SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

Página 184

1. a) $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 1$

Continua en x = 1.

b) No existe $\lim_{x\to 0} f(x)$.

No es continua en x = 0.

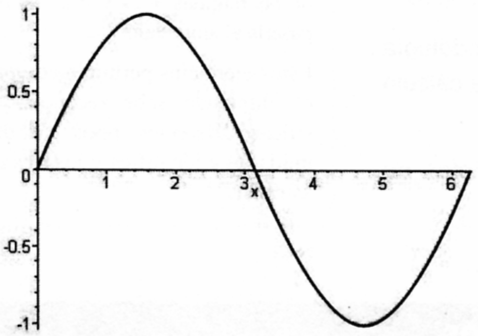
c) $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

Continua en x = 0.

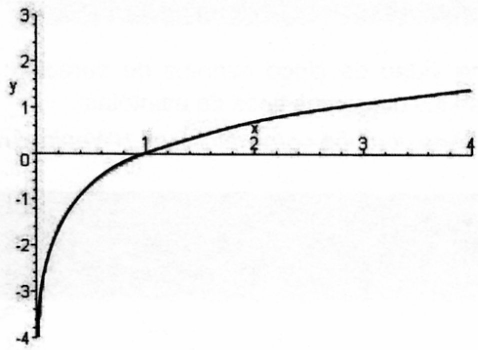
d) No existe $\lim_{x\to \pi/2} f(x)$.

No es continua en $x = \pi / 2$.

2. a) Continua en $[0, 2\pi]$



b) Continua en $(0, +\infty)$



3. a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 - 1 = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = k$

Si k = 0, la función es continua para todo valor real.

b) $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 8k + 20$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = k / 2 + 8$

Para que sea continua para todo valor real, se debe cumplir:

$8k + 20 = k / 2 + 8;$

$15k = -24 \rightarrow k = -24 / 15 = -8 / 5$

4. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 - 1 = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = k + 1$

Se debe cumplir $k = -1$.

Página 185

5. $f(x) = \begin{cases} -(x+2) - x, x \le -2 \\ (x+2) - x, x > -2 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} -2x - 2, x \le -2 \\ 2, x > -2 \end{cases}$

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = 4 - 2 = 2$

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = 2$

f es continua para todo valor de *x*.

6. a) $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

Continua en $\mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

b) $x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = 3$

Continua en $\mathbb{R} - \{1, 3\}$.

c) Continua en todo $\mathbb{R}$ ya que $|x|$ y $x^2 + 1$ lo son y, además, $x^2 + 1 \neq 0$ para todo *x*.

Página 187

7. $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-3)(x+3)}$

La función no está definida en x = 3 y, por lo tanto, no es continua, sin embargo, como

$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \dfrac{(x-1)}{(x+3)} = 1/3$

la función:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), x \neq 3 \\ 1/3, x = 3 \end{cases}$$

coincide con *f* cuando $x \neq 3$ y pero no es continua para todo *x* ya que no está definida en $x = -3$.

8. a) $f(x) = \dfrac{(x-2)(x-5)}{(x-5)(x+4)}$

Tiene una discontinuidad evitable en $x = 5$ y una de primera especie en $x = -4$.

b) En todo $x \in \mathbb{Z}$ presenta una discontinuidad de primera especie, de salto finito.

9. a) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

Primera especie.

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

Primera especie.

c) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$

Primera especie, salto finito.

d) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

En $x = -1$ presenta una discontinuidad de primera especie.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

En $x = 1$ también presenta una discontinuidad de primera especie.

e) $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to (\pi/2)^+} f(x) = -\infty$

Primera especie.

Página 189

10. $f(x) = x - \cos x$, es continua

$f(0) = 0 - 1 = -1 < 0$

$f(\pi/2) = \pi/2 - 0 = \pi/2 > 0$

Por lo tanto, existe $c \in (0, \pi/2)$ tal que $f(c) = 0$ y, por lo tanto, $c = \cos c$.

11. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 0{,}2$, es continua

$f(-2) = -4{,}2$

$f(-1) = 0{,}8$

Tiene solución en $(-2, -1)$

$f(0) = -0{,}2$

Tiene solución en $(-1, 0)$

$f(1) = 4{,}8$

Tiene solución en $(0, 1)$

12. $f(x) = x^3 + x - 1$, es continua

$f(0{,}5) = -0{,}375$

$f(1) = 1$

Tiene solución en $(0{,}5; 1)$

$f(0{,}75) = 0{,}17$

La solución está en $(0{,}5, 0{,}75)$

$f(0{,}62) = -0{,}14$

La solución está en $(0{,}62, 0{,}75)$

$f(0{,}7) = 0{,}043$

La solución está en $(0{,}62, 0{,}7)$

Como la amplitud de este intervalo es menor que 1 décima, hemos terminado. El primer decimal de la solución es 0,6 y ésta es mayor que 0,62.

13. $f(x) = x^4 - 4x^2 - 1$, es continua

$f(0) = -1$

$f(-3) = 44$

Tiene una raíz en $(-3, 0)$.

Página 191

14. a) Asíntota vertical $\to x = 3{,}9$

Asíntota horizontal $\to y = 1$

b) Asíntota vertical $\to x = 0$

Asíntota oblicua $\to y = x / 2$

c) Asíntota vertical $\to x = 2$

Asíntota oblicua $\to y = 2x + 8$

d) Asíntota vertical $\to x = 1, x = -1$

Asíntota horizontal $\to y = 4$

15. a) Asíntota vertical $\to x = 2$

Asíntota horizontal $\to y = 0$

b) Asíntota vertical $\to x = 2, x = -2$

Asíntota oblicua $\to y = -x$

c) Asíntota vertical $\to x = 1, x = -1$

Asíntota oblicua $\to y = 0$

d) Asíntota vertical $\to x = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Asíntota oblicua $\to y = -x / 2 - 1$

Página 194

1. Para que una función f sea continua en $x = a$ se debe cumplir $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$f(x) = \frac{|x|}{x}$ no es continua en $x = 0$ porque no existe $f(0)$ ni el límite cuando x tiende a 0.

2. *Discontinuidad evitable en $x = a$* $\to$ existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y no es infinito y $f(a)$ no existe o es diferente del límite.

Discontinuidad de primera especie en $x = a$ $\to$ existen los límites laterales en $x = a$ pero son diferentes o su valor no es finito.

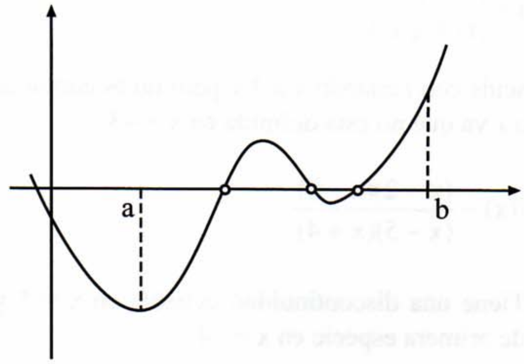
Discontinuidad de segunda especie en $x = a$ $\to$ no existe al menos uno de los límites laterales en $x = a$.

Actividad personal.

3. $f + g$ y $f \cdot g$ lo son mientras que f / g lo es si $g(c) \neq 0$.

4. Si f es una función continua en $[a, b]$ y que toma valores de signo contrario en sus extremos, existe al menos un punto de (a, b) en el que la función se anula.

Se observa en la figura que si la función toma valores con signo opuesto en los extremos del intervalo, la continuidad de la función la obliga a pasar por el eje de abscisas.



5. Si f es una función continua en $[a, b]$, existen al menos dos puntos c y d de dicho intervalo para los que se verifica $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ para todo x del intervalo.

No podemos aplicar el teorema para averiguar si $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$ tiene extremos absolutos en $[0, 2]$ porque f no es continua en $x = 1$.

6. $x = a$ es una *asíntota vertical* de f si al menos uno de los límites laterales de f en a no es finito.

$y = k$ es una *asíntota horizontal* de f si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ o bien $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$.

La recta $y = mx + n$, $m \neq 0$, es una asíntota oblicua de f si .

$\lim_{x \to +\infty} f(x) / x = m$ y $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = n$

o bien

$\lim_{x \to -\infty} f(x) / x = m$ y $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = n$

Si $f(x) = P(x) / Q(x)$, tal que el grado de $P(x)$ es una unidad mayor que el de $Q(x)$, el cociente de $P(x) /$ $/ Q(x)$ es asíntota oblicua de f por ambos lados.

7. $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -1$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0$

f no es continua en $x = -1$.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -3$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = -3$

$f(2) = -3$

f es continua en $x = 2$

8. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 2$

Se debe cumplir, por lo tanto:

$2 = -\dfrac{a}{(-1)} \to a = 2$

9. Si x = 1 en lugar de x = 0:

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = e^{-1}$ $\quad\quad$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 + a$

Por lo tanto, *f* es continua si $a = e^{-1} - 1$.

10. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \alpha$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

En primer lugar, se debe cumplir:

$\alpha = 0$

Y, por lo tanto, se debe cumplir también:

$\beta = \alpha = 0$

11. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \pi$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = a$

En primer lugar debe cumplirse, $a = \pi$ y, finalmente, $f(0) = b = \pi$.

12. Actividad personal. Por ejemplo, dos funciones opuestas definidas a trozos que sean discontinuas en x_0.

La suma será la función constante 0, y, por lo tanto, continua en todo el dominio.

13. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

Por lo tanto, se debe cumplir, $f(0) = b = 0$.

Por su parte, la continuidad no depende del valor de *a*

14. En la página 176 del libro vimos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, por lo tanto, para que la función sea continua en x = 0, debe cumplirse que $f(0) = \lambda = 0$.

15. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2a$

Por lo tanto, $2 = 2a \to a = 1$

$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = \pi^2 - 2$

$\lim_{x\to \pi^+} f(x) = \pi^2 + b$

Por lo tanto:

$\pi^2 - 2 = \pi^2 + b \to b = -2$

16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$

Por lo tanto, la función es continua para todo *x*.

17. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = b$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -a$

Por lo tanto, $a = -b$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 - a$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = a + b$

Por lo tanto, $1 - a = a + b$.

Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} a = -b \\ 1 - a = a + b \end{cases} \to a = 1, b = -1$$

18. Si *m* par, $x^m - 1 = 0 \to x = \pm 1 \to f$ discontinua en x = = ±1

Si *m* impar, $x^m - 1 = 0 \to x = 1 \to f$ discontinua en x = = 1

En ambos casos la discontinuidad es de primera especie.

Página 195

19. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 6 - a$

Por lo tanto, $1 = 6 - a \to a = 5$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 9 - 5 = 4$

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = b$

Por lo tanto, $b = 4$.

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 4$

$\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = -5 + c$

Por lo tanto, $4 = -5 + c \to c = 9$

Finalmente:

$\lim\limits_{x\to 7^-} f(x) = -7 + 9 = 2 = \lim\limits_{x\to 7^+} f(x)$

20. $\lim\limits_{x\to 8^-} f(x) = \sqrt{8a} = 2\sqrt{a}$

$\lim\limits_{x\to 8^+} f(x) = \dfrac{64-32}{8-4} = \dfrac{32}{4} = 8$

Por lo tanto:

$2\sqrt{a} = 8 \to a = 16$

21. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1/2$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 + (k-1)$

Por lo tanto, $1/2 = k - 1 \to k = 3/2$

22. $f(x) = \begin{cases} 3x+2, & x<0 \\ x^2 + 2a\cos x, & 0 \le x < \dfrac{\pi}{2} \\ ax^2 + b, & \dfrac{\pi}{2} \le x \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2a$

Por lo tanto, $2 = 2a \to a = 1$

$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \dfrac{\pi^2}{4}$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to \pi^+} f(x) = a\dfrac{\pi^2}{4} + b$

Por lo tanto, $b = 0$.

23. $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x-1)(x+2)}$

Presenta una discontinuidad evitable en $x = 1$ y una de primera especie en $x = -2$.

24. a) $f(x) = \dfrac{x^5(x+1)(x^2-x+1)}{-(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$

Discontinua en $x = 1$, $x = -1$.

b) La discontinuidad en $x = -1$ es evitable.

25. a) $f(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x-2)^2}$

Discontinuidad de primera especie en $x = 2$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$

Discontinuidad de primera especie, de salto finito en $x = 0$.

c) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

Discontinuidad evitable en $x = 0$.

d) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 4$

Discontinuidad de primera especie, de salto finito en $x = 0$.

26. a) $f(x) = \dfrac{(x-5)(x-1)(x-2)}{(x-5)(x-2)(x+2)}$

Discontinuidad evitable en $x = 5$, $x = 2$.

La prolongación continua de *f* sería la función *g* tal que coincida con *f* en los puntos del dominio de ésta y que, además:

$g(2) = 1/4$ $\quad\quad$ $g(5) = 4/7$

Tiene también una discontinuidad de primera especie en $x = -2$.

b) Discontinuidad de primera especie.

c) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$ $\quad\quad$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$

Discontinuidad de primera especie, de salto finito.

d) En las proximidades de x = 0, la función oscila indefinidamente, por lo tanto, los límites laterales no existen, y la función tiene una discontinuidad de segunda especie.

Es un caso análogo al del ejemplo de la página 187 del libro de texto.

e) $$\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=$$

$$=\frac{x+1-1}{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{x}{x\cdot\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{}1/2$$

La discontinuidad en x = 0 es evitable.

La prolongación continua de *f* sería la función *g* tal que:

$g(0) = 1/2$

27. Actividad personal.

28. $f(x) = x^5 + 4x^3 + 3$ es continua, por lo tanto, aplicaremos el teorema de Bolzano.

$f(-1) = -2$

$f(1) = 8$

Por lo tanto, existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

c es la raíz que buscábamos.

29. No contradice el teorema de Bolzano porque la función no es continua en [0, 1]:

$$\lim_{x\to 1/2^-} f(x) = -7/8$$

$$\lim_{x\to 1/2^+} f(x) = e^{-1/4}$$

30. *f* tiene un cero en (–1, 5) por el teorema de Bolzano.

g es continua en [–1, 5] por la continuidad de *f*.

$g(-1) = f(-1) - 5 < 0$ porque $f(-1) < 0$

$g(5) = 7 - 5 = 2 > 0$

Por lo tanto, *g* tiene también al menos un cero en (–1, 5)

31. Sea $g(x) = f(x) - 7$.

Por la continuidad de *f*, *g* es continua en [a, b].

$G(a) = 3 - 7 = -4 < 0$

$G(b) = 5 - 7 = -2 < 0$

No es, por lo tanto, posible afirmar la existencia de un *c* tal que:

$g(c) = f(c) - 7 = 0$

Y por lo tanto, no es posible afirmar la existencia de *c* tal que:

$f(c) = 7$

Por ejemplo, si la gráfica de la función es una recta que pasa por los puntos (a, 3) y (b, 5), no existe *c* tal que f(c) = 7.

Página 196

32. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 3$ es continua

$f(1) = -1$

$f(2) = 3$

Existe *c* tal que f(c) = 0 y por lo tanto, que es solución de la ecuación.

33. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 15x - 23$ es continua

$f(0) = -23$

$f(2) = 39$

Por lo tanto, existe, al menos una solución real en (0, ,2).

34. $f(x) = \operatorname{sen} x + 2x - 1$ es continua

$f(0) = -1$

$f(\pi/2) = \pi > 0$

Por lo tanto, la función tiene al menos una solución en el intervalo (0, π / 2).

35. $f(x) = x^{1995} + x + 1$ es continua

$f(-1) = -1$

$f(0) = 1$

Por lo tanto, *f* tiene al menos una solución real en el intervalo (–1, 0)

36. $f(x) = 3x - e^x$ es continua

$f(0) = 0 - 1 = -1$

$f(1) = 3 - e > 0$

f tiene un cero en (0, 1) y, por lo tanto, $3x = e^x$ tiene una solución en este intervalo contenido en (–∞, 1]

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

37. *f* es continua

$f(-1) = 2 - 2 - 1 / e = -1 / e < 0$

$f(1) = 2 + 2 - e = 4 - e > 0$

f tiene un cero en (–1, 1) y, por lo tanto, corta en el OX en este intervalo.

38. *f* es continua

$f(1 / e^2) = f(e^{-2}) = 2 - e^{-2} + \ln e^{-2} = 2 - e^{-2} - 2 = -e^{-2}$

$f(1) = 2 - 1 + \ln 1 = 2 - 1 + 0 = 1$

Por lo tanto, existe $c \in (1 / e^2, 1)$ tal que $f(c) = 0$.

39. $f(x) = x + \text{sen } x - 2$ es continua

$f(0) = -2$

$f(4) = 4 + \text{sen } 4 - 2 = 2 + \text{sen } 5 > 0$

Por lo tanto, *f* tiene un cero en (0, 4) y, por lo tanto, $x + \text{sen } x = 2$ una solución.

40. $f(x) = e^{2x-x^2} - 2$ es continua

$f(0) = 1 - 2 = -1$

$f(1) = e - 2 > 0$

Por la tanto, *f* tiene un cero en (0, 1) y la ecuación $e^{2x-x^2} = 2$ una solución real.

41. Debemos buscar los valores de *a* y *b* para los que *f* sea continua en el citado intervalo.

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = a$

Por lo tanto, a = 1.

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 + 1 = 2$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = b$

Por lo tanto, b = 2.

42. $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 2x - 1$ es continua

$f(0) = -1$

$f(1) = -2 + \lambda$

Por lo tanto, si $\lambda > 2$, $f(1) > 0$ y la función *f* tiene un cero menor que 1 y la ecuación del enunciado una solución.

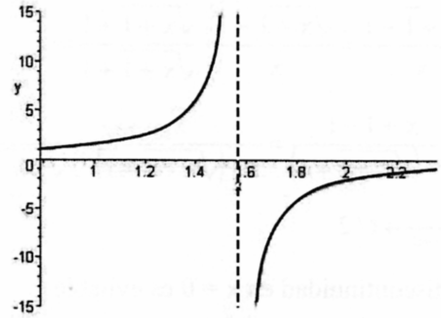
43. $f(x) = x^4 - 4x^2 - 1$ es continua

$f(0) = -1$

$f(-3) = 44$

f tiene, por lo tanto, una raíz en (–3, 0).

44. No, porque no es continua, la gráfica de la función en el intervalo es:



45. $f(x) = x^3 + x^2 + mx - 6$ es continua

a) $f(0) = -6$

$f(2) = 6 + 2m > 0$ si $m > -3$

Si $m > -3$, la función tiene una raíz menor que 2.

b) $f(2) = 6 + 2m < 0$ si $m < -3$

Y como la función tiende a $+\infty$ cuando *x* tiende a $+\infty$, para cualquier valor de *m* por pequeño que sea, habrá un valor de *x* tal que $f(x) > 0$.

46. $g(x) = f(x) - 10$ es continua

$g(0) = -10$

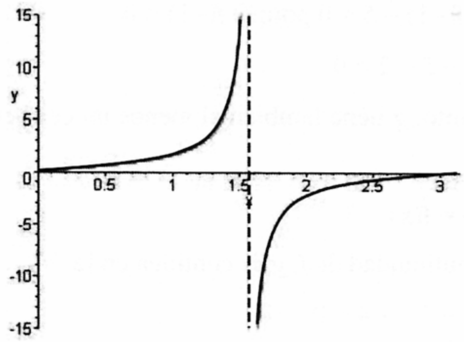
$g(3) = 2$

Durante los tres primeros años, en algún momento se ingresaron 10.000 €.

47. Sí ya que la función es continua en el intervalo.

48. No podemos asegurarlo utilizando el teorema de Weierstrass porque la función no es continua en el intervalo.

Si representamos la función, observamos que no tiene máximos ni mínimos en el intervalo:



SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

49. a) Dom = $\mathbb{R}$

Asíntota horizontal → $y = 1$

b) Dom = $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

Asíntota vertical → $x = -3, x = 3$

Asíntota horizontal → $y = 2$

c) Dom = $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntota vertical → $x = 1$

Asíntota oblicua → $y = x - 3$

d) Dom = $\mathbb{R}$

Asíntota horizontal → $y = 0$

e) Dom = $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntota vertical → $x = 1$

Asíntota oblicua → $y = x + 2$

f) Dom = $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

Asíntota vertical → $x = 1$

g) Dom = $\mathbb{R}$

Asíntota horizontal → $y = 0$

h) Dom = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Asíntota vertical → $x = -1, x = 1$

Asíntota horizontal → $y = 0$

50. a) No está definida en $x = 1$, $x = -2$.

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

b) Verticales → $x = 1, x = -2$

Horizontal → $y = 1$

51. a) Dom = $\mathbb{R} - \{1\}$

Asíntota vertical → $x = 1$

b) Dom = $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

Asíntota vertical → $x = -3, x = 3$

Asíntota horizontal → $y = 0$

c) Dom = $\mathbb{R} - \{2\ 3\}$

Asíntota vertical → $x = 3$

Asíntota oblicua → $y = -x - 3$

d) Dom = $\mathbb{R} - \{5\}$

Asíntota vertical → $x = 5$

Asíntota oblicua → $y = 2x + 10$

52. a) Verticales → $x = 3, x = -1$

Oblicua → $x + 2$

b) Para averiguar si la función se corta con la asíntota oblicua, planteamos la ecuación:

$$\frac{x^3 + 2x}{x^2 - 2x - 3} = x + 2;$$

$x^3 + 2x = x^3 - 7x - 6;$

$9x = -6;$

$x = -2 / 3$

Se cortan en el punto $(-2 / 3, -2 / 3 + 2) = (-2 / 3, 4 / 3)$

53. a) Asíntota horizontal → $y = 1$

b) Asíntota horizontal → $y = 0$

c) Asíntota horizontal → $y = 0$

d) Asíntota horizontal → $y = 0$

Página 197

54. $\lim_{x \to a^-} f(x) = |2 - a|$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = a^2 - 5a + 7$$

Imponemos:

$|2 - a| = a^2 - 5a + 7;$

$a = 3$

55. a) Si la discontinuidad es evitable:

$a + b = 0$

$1 + 2a + b + 3 = 0$

De estas ecuaciones, obtenemos:

$a = -4, b = 4$

b) Si $a = -4$, $b = 4$:

$$f(x) = \frac{-4x^2 + 4}{x^3 - 8x^2 + 4x + 3} \xrightarrow[x \to 1]{} 8 / 9$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x), x \neq 1 \\ 8/9, x = 1 \end{cases}$$

56. $x^2 - a = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{a}$

Si $a = 0$ tiene una única asíntota vertical en $x = 0$.

9

Si $a > 0$, tiene dos asíntotas verticales en $x = \pm\sqrt{a}$.

Si $a < 0$, la función es continua.

57. Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 1, x \text{ racional} \\ -1, x \text{ irracional} \end{cases}$$

58. Sí, porque la función *f* es continua y, además:

$f(0) = 1$

$f(\pi) = -1$

Por lo tanto, *f* tiene un cero en el intervalo $(0, \pi)$ que, en este caso es $x = \pi / 2$ ya que se debe cumplir:

$\text{sen } 2x = -\cos(3x)$

Y, por lo tanto:

$3x - 2x = \pi / 2$

59. $f(x) = \text{sen } x - x + 2$ es continua

$f(0) = 2$

$f(\pi) = 2 - \pi < 0$

f tiene un cero real y, por lo tanto, la ecuación tiene solución.

60. $f(x) = x - \cos x$ es continua

$f(0) = -1$

$f(\pi / 2) = \pi / 2$

f tiene al menos un cero en $(0, \pi / 2)$ y, por lo tanto, la ecuación tiene una solución

61. Es falso.

Por ejemplo, la función $f(x) = \text{sen } x$ es continua en $[0, , \pi]$.

Alcanza su valor máximo, 1, en $\pi / 2$.

Alcanza su valor mínimo, 0, en 0 y π.

Pero el valor intermedio $C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ lo alcanza en $\pi / 4$ y $3\pi / 4$.

62. a) Asíntotas verticales en $x = 0$, $x = 2$

Asíntota horizontal en $y = 0$

b) Asíntota vertical en $x = 1$

Asíntota oblicua en $y = x - 1$

c) Asíntota vertical en $x = 1$

Asíntota horizontal por la izquierda, $y = 0$.

d) Asíntota vertical en $x = 1$

Asíntota oblicua en $y = x$

e) $f(x) = \ln|x + 1| \to$ Asíntota vertical en $x = -1$

f) Asíntota horizontal en $y = 1$

63. $h = k = 0 \to f(x) = \frac{1}{1} = 1$ constante

Asíntota horizontal en $y = 1$.

$h = 0, k = 1 \to f(x) = \frac{x}{1-1} = \frac{x}{0}$ no es una función

$h = 0, k = 2 \to f(x) = \frac{x^2}{1-2} = -x^2$

$h = 0, k = 3 \to f(x) = \frac{x^3}{1-3} = -\frac{x^3}{2}$

$h = 1, k = 0 \to f(x) = \frac{1}{x}$

Asíntota vertical en $x = 0$.

Asíntota horizontal en $y = 0$.

$h = 1, k = 1 \to f(x) = \frac{x}{x-1}$

Asíntota vertical en $x = 1$.

Asíntota horizontal en $y = 1$.

$h = 1, k = 2 \to f(x) = \frac{x^2}{x-2}$

Asíntota vertical en $x = 2$.

Asíntota oblicua en $y = x + 2$.

$h = 1, k = 3 \to f(x) = \frac{x^3}{x-3}$

Asíntota vertical en $x = 3$.

$h = 2, k = 0 \to f(x) = \frac{1}{x^2}$

Asíntota vertical en $x = 0$.

Asíntota horizontal en $y = 0$.

$h = 2, k = 1 \to f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

Asíntota vertical en $x = \pm 1$.

Asíntota horizontal en $y = 0$.

$h = 2, k = 2 \rightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2}$

Asíntota vertical en $x = \pm\sqrt{2}$.

Asíntota horizontal en $y = 1$.

$h = 2, k = 3 \rightarrow f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$

Asíntota vertical en $x = \pm\sqrt{3}$.

Asíntota oblicua en $y = x$.

$h = 3, k = 0 \rightarrow f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

Asíntota vertical en $x = 0$.

Asíntota horizontal en $y = 0$.

$h = 3, k = 1 \rightarrow f(x) = \dfrac{x}{x^3 - 1}$

Asíntota vertical en $x = 1$.

Asíntota horizontal en $y = 0$.

$h = 3, k = 2 \rightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 2}$

Asíntota vertical en $x = \sqrt[3]{2}$.

Asíntota horizontal en $y = 0$.

$h = 3, k = 3 \rightarrow f(x) = \dfrac{x^3}{x^3 - 3}$

Asíntota vertical en $x = \sqrt[3]{3}$.

Asíntota horizontal en $y = 1$.

Autoevaluación

1. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -a - b$

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = a + b + 3$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 4a - 2b + 3$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -8b + a$

Se obtiene el siguiente sistema:

$\begin{cases} -a + b = a - b + 3 \\ 4a - 2b + 3 = -8b + a \end{cases};$

$a = -2, b = 1/2$

2. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$

Discontinuidad de primera especie en $x = 0$.

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$

f es continua en $x = 2$.

3. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 6$

$F(x) = \begin{cases} f(x), x \neq 3 \\ 6, x = 3 \end{cases}$

4. $f(x) = x^3 - 9x + 2$ es continua

$f(1) = -6$

$f(3) = 2$

Por el teorema de Bolzano, por lo tanto, existe una solución de la ecuación en $(1, 3)$.

5. $f(0) = 4$

$f(-3) = -8$

Como *f* es continua, por el teorema de Bolzano, la función tiene un cero y, por lo tanto, corta el eje de abscisas.

6. Sea $g(x) = f(x) - x$, continua en $[a, b]$ al serlo *f*.

$g(a) = f(a) - a < 0$

$g(b) = f(b) - b > 0$

Por lo tanto, existe $c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$ y, por lo tanto, $f(c) = c$.

7. **a)** Asíntota vertical en $x = -2$

Asíntota horizontal en $y = 3$

b) Asíntota vertical en $x = 0$

Asíntota horizontal en $y = 1$

c) Asíntota vertical en $x = -1$

Asíntota oblicua en $y = x + 3$

d) Asíntota vertical en $x = 0$

8. Asíntota vertical en $x = -2 \rightarrow -2b - 8 = 0 \rightarrow b = -4$

Asíntota horizontal en $y = 6 \rightarrow a / b = 6 \rightarrow a / (-4) =$
$= 6 \rightarrow a = -24$