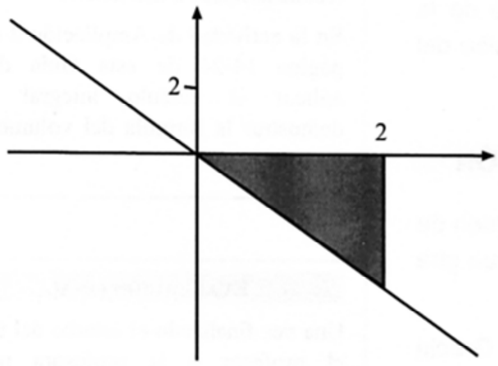
SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

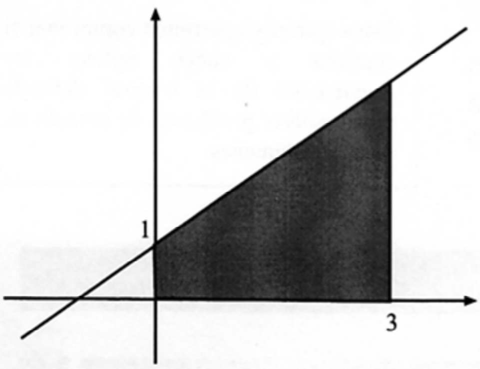
Págs. 298 a 317

Página 298

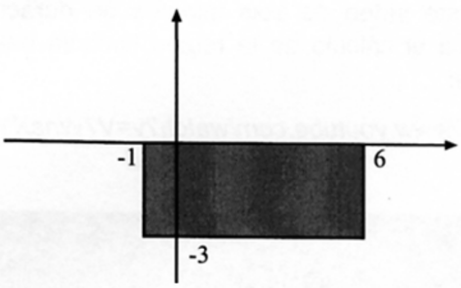
1. a) $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{2 \cdot 4}{2} = 4\ u^2$



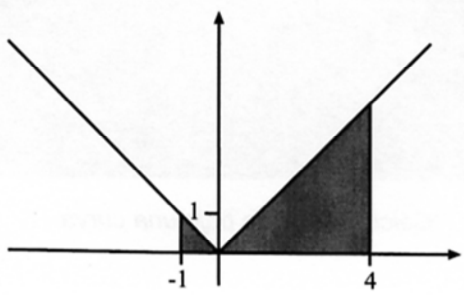
b) $A = \dfrac{b + B}{2} \cdot h = \dfrac{1+4}{2} \cdot 3 = \dfrac{15}{2}\ u^2$



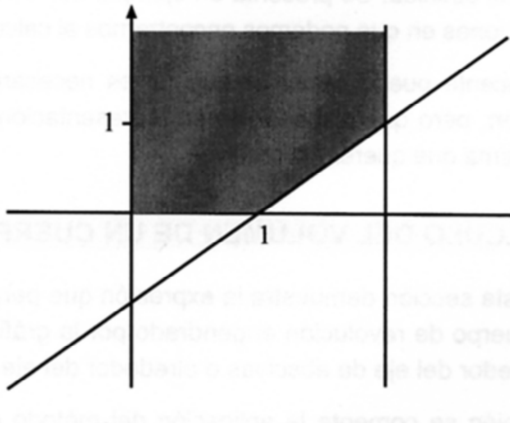
c) $A = b \cdot h = 3 \cdot 7 = 21\ u^2$



2. $A = \dfrac{1 \cdot 1}{2} + \dfrac{4 \cdot 4}{2} = \dfrac{17}{2}\ u^2$



3. $A = \dfrac{1 \cdot 1}{2} + \dfrac{1 \cdot 1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1\ \ u^2$



Página 299

4. $12 = (c^2 + 1)\,(3 - 0)$;

$c = \pm\sqrt{3}$ de las cuales sólo la positiva pertenece a [0, 3.]

5. En el primer caso:

$$\int_1^b \left(x^2 - 2x - 1\right)dx = 7{,}5(b-1);$$

$$\left[\frac{x^3}{3} - x^2 - x\right]_1^b = 7{,}5(b-1);$$

$$\frac{b^3}{3} - b_2 - b + \frac{5}{3} = 7{,}5(b-1);$$

b = –4,34; b = 1, b = 6,34 (la negativa no sirve)

En el segundo caso:

$$\int_1^b \left(x^2 + x - 2\right)dx = \frac{45}{2};$$

$$\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^b = \frac{45}{2};$$

$$\frac{b^3}{3} + \frac{7}{6} + \frac{b^2}{2} - 2b = \frac{45}{2};$$

b = 4

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Págs. 298 a 317

Página 300

6. $A(x)=\int_2^x\left(\frac{t}{2}+3\right)dt=\left[\frac{t^2}{4}+3t\right]_2^x=\frac{x^2}{4}+3x-7$

$A'(x)=\frac{x}{2}+3$

7. $f(t)=0\rightarrow t=-1$

Si $t>-1$, $f(t)<0$:

$A(x)=\left|\int_0^x(-1-t)dt\right|=\left|\left[-t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x\right|=\left|-x-\frac{x^2}{2}\right|$

$A(5)=|-35/2|=35/2\ u^2$

Página 302

8. a) $\left[\frac{3x^2}{2}-2x\right]_0^1=-\frac{1}{2}$

b) $\left[\frac{x^3}{3}-x^2-x\right]_0^2=-\frac{10}{3}$

c) $\left[\frac{1}{8}(1+2x)^4\right]_0^2=78$

d) $\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^1=-\frac{10}{3}$

9. a) $\left[\frac{1}{2}\text{sen }2x\right]_{-\pi}^{\pi}=0$

b) $\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi}=0$

10. a) $\left[\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$

b) $[\text{sen }x-x\cos x]_0^{\pi}=\pi$

c) $[\cos x+x\text{sen }x]_{\pi/2}^{3\pi/2}=-2\pi$

Página 303

11. $f(x)=0\rightarrow x=0,\ x=3$

$\int_0^3(-x^2+3x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^3=\frac{9}{2}$

Por lo tanto, $A=9/2\ u^2$.

Página 305

12. $f>0$ en todo su dominio

$A=\int_0^6\frac{1}{\sqrt{1+2x}}dx=\left[\sqrt{1+2x}\right]_0^6=\sqrt{13}-1\ u^2$

13. $f>0$ en $[2, 4]$

$A=\int_2^4\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=\left[\sqrt{x^2-1}\right]_2^4=\sqrt{15}-\sqrt{3}\ u^2$

14. $f(x)=g(x)\rightarrow x=0,\ x=8/5$

En el intervalo determinado por los puntos de corte, $f(x)>g(x)$:

$A=\int_0^{8/5}\left(-\frac{5}{2}x^2+4x\right)dx=\left[-\frac{5x^3}{6}+2x^2\right]_0^{8/5}=$

$=128/75\ u^2$

15. $f(x)=g(x)\rightarrow x=\pi/4$

$g>f$ en $(0,\pi/4)$

$g<f$ en $(\pi/4,\pi/2)$

$A=\int_0^{\pi/4}(\cos x-\text{sen }x)dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\text{sen }x-\cos x)dx=$

$=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}-2\ u^2$

16. $f(x)=g(x)\rightarrow x=0,\ x=4$

$f>g$ en $(0, 4)$

$A=\int_0^4(-2x^2+8x)dx=\left[-\frac{2}{3}x^2+4x^2\right]_0^4=\frac{64}{3}\ u^2$

17. $y'=2x$

Recta tangente en $x=-1$:

$y - (1 + k) = -2\,(x + 1) \rightarrow$ Si $k = 1$, pasa por O $\rightarrow$ $\rightarrow y = -2x$

Recta tangente en $x = 1$:

$y - (1 + k) = 2\,(x - 1) \rightarrow$ Si $k = 1$, pasa por O $\rightarrow$ $\rightarrow y = 2x$

Por lo tanto, $y = x^2 + 1$.

En (0, 1), *f* es cóncava, por lo tanto, las tangentes quedan por debajo de la gráfica de la función:

$$A = \int_{-1}^{0} \left[(x^2+1)+2x\right]dx + \int_{0}^{1}\left[(x^2+1)-2x\right]dx =$$

$$= \left[x^2 + \frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{0} + \left[-x^2 + \frac{x^3}{3} + x\right]_{0}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{2}{3}\ u^2$$

Página 307

18. $V = \pi \int_0^{\pi} (\text{sen } x)^2\, dx = \left[\pi\left(-\frac{1}{2}\cos x \text{sen } x + \frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi} =$

$$= \frac{\pi^2}{2}\ u^3$$

19. $V = \pi \int_1^{5} (2)^2\, dx = [\pi(4x)]_1^5 = 16\pi\ u^3$

20. La inversa es $y^{-1} = \ln x$:

$$V = \pi \int_1^{e} \ln^2 x\, dx = \left[\pi\left(\ln^2 x - 2x \ln x + 2x\right)\right]_1^e =$$

$$= \pi\,(e - 2)\ u^3$$

Página 309

21. $x(10) = \int_0^{10} \sqrt{2+t}\,dt = \left[\frac{2}{3}(x+2)^{3/2}\right]_0^{10} =$

$$= 16\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{2} = 25{,}83\ m$$

Página 310

22. $W = \int_2^{5} -\frac{10}{x^2}\,dx = \left[\frac{10}{x}\right]_2^5 = -3\ J$

Página 314

1. Sea $a < b$:

$$\int_a^b k f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

Si $a < c < b$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ y es continua:

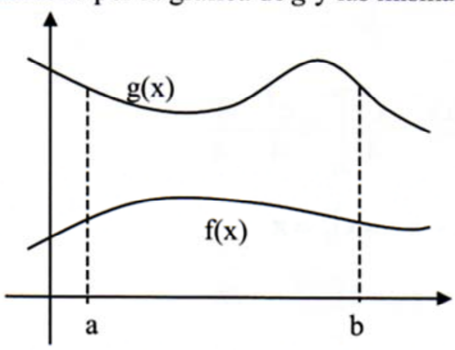
$$0 \leq \int_a^b f(x)dx$$

En este caso, $\int_a^b f(x)dx$ es el área de la región del plano limitada por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y las rectas $x = a$, $x = b$.

Si $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$ y es continua:

En este caso, $-\int_a^b f(x)dx$ es el área de la región del plano limitada por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y las rectas $x = a$, $x = b$.

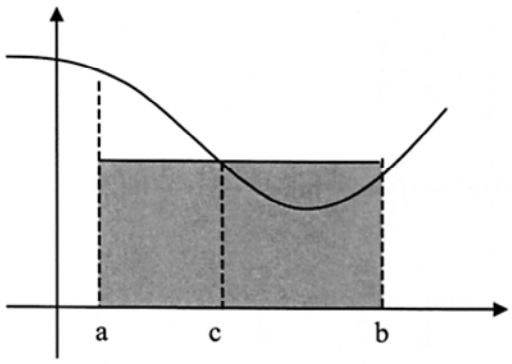
2. En la figura se observa que el área de la región delimitada por el eje de abscisas, las rectas $x = a$, $x = b$ y la gráfica de *f* es menor que la región que el área delmitidad por la gráfica de *g* y las mismas rectas:



SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

3. Si f es continua en [a, b], existe al menos un $c \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$



4. Para todo $x \in [a, b]$:

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Se verifica:

$A'(x) = f(x), x \in [a, b]$

5. Sea f una función continua en [a, b] y sea F una primitiva:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

En el caso del ejemplo:

$$\int_{-1}^1 (5x-1)dx = \left[\frac{5x^2}{2} - x\right]_{-1}^1 = -2$$

6. Si $x_1, ..., x_n$ son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$:

$$A = \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + ... + \left|\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx\right|$$

7. Sean f y g estas dos funciones.

Si $x_1, ..., x_n$ son las soluciones de la ecuación $f(x) = g(x)$, la región del plano limitada por las gráficas de las funciones es:

$$A = \left|\int_{x_1}^{x_2} (f(x)-g(x))dx\right| + ... + \left|\int_{x_{n-1}}^{x_n} (f(x)-g(x))dx\right|$$

8. $V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx$

9. a) Verdadera.

b) Falsa. Por ejemplo, $1 = x \cdot (1 / x)$, si se integra entre $x = 1$ y $x = 2$, se observa que la afirmación es falsa pues:

$1 \neq (3 / 2) \cdot \ln 2$

c) Falsa. Por ejemplo, si una función es impar, la integral entre de k y $-k$ es nula.

d) Verdadera.

e) Verdadera.

10. En $x \in [0, 1] \to x^2 \leq x$

Por lo tanto:

$0 \leq x^2 \operatorname{sen}^2 x \leq x \operatorname{sen}^2 x$

$$\int_0^1 x^2 \operatorname{sen}^2 x dx \leq \int_0^1 x \operatorname{sen}^2 x dx$$

11. Por ejemplo, $\dfrac{2}{\pi(x^2+1)} < \dfrac{1}{x^4+1}$

Y como $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{\pi(x^2+1)}dx = \left[\frac{2\arctan}{\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

Se verifica:

$\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^4+1}dx$, vamos más allá de la desigualdad del enunciado y demostramos la desigualdad estricta.

12. a) $\left[x^2 + 4x\right]_0^2 = 12$

b) $\left[\dfrac{x^4}{4} + x^2 + x\right]_0^2 = 10$

c) $\left[\dfrac{x^3}{3} + x\right]_0^6 = 78$

d) $\left[\dfrac{x^3}{3} - x^2 + 4x\right]_1^3 = \dfrac{26}{3}$

e) $\left[\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^2 = \dfrac{21}{2}$

f) $\left[\dfrac{x^4}{4} - \dfrac{5x^2}{2} + x\right]_{-2}^2 = 4$

13. a) $\left[(x+1)^3\right]_{-1}^2 = 27$

b) $\left[x^3 - 2x^2 - x\right]_{-1}^1 = 0$

c) $\left[3x^2-4x\right]_{-2}^{4}=12$

d) $\left[x^3-x\right]_0^1=0$

e) $\left[x^3-x^2\right]_{-1}^{1}=2$

f) $\left[\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3}\right]_0^2=-\dfrac{4}{3}$

14. a) $\int_{-2}^{2}|x|dx=-\int_{-2}^{0}xdx+\int_0^2 xdx=2\int_0^2 xdx=2\left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^2=4$

b) $\int_{-1}^{2}\left(x^2+|x|\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(x^2-x\right)dx+\int_0^2\left(x^2+x\right)dx=$

$=\left[\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}\right]_0^2=\dfrac{5}{6}+\dfrac{14}{3}=\dfrac{11}{2}$

c) $\int_0^5 2x|4-x|dx=\int_0^4 2x(4-x)dx-\int_4^5 2x(4-x)dx=$

$=\left[-\dfrac{2x^3}{3}+4x^2\right]_0^4-\left[-\dfrac{2x^3}{3}+4x^2\right]_4^5=\dfrac{64}{3}+\dfrac{14}{3}=$

$=26$

d) $\int_{-2}^{2}\left(6-x^2-|x|\right)dx=\int_{-2}^{0}\left(6-x^2+x\right)dx+$

$+\int_0^2\left(6-x^2-x\right)dx=$

$=\left[6x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0}+\left[6x-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}\right]_0^2=$

$=\dfrac{22}{3}+\dfrac{22}{3}=\dfrac{44}{3}$

15. a) $\dfrac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^3=\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{1}{2}\ln 5$

b) $\dfrac{1}{2}\left[\ln(2x+1)\right]_2^4=\ln 3-\dfrac{1}{2}\ln 5$

c) $\left[x-\dfrac{1}{2}\ln\left(4x^2+1\right)\right]_0^1=1-\dfrac{1}{2}\ln 5$

d) $\left[\dfrac{3}{2}x^2+6\ln\left(x^2-4\right)\right]_{-1}^{1}=0$

e) $\left[x-\dfrac{1}{x}\right]_1^3=\dfrac{8}{3}$

f) $\left[5x-3\operatorname{arctg}x\right]_0^1=5-\dfrac{3\pi}{4}$

16. a) $\left[e^x+x\right]_{-2}^{0}=3-e^{-2}$

b) $\left[\dfrac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1=\dfrac{e}{2}-\dfrac{1}{2}$

c) $\left[\dfrac{1}{3}\ln\left(3e^x-1\right)\right]_0^2=\dfrac{1}{3}\ln\left(3e^2-1\right)-\dfrac{1}{3}\ln(2)$

d) $\left[\dfrac{e^{2x}}{2}-e^x\right]_0^1=\dfrac{e^2}{2}-e+\dfrac{1}{2}$

17. a) $\left[-2\cos\dfrac{x}{2}\right]_{\pi/3}^{\pi}=\sqrt{3}$

b) $\left[\dfrac{-2}{\pi}\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\right]_0^2=\dfrac{4}{\pi}$

c) $\left[\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)\right]_0^{\pi/4}=\dfrac{1}{2}$

d) $\left[\dfrac{3}{2}\cos x\operatorname{sen}x+\dfrac{3x}{2}\right]_0^{\pi}=\dfrac{3\pi}{2}$

e) $\left[-\ln\left(\cos(x^2)\right)\right]_0^1=-\ln(\cos 1)$

f) $\left[\ln(2-\cos x)\right]_0^{\pi/3}=\ln 3-\ln 2$

18. a) $\left[\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{2}\right]_{-1}^{1}=\dfrac{\pi}{3}$

b) $\left[\operatorname{arc\,sen}2x\right]_0^{1/4}=\dfrac{\pi}{6}$

c) $\left[\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}(3x)\right]_0^{1/3}=\dfrac{\pi}{12}$

d) $\left[\operatorname{arc\,sen}2x\right]_0^{1/4}=\dfrac{\pi}{6}$

Página 315

19. a) $\left[\left(x^2-2x+2\right)e^x\right]_1^2=2e^2-e$

b) $\left[\left(-x^2-2x-3\right)e^{-x}\right]_0^1 = -6e^{-1}+3$

c) $\left[\left(-x^2-2x-7\right)e^{-x}\right]_{-1}^3 = -22e^{-3}+6e$

d) $\left[e^{2x}\right]_{-1}^0 + \left[-e^{-2x}+1\right]_0^1 = -2e^{-2}+2$

20. $\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^a = 1;$

$\frac{1}{2}\ln\left(a^2+1\right)=1;$

$\ln(a^2+1)=2;$

$a^2=e^2-1;$

$a=\pm\sqrt{e^2-1}$

La solución que buscamos es $a=\sqrt{e^2-1}$.

21. $\left[-\frac{1}{e^x+1}\right]_0^a = \frac{1}{4};$

$\frac{1}{2}\frac{-1+e^a}{e^a+1}=\frac{1}{4}$

$-2+2e^a=e^a+1;$

$e^a=3 \rightarrow a=\ln 3$

22. $A=\left|\int_4^6 -\sqrt{4x}\,dx\right| = \left|\left[-\frac{4}{3}\sqrt{x^3}\right]_4^6\right| = \left|-8\sqrt{6}+\frac{32}{3}\right| =$

$= 8\sqrt{6}-\frac{32}{3}\ u^2$

23. $A=\int_0^3 f(x)dx = \left[2\sqrt{x+1}\right]_0^3 = 2\ u^2$

24. $A=\left|\int_{-4}^{-2} f(x)dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}\ln(x^2-1)\right]_{-4}^{-2}\right| = \left|-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{5}\right| =$

$=\frac{1}{2}\ln 5\ u^2$

25. La función es impar:

$A=2\int_0^2 f(x)dx = 2\left[\ln\left(x^2+4\right)\right]_0^2 = 2\cdot\frac{\ln 2}{2} = \ln 2\ u^2$

26. $A=\int_1^2 f(x)dx = \left[x\ln x - x\right]_1^2 = -1+2\ln 2\ u^2$

27. $A=\int_1^e f(x)dx = \left[\frac{-\ln x}{x}-\frac{1}{x}\right]_1^e = -2e^{-1}+1\ u^2$

28. $A=\left|\int_\pi^{3\pi/2} f(x)dx\right| = \left[-\cos x\right]_\pi^{3\pi/2} = \left|-1\right| = 1\ u^2$

29. $f(x)=0 \rightarrow x=-1/2$

$A=\left|\int_{-2}^{-1/2} f(x)dx\right| + \int_{-1/2}^0 f(x)dx = \left|\left[-\frac{1}{x^2+x+1}\right]_{-2}^{-1/2}\right| +$

$+\left[-\frac{1}{x^2+x+1}\right]_{-1/2}^0 = \left|-1\right| + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\ u^2$

30. $A=\int_0^{\pi/6} f(x)dx = \left[-\frac{1}{6}\cos(3x)\mathrm{sen}(3x)+\frac{x}{2}\right]_0^{\pi/6} =$

$=\frac{\pi}{12}u^2$

31. $f(x)=0 \rightarrow x=0$

$A=\left|\int_{-1}^0 f(x)dx\right| + \int_0^1 f(x)dx = \left|\left[\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}\right]_{-1}^0\right| +$

$+\left[\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1 = \left|-\frac{1}{4}+\frac{3e^{-2}}{4}\right| + \frac{e^2}{4}+\frac{1}{4} =$

$=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3e^{-2}}{4}\ u^2$

32. $f(x)=0 \rightarrow x=-2,\ x=2$

$A=\int_{-2}^2 f(x)dx = \left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^2 = \frac{32}{3}\ u^2$

33. $f(x)=0 \rightarrow x=-2,\ x=0,\ x=1$

$A=\left|\int_{-2}^0 f(x)dx\right| + \int_0^1 f(x)dx = \left|\left[\frac{x^5}{x}-x^3+x^2\right]_{-2}^0\right| +$

$$+\left[\frac{x^5}{x}-x^3+x^2\right]_0^1=\left|-\frac{28}{5}\right|+\frac{1}{5}=\frac{29}{5}\ u^2$$

34. $f(x)=0 \rightarrow x=-\sqrt{5}$, $x=0$, $x=\sqrt{5}$

f es impar

$$A=2\int_0^{\sqrt{5}} f(x)dx=\left[-\frac{1}{3}\left(5-x^2\right)\right]_0^{\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{3}\ u^2$$

35. $f(x)=0 \rightarrow x=-2\sqrt{3}$, $x=0$, $x=2\sqrt{3}$

$$A=\left|\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} f(x)dx\right|=\left[x-8\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right]_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}}=$$

$$=4\sqrt{3}-\frac{16\pi}{3}\ u^2$$

36. $f(x)=0 \rightarrow x=-1$, $x=0$, $x=1$

$$A=\int_{-1}^{1} f(x)dx=\left[\frac{1}{3}\frac{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-x^4}}{x}\right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}\ u^2$$

37. $f(x)=0 \rightarrow x=0$, $x=1$

$$A=\left|\int_0^1 f(x)dx\right|=\left|\left[\frac{2\sqrt{x^5}}{3}-\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^1\right|=\left|-\frac{4}{15}\right|=\frac{4}{15}\ u^2$$

38. Las funciones se cortan en $x=-4$, $x=1$:

$$A=\int_{-4}^{1}\left(4-x^2-3x\right)dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}\right]_{-4}^{1}=\frac{125}{6}u^2$$

39. Las funciones son impares y se cortan en $x=-\sqrt{2}$, $x=0$, $x=\sqrt{2}$:

$$A=2\int_0^{\sqrt{2}}\left(2x-x^3\right)dx=\left[x^2-\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}}=2\ u^2$$

40. Las funciones se cortan en $x=-4$, $x=0$:

$$A=\int_{-4}^{0}\left(4-x^2-4x-4\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}-2x^2\right]_{-4}^{0}=\frac{32}{3}u^2$$

41. Sea $y=mx+n$ la recta:

$$\begin{cases}0=m+n\\4=3m+n\end{cases}\rightarrow m=2,\ n=-2\rightarrow y=2x-2$$

Las funciones se cortan en $x=1$, $x=3$:

$$A=\int_1^3\left(2x-2-x^2+2x-1\right)dx=$$

$$=\left[2x^2-3x-\frac{x^3}{3}\right]_1^3=\frac{4}{3}u^2$$

42. $\sqrt{x-2}=2 \rightarrow x=6$

$\sqrt{x-2}$ no está definida en (0, 2), por lo tanto, el área que buscamos es la siguiente::

$$A=\int_0^2 2dx+\int_2^6\left(2-\sqrt{x-2}\right)dx=$$

$$=[2x]_0^2+\left[2x-\frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3}\right]_2^6=4+\frac{8}{3}=\frac{20}{3}u^2$$

43. $f(x)=1 \rightarrow x=1$, $x=3$

$$A=\int_0^1 f(x)dx+\int^{2,5} dx=\left[-\frac{1}{x-2}\right]_0^1+[x]_1^{2,5}=0{,}5+$$

$$+1{,}5=2\ u^2$$

44. $f(x)=g(x)\rightarrow x=0$, $x=-1$, $x=3$

$$A=\int_{-1}^{0}\left(x^3-3x-2x^2\right)dx+\int_0^3\left(2x^2-x^3+3x\right)dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^3=$$

$$=\frac{7}{12}+\frac{45}{4}=\frac{71}{6}\ u^2$$

45. a) $f(x)=g(x)\rightarrow x=0$, $x=4$

$$A=\int_0^4\left(g(x)-f(x)\right)dx=\left[x^2-\frac{x^3}{6}\right]_0^4=\frac{16}{3}\ u^2$$

b) $f(x)=g(x)\rightarrow x=0$, $x=4$

$$A=\int_0^4\left(f(x)-g(x)\right)dx=\left[4x^2-\frac{2x^3}{3}\right]_0^4=\frac{64}{3}\ u^2$$

c) $f(x) = g(x) \rightarrow x = -2,\ x = 1$

$$A = \int_{-2}^{1}(g(x) - f(x))dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{9}{2}$$

u^2

d) $f(x) = g(x) \rightarrow x = 0,\ x = 4$

$$A = \int_0^4 (g(x) - f(x))dx = \left[\frac{4}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{12}\right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

u^2

46. $f(x) = g(x) \rightarrow x = -2,\ x = 1$

$$A = \int_{-2}^{1}(f(x) - g(x))dx = \left[4x - \frac{2}{3}x^3 - x^2\right]_{-2}^{1} =$$

$= 9\ u^2$

47. $f(x) = g(x) \rightarrow x = 0,\ x = 4$

$$A = \int_0^4 (g(x) - f(x))dx = \left[\frac{x^3}{2} - 3x^2\right]_0^4 = 16\ u^2$$

Página 315

48. $f(x) = g(x) \rightarrow x = 0,\ x = 6$

$$A = \int_0^6 (g(x) - f(x))dx =$$

$$= \left[\frac{(14x+16)^{3/2}}{42} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^6 = \frac{72}{7}\ u^2$$

49. $x^{10} = x^{11} \rightarrow x = 0,\ x = 1$

$$A = \int_0^1 (x^{10} - x^{11})dx = \left[\frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{12}}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{132}\ u^2$$

50. Numeramos las áreas de izquierda a derecha:

$$A_1 = \int_{-1}^{0}\left(\frac{2x+2}{1-x}\right)dx = [-2x - 4\ln(-1+x)]_{-1}^{0} =$$

$= -2 + 4 \ln 2\ u^2$

$$A_2 = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2\ u^2$$

$$A_3 = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}\ u^2$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = -2 + 4 \ln 2 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 4 \ln 2$$

u^2

51. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

La pendiente de la recta $x - 2y + 8 = 0$ es $1 / 2$.

Por lo tanto, debemos encontrar *x* tal que:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 4$$

La recta tangente a $y = \sqrt{4x}$ en esta abscisa es:

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$A = \int_0^4 \left(\frac{x}{2} + 2 - \sqrt{4x}\right)dx = \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{4x^{3/2}}{3}\right]_0^4 =$$

$$= \frac{4}{3}\ u^2$$

52. $f'(x) = \cos x$

Tangente en $x = 0 \rightarrow y = x$

Tangente en $x = \pi \rightarrow y = -(x - \pi) \rightarrow y = -x + \pi$

$$A = \int_0^{\pi/2}(x - \text{sen } x)dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(-x + \pi - \text{sen } x)dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + \cos\right]_0^{\pi/2} + \left[-\frac{x^2}{2} + \pi x + \cos\right]_{\pi/2}^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} - 1 + \frac{\pi^2}{8} - 1 = \frac{\pi^2}{4} - 2\ u^2$$

53. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

Tangente a *f* en $x = 0 \rightarrow y = 2x$

La tangente y la función se cortan en $x = 0$, $x = 3$:

$$A = \int_0^3 (2x - x^3 + 3x^2 - 2x)dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + x^3\right]_0^3 = \frac{27}{4}\ u^2$$

54. $f(-1) = e^{-1}$

$f(1) = e$

Buscamos la ecuación de la recta que contiene la cuerda. Sea $y = mx + n$ la ecuación de la recta que contiene la cuerda, esta recta debe cumplir:

$$\begin{cases} e^{-1} = -m + n \\ e = m + n \end{cases} \rightarrow m = \frac{-e^{-1}+e}{2},\ n = \frac{e^{-1}+e}{2}$$

$$y = \frac{-e^{-1}+e}{2}x + \frac{e^{-1}+e}{2}$$

$$A = \int_{-1}^{1}\left(\frac{-e^{-1}+e}{2}x + \frac{e^{-1}+e}{2} - e^x\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\left(\frac{-e^{-1}+e}{2}\right) + x\left(\frac{e^{-1}+e}{2}\right) - e^x\right]_{-1}^{1} =$$

$$= 2e^{-1}\ u^2$$

55. $f'(x) = \text{sen } x + x\cos x$

$f'(\pi) = -\pi$

Recta tangente $\rightarrow y = -\pi(x-\pi) \rightarrow y = -\pi x + \pi^2$

$$A = \int_0^{\pi}\left(-\pi x + \pi^2 - x\,\text{sen } x\right)dx =$$

$$= \left[-\frac{\pi x^2}{2} + \pi^2 x - \text{sen } x + x\cos x\right]_0^{\pi} =$$

$$= -\pi + \frac{\pi^2}{3}u^2$$

56. $A = \int_1^2\left(\frac{x^3+3x+1}{x}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} + 3x + \ln x\right]_1^2 =$

$$= \frac{16}{3} + \ln 2\ \ u^2$$

57. $f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} + C,\ x \le 1 \\ \ln x + D,\ x > 1 \end{cases}$

Pasa por $(-1,-4) \rightarrow -4 = -2 - \frac{1}{2} + C = -\frac{5}{2} + C$

Derivable $\rightarrow$ Continua en $x = 1 \rightarrow 2 - \frac{1}{2} + C = D$

$C = -3/2,\ D = -4$

58. $\ln x,\ x \in [1, +\infty)$

59. $A(x) = -\int_1^x(\ln t - t + 1)dt = \left[-t\ln t + \frac{t^2}{2}\right]_1^x =$

$$= -x\ln x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

Finalmente:

$$A(e) = e - \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}\ \ u^2$$

60. a) $A(k) = \int_1^k\left(\sqrt{x-1}\right)dt = \left[-\frac{2}{3}(x-1)^{3/2}\right]_1^k =$

$$= \frac{2}{3}(k-1)^{3/2}$$

b) $10 = \frac{2}{3}(k-1)^{3/2} \rightarrow k = 1 + 15^{2/3}$

61. $V = \pi\int_0^6\left(\frac{x}{2}+4\right)^2 dx = \pi\left[\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}+4\right)^3\right]_0^6 =$

$$= 186\pi\ u^3$$

62. La circunferencia de radio 10 y centro O tiene ecuación:

$$x^2 + y^2 = 10^2$$

Por lo tanto, el semicírculo que queda por encima del eje OX tiene ecuación:

$$y = +\sqrt{100 - x^2}$$

Y, por lo tanto:

$$V = \pi\int_{-0}^{10}\left(100 - x^2\right)dx = \pi\left[100x - \frac{x^3}{3}\right]_{-10}^{10} = \frac{4000}{3}\pi\ u^3$$

63. $V = \pi\int_{1/2}^{2}\left(x^3\right)^2 dx = \pi\left[\frac{x^7}{7}\right]_{1/2}^{2} = \frac{16383\pi}{896}\ u^3$

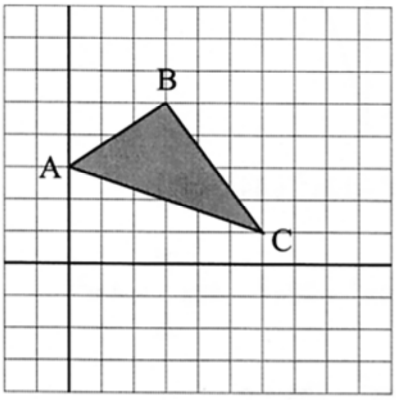
64. $V = \pi\int_0^{\pi/2}(3\cos x)^2 dx = \pi\left[9\left(\frac{\cos x\,\text{sen } x}{2} + \frac{x}{2}\right)\right]_0^{\pi/2} =$

$$= \frac{9\pi^2}{4}\ u^3$$

65. $y = +\sqrt{9 - \frac{9x^2}{16}}$

$$V=\pi\int_{-4}^{4}\left(9-\frac{9x^2}{16}\right)dx=\pi\left[9x-\frac{3x^3}{16}\right]_{-4}^{4}=48\pi\ u^3$$

66. La situación de los puntos es la siguiente:



$$\text{Recta AB}\rightarrow\begin{cases}3=n\\5=3m+n\end{cases}\rightarrow m=2/3,\ n=3\rightarrow$$

$$\rightarrow y=\frac{2x}{3}+3$$

$$\text{Recta AC}\rightarrow\begin{cases}3=n\\2=6m+n\end{cases}\rightarrow m=-1/6,\ n=3\rightarrow$$

$$\rightarrow y=-\frac{x}{6}+3$$

$$\text{Recta BC}\rightarrow\begin{cases}5=3m+n\\2=6m+n\end{cases}\rightarrow m=-1,\ n=8\rightarrow$$

$$\rightarrow y=-x+8$$

La rectas AB y BC se cortan en $x=3$.

La recta AC corta la recta AB en $x=0$ y la recta BC en $x=6$.

El volumen que buscamos es:

$$V=\pi\int_0^3\left(\frac{2x}{3}+3\right)^2dx+\pi\int_3^6(-x+8)^2dx-$$

$$-\pi\int_0^6\left(-\frac{x}{6}+3\right)^2dx=\pi\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{3}+3\right)^3\right]_0^3+$$

$$+\pi\left[-\frac{1}{3}(-x+8)\right]_0^3-\pi\left[-2\left(-\frac{x}{6}+3\right)^3 3\right]_0^6=$$

$$=49\pi+39\pi+38\pi\ u^3=126\pi\ u^3$$

67. $f^{-1}(x)=x^2/4$

$$V=\pi\int_0^4\left(\frac{x^2}{4}\right)^2dx=\pi\left[\frac{x^5}{80}\right]_0^4=\frac{64}{5}\pi\ u^3$$

68. $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

$$V=\pi\int_0^4\left(\sqrt[3]{x}\right)^2dx=\pi\left[\frac{3}{5}x^{5/3}\right]_0^4=\frac{12\pi}{5}4^{2/3}\ u^3$$

69. $f^{-1}(x)=2x$

$$V=\pi\int_3^6(2x)^2dx=\pi\left[\frac{4}{3}x^3\right]_3^6=252\pi\ u^3$$

Página 317

70. f continua en $x=0$ con $f(0)=0$.

$$f'(x)=\begin{cases}2x\cos x, \text{ si } x>0\\2x-2, \text{ si } x\le 0\end{cases}$$

$f'(0^-)=0$

$f'(0^+)=-2$

La función no es derivable en $x=0$.

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}}xf(x)dx=\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}}x\operatorname{sen}x^2dx=\left[-\frac{1}{2}\cos x^2\right]_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}}=$$

$$=-1$$

71. Integramos por partes:

$$\begin{cases}u(x)=2x\\dv(x)=f'(x)dx\end{cases}\rightarrow\begin{cases}du(x)=2dx\\v(x)=f(x)\end{cases}$$

$$\int_0^1 2xf'(x)dx=[2xf(x)]_0^1-\int_0^1 2f(x)dx;$$

$$1=[2xf(x)]_0^1-\int_0^1 2f(x)dx;$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{[2xf(x)]_0^1-1}{2};$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{2f(1)-1}{2}=\frac{-1}{2};$$

72. $A=\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{cx^5}{5}+\frac{x^3}{3c}+x\right]_0^1=\frac{c}{5}+\frac{1}{3c}+1\ u^2$

73. $f'(x) = 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

Recta tangente en $x = -1 \rightarrow y = 1$

La tangente tiene pendiente $6 \rightarrow 2x + 2 = 6 \rightarrow x = 2$ $\rightarrow$ Recta tangente en $x = 2$: $y - 10 = 6(x - 2) \rightarrow y = 6x - 2$

$1 = 6x - 2 \rightarrow x = 1/2$

Por lo tanto:

$$A = \int_{-1}^{1/2}\left(x^2 + 2x + 2 - 1\right)dx +$$

$$+ \int_{1/2}^{2}\left(x^2 + 2x + 2 - 6x + 2\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_{-1}^{1/2} +$$

$$+ \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x\right]_{1/2}^{2} = \frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}\ u^2$$

74. $f'(x) = \dfrac{-2x}{\left(x^2 + 3\right)^2}$

$$f''(x) = \frac{6\left(x^2 - 1\right)}{\left(x^2 + 3\right)^3} = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 1$$

Recta tangente en $x = 1 \rightarrow y - \dfrac{1}{4} = -\dfrac{(x - 1)}{8} \rightarrow y = -\dfrac{x}{8} + \dfrac{3}{8}$

La recta tangente corta el eje OX en $x = 3$.

$$A = \int_0^1\left(-\frac{x}{8} + \frac{3}{8} - f(x)\right)dx$$

$$= \left[\frac{3x}{8} - \frac{x^2}{16} - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}x}{3}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{5}{16}\ u^2$$

75. a) $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

b) $\begin{cases} 8a + 4b + 2c + d = 0 \\ 64a + 16b + 4c + d = 0 \\ 216a + 36b + 6c + d = 0 \end{cases}$

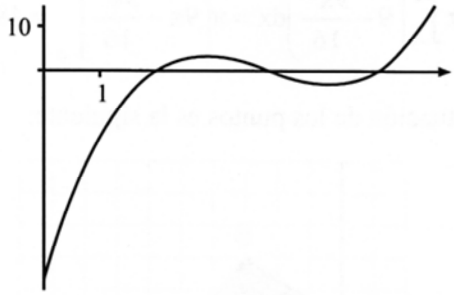
c) $d = -48$

Por lo tanto, se debe resolver el sistema:

$$\begin{cases} 8a + 4b + 2c - 48 = 0 \\ 64a + 16b + 4c - 48 = 0 \\ 216a + 36b + 6c - 48 = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$\rightarrow a = 1,\ b = -12,\ c = 44$

Finalmente:



$$A = \int_2^4\left(x^3 - 12x^2 + 44x - 48\right)dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 4x^3 + 22x^2 - 48x\right]_2^4 = 4\ u^2$$

76. $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$P''(x) = 6ax + 2b$

a) Máximo en $x = 1 \rightarrow P'(1) = 0 \rightarrow 3a + 2b + c = 0$

Punto de inflexión en $(0, 1) \rightarrow P''(0) = 0 \rightarrow 2b = 0 \rightarrow b = 0 \rightarrow c = -3a$

Pasa por $(0, 1) \rightarrow P(0) = 1 \rightarrow d = 1$

Tenemos por ahora:

$P(x) = ax^3 - 3ax + d1$

b) $\displaystyle\int_0^1\left(ax^3 - 3ax + 1\right)dx = \left[\frac{ax^4}{4} - \frac{3ax^2}{2} + x\right]_0^1 =$

$= -\dfrac{5a}{4} + 1$

Por lo tanto, $-\dfrac{5a}{4} + 1 = \dfrac{5}{4} \rightarrow a = -\dfrac{1}{5}$

77. $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$P''(x) = 6ax + 2b$

Pasa por $(2, 1) \rightarrow P(2) = 1 \rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 1$

Punto de inflexión en $(2, 1) \rightarrow 12a + 2b = 0 \rightarrow b = -6a$

Tangente horizontal en $(2, 1) \rightarrow 12a + 4b + c = 0$

Pasa por el origen de coordenadas $\rightarrow d = 0$

$$\begin{cases} 8a - 24a + 2c = 1 \\ 12a - 12a = 0 \\ 12a - 24a + c = 0 \end{cases} \rightarrow a = 1/8 \rightarrow b = -3/4;\ c = 3/2$$

La recta que une O con el punto de inflexión (2, 1)
$y = x/2$

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

$$A = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{8} - \frac{3x^2}{4} + \frac{3x}{2} - \frac{x}{2} \right) dx =$$

$$= \left[\left(\frac{x^4}{32} - \frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{2} \right) \right]_0^2 = \frac{1}{2}\ u^2$$

Autoevaluación

1. a) $\left[2xe^x - 3x\right]_0^1 = -e + 3$

b) $\left[-\frac{1}{3}\left(4 - x^2\right)\right]_{-1}^1 = 0$

2. $A = \left[3\ln\left(x^2 + 1\right)\right]_2^5 = 3\ln 26 - 3\ln 5\ u^2$

3. $A = \left[2x + 5\ln(x - 2)\right]_3^4 = 2 + 5\ln 2\ u^2$

4. $A = \left[x\ln x^2 - 2x\right]_9^{12} = -6 + 48\ln 2 - 12\ln 3\ u^2$

5. $f(x) = g(x) \to x = -1,\ x = 0,\ x = 2$

$$A = \int_{-1}^0 (f(x) - g(x))dx + \int_0^2 (g(x) - f(x))dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^0 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 =$$

$$= \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}\ u^2$$

6. a) $f'(x) = 2x - 2$

En el punto de abscisa $x = 2$, la recta tangente a la gráfica de *f* tiene pendiente $f'(2) = 2$.

La recta que buscamos es:

$y - 6 = 2x \to y = 2x + 6$

b) La gráfica de la función y la de la recta se cortan en los puntos de abscisa $x = -1$, $x = 5$, pues $f(-1) = 4 = -2 + 6$ y también $f(5) = 16 = 10 + 6$

$$A = \int_{-1}^5 (2x + 6 - f(x))dx =$$

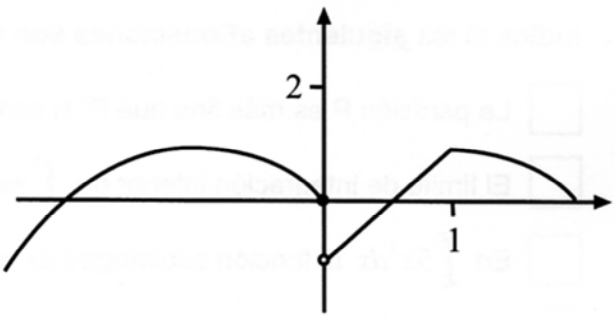
$$= \left[x^2 + 6x - \frac{(x-1)^3}{3}\right]_{-1}^5 = 36\ u^2$$

7. a) $F(x) = \dfrac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} + C$

$F(1) = 3 \to C = 5/3$

b) $A = \int_0^1 f(x)dx = \left[\dfrac{16\sqrt[4]{x^7}}{21} + \dfrac{5x}{3}\right]_0^1 = \dfrac{17}{7}\ u^2$

8. a)



b) $A = \int_{1/2}^1 (-1 + 2x)dx + \int_1^{3/2} (-x^2 + 2x)dx =$

$$= \left[-x + x^2\right]_{1/2}^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_1^{3/2} =$$

$$= 1/4 + 11/24 = 17/24\ u^2$$

9. $V = \pi \int_{-2}^2 \left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 dx = [\pi \text{arc tg}]_{-2}^2 = 2\pi \text{ arc tg } 2\ u^3$

10. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

$$A = \pi \int_{-8}^8 \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 dx = \left[\frac{3\pi\sqrt[3]{x^5}}{5}\right]_{-8}^8 = \frac{48\pi\sqrt[3]{64}}{5} = \frac{192}{5}\ u^3$$