}1,\ +\infty)$

Tiene un mínimo relativo en $x = 0{,}5$ y un máximo en $x = 3{,}1$.

b) Es cóncava en $(-\infty, 2)$ y convexa en $(2, +\infty)$.

No tiene puntos de inflexión porque en $x = 2$, valor en el que la función cambia de curvatura, $f''(2)$ no es nula.

Autoevaluación

1. Dom = Im = $\mathbb{R}$

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Corta los ejes en (0, 0)

Continua y derivable en todo su dominio.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \to x = 1, x = 2$

f crece en $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

f decrece en (1, 2)

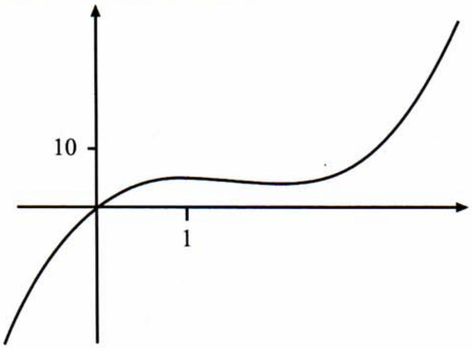
Máximo en (1, 5), (2, 4)

$f''(x) = 12x - 18 = 0 \to x = 3/2$

f cóncava en $(3/2, +\infty)$

f convexa en $(-\infty, 3/2)$

Punto de inflexión en $(3/2, 9/2)$



2. Actividad personal.

3. Asíntota vertical en x = 0.

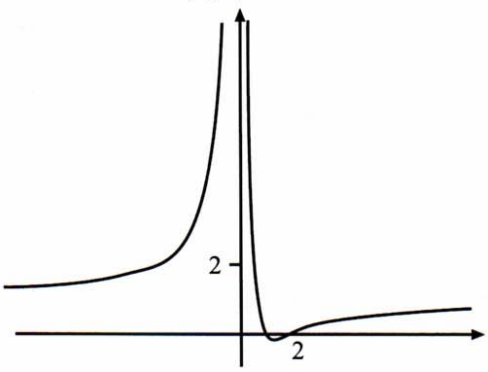
Asíntota horizontal en y = 1

$f'(x) = \dfrac{3x-4}{x^3} = 0 \to x = 4/3$

Mínimo en $(4/3, -1/8)$

$f''(x) = \dfrac{-6x+12}{x^4} = 0 \to x = 2$

Punto de inflexión en (2, 0)



4. Dom = $\mathbb{R} - \{1\}$

Im = $(-1, +\infty)$

Corta los ejes en (0, 0)

Continua y derivable en todo su dominio.

Asíntota vertical en x = 1.

Asíntota horizontal por la derecha en y = 1.

Asíntota horizontal por la izquierda en y = −1.

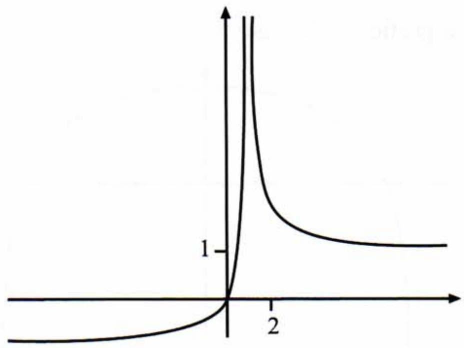
$f(x) = \dfrac{x}{|x-1|}$

f crece en $(-\infty, 1)$

f decrece en $(1, +\infty)$

f cóncava en $(-\infty, 1)$

f convexa en $(1, +\infty)$



5. a) Dom = $\mathbb{R}$

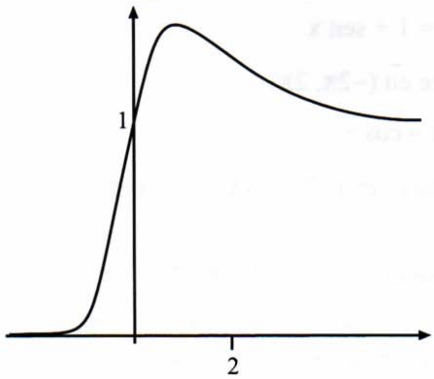
Corta OY en (0, 1)

Asíntota horizontal por la derecha en y = 1.

Asíntota horizontal por la izquierda en y = 0.

Máximo relativo en $(1, e^{1/e})$

b) La gráfica es la siguiente:



12

6. a) Dom = $\left(-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right)$

f par

Corta el eje OX en (–2, 0), (2, 0)

Corta el eje OY en (0, ln 5)

b) $f'(x) = \dfrac{-2x}{5 - x^2}$

f crece en $(-\sqrt{5}, 0)$

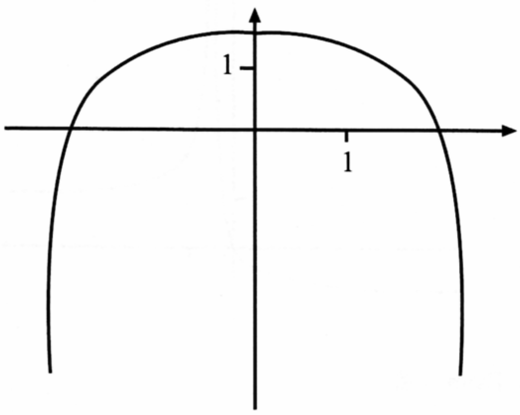
f decrece en $(0, \sqrt{5})$

Máximo en (0, ln 5)

c) $f''(x) = \dfrac{-2\left(x^2+5\right)}{\left(-5+x^2\right)^2} = 0$ no tiene solución

f convexa en todo su dominio

d) La gráfica es la siguiente:



7. Im = [–2π – 1, 2π – 1]

Corta el eje OX en (0,74, 0)

Corta el eje OY en (0, –1)

Continua y derivable en [–2π, 2π]

$f'(x) = 1 + \operatorname{sen} x$

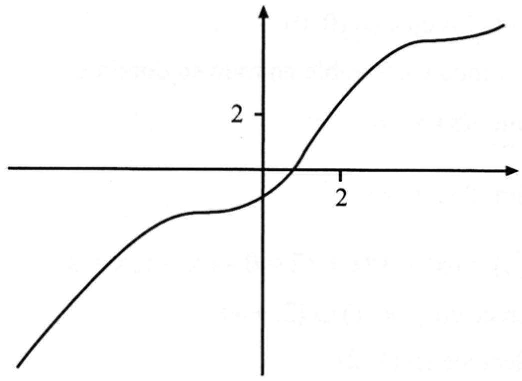
f crece en (–2π, 2π)

$f''(x) = \cos x$

f cóncava en $(-2\pi, -3\pi/2) \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi)$

f convexa en $(-3\pi/2, -\pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2)$

Puntos de inflexión en (–3π / 2, –3π / 2), (–π / 2, –π / 2), (π / 2, π / 2), (3π / 2, 3π / 2)



8. a) 2π es el periodo de *sen x* , por lo tanto, lo es también de *f*.

b) $f'(x) = \cos x\, e^{\operatorname{sen} x} = 0 \rightarrow x = \pi/2,\ x = 3\pi/2$

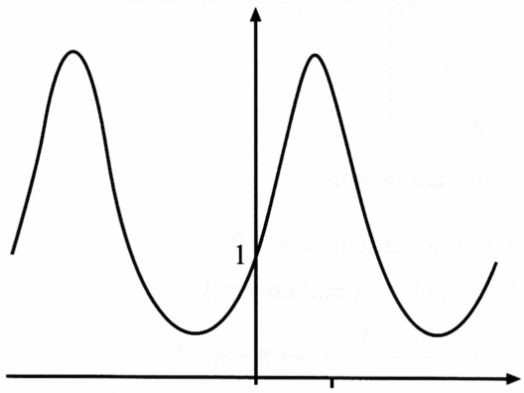
Máximo en (π / 2, e)

Mínimo en $(3\pi/2, e^{-1})$

$f''(x) = -e^{\operatorname{sen} x}(\operatorname{sen} x - \cos^2 x) = 0 \rightarrow x = 0{,}67,\ x = 2{,}48$

Punto de inflexión en (0,67, 1,86), (2,48, 1,86)

c) La gráfica es la siguiente:



9. Dom = $\mathbb{R}$

Im = [1, +∞)

Corta el eje OY en (0, 3)

Continua en todo el dominio pero no derivable en x = 2.

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \le 2 \\ \dfrac{x}{2}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

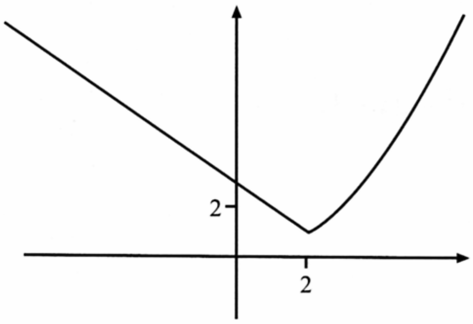
f crece en (2, +∞)

f decrece en (–∞, 2)

Mínimo en (2, 1)

$$f'(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \leq 2 \\ \dfrac{1}{2}, \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

Cóncava en $(2, +\infty)$



10. Dom = $\mathbb{R}$

Im = $(-1, 1)$

Corta los ejes en $(0, 0)$

Continua y derivable en todo su dominio

Asíntota horizontal por la izquierda en $y = -1$

Asíntota horizontal por la derecha en $y = 1$

Crece en todo el dominio

Cóncava en $(-\infty, 0)$

Convexa en $(0, +\infty)$

Punto de inflexión en $(0, 0)$