Problemas de Selectividad de Matemáticas II
Comunidad de Madrid
(Enunciados)

Isaac Musat Hervás

4 de octubre de 2009

Índice general

Capítulo 1

Año 2000

1.1. Modelo 2000 - Opción A

Problema 1.1.1 *(2 puntos)* Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (a, 1 + a, 2a)$, $\overrightarrow{v} = (a, 1, a)$ y $\overrightarrow{w} = (1, a, 1)$, se pide:

1. (1 punto) Determinar los valores de a para que los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ sean linealmente dependientes.

2. (0,5 puntos) Estudiar si el vector $\overrightarrow{c} = (3, 3, 0)$ depende linealmente de los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ para el caso $a = 2$. Justificar la respuesta.

3. (0,5 puntos) Justificar razonadamente si para $a = 0$ se cumple la igualdad
$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = 0$$

Nota: el símbolo $\wedge$ significa producto vectorial.

Problema 1.1.2 *(2 puntos)*

1. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia al punto $A(4, 0)$ es el doble de su distancia a la recta $x = 1$.

2. Comprobar que el anterior lugar geométrico es una cónica. Indicar el tipo de cónica que es y hallar sus focos.

Problema 1.1.3 *(3 puntos)* Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} + 2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ k & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$?

2. (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$?

3. (1 punto) Determinar sus asíntotas.

Problema 1.1.4 *(3 puntos)* Sea el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x+ & \lambda y+ & 2z = & \lambda \\ 2x+ & \lambda y- & z = & 2 \\ \lambda x- & y+ & 2z = & \lambda \end{array}\right.$$

1. (1 punto) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de λ.

2. (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

3. (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = 2$.

1.2. Modelo 2000 - Opción B

Problema 1.2.1 *(2 puntos)* De una función derivable $f(x)$ se conoce que pasa por el punto $A(-1, -4)$ y que su derivada es

$$f'(x) = \left\{\begin{array}{lll} 2 - x & \text{si} & x \leq 1 \\ \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

1. Hallar la expresión de $f(x)$.

2. Obtener la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

Problema 1.2.2 *(2 puntos)* Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$ donde a es un número real comprendido entre 0 y 1 ($0 < a < 1$). Ambas curvas se cortan en un punto (x_0, y_0) con abcisa positiva. Hallar a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.

Problema 1.2.3 *(3 puntos)*

1. (1 punto) Encontrar la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1, 2, 1)$ y $R(1, 0, -1)$.

2. (1 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos P, Q y R.

3. (1 punto) Encontrar todos los puntos S del plano determinado por P, Q y R de manera que el cuadrilátero de vértices P, Q, R y S sea un paralelogramo.

Problema 1.2.4 *(3 puntos)*

1. (1 punto) Encontrar los valores de λ para los que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 2 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es invertible.

2. (1 punto) Para $\lambda = 2$, hallar la inversa de A y comprobar el resultado.

3. (1 punto) Resolver el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

para $\lambda = 1$

1.3. Junio 2000 - Opción A

Problema 1.3.1 *(2 puntos)* Resolver la siguiente ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{x} \wedge (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$$

sabiendo que $|\overrightarrow{x}| = \sqrt{6}$, donde $\wedge$ significa "producto vectorial".

Problema 1.3.2 *(2 puntos)*

1. Determinar el centro y el radio de la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 8z - 4 = 0$$

2. Determinar el centro y el radio de la circunferencia intersección de la esfera del apartado anterior con el plano $z = 0$.

Problema 1.3.3 *(3 puntos)* Para una matriz cuadrada, se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue, A y B son matrices cuadradas 2×2.

1. (0,5 puntos) Comprobar que se verifica:

$$Traza(A+B) = Traza(A) + Traza(B)$$

2. (1 punto) Comprobar que

$$Traza(A \cdot B) = Traza(B \cdot A)$$

3. (1 punto) Utilizando los resultados anteriores, demostrar que es imposible tener $AB - BA = I$, donde I denota la matriz identidad.

4. (0,5 puntos) Encontrar dos matrices A y B para las que:

$$Traza(AB) \neq Traza(A) \cdot Traza(B)$$

Problema 1.3.4 *(3 puntos)* Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.

1. (2 puntos) Determinar a, b, c y d.

2. (1 punto) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

1.4. Junio 2000 - Opción B

Problema 1.4.1 *(2 puntos)*.Sean las funciones:

$$f(x) = x^2 \text{ y } g(x) = x^3$$

Determinar el área encerrada por las gráficas de ambas funciones y la recta $x = 2$.

Problema 1.4.2 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo $[0, 4]$ que tenga al menos un máximo relativo en el punto $(2, 3)$ y un mínimo relativo en el punto $(3, 4)$.

2. (1 punto) Si la función fuera polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?

Problema 1.4.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrl} ax+ & y+ & z = & (a-1)(a+2) \\ x+ & ay+ & z = & (a-1)^2(a+2) \\ x+ & y+ & az = & (a-1)^3(a+2) \end{array}\right.$$

1. (1 punto) Comprobar que es compatible para todo valor de a.

2. (1 punto) Describir en términos geométricos el conjunto de soluciones para $a = 1$ y para $a = -2$.

3. (1 punto) Resolverlo para $a = -2$.

Problema 1.4.4 *(3 puntos)* Sean los puntos $P(8, 13, 8)$ y $Q(-4, -11, -8)$. Se considera el plano π, perpendicular al segmento PQ por su punto medio.

1. (1 punto) Obtener la ecuación del plano π.

2. (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del punto $O(0, 0, 0)$ sobre π.

3. (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por los puntos en los que el plano π corta a los ejes coordenados y en el origen de coordenadas.

1.5. Septiembre 2000 - Opción A

Problema 1.5.1 *(2 puntos)* Sea la función $f(x) = 2x + \sin 2x$

1. (1 punto) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.

2. (1 punto) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos.

Problema 1.5.2 *(2 puntos)* Dados tres números reales cualesquiera r_1, r_2 y r_3, hallar el número real x que minimiza la función

$$D(x) = (r_1 - x)^2 + (r_2 - x)^2 + (r_3 - x)^2$$

Problema 1.5.3 *(3 puntos)* Considerar el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} & y+ & z = & 1 \\ (\lambda - 1)x+ & y+ & z = & \lambda \\ x+ & (\lambda - 1)y- & z = & 0 \end{array}\right.$$

1. (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro λ.

2. (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 0$.

3. (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 3$.

Problema 1.5.4 *(3 puntos)* Sea la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 8z + 9 = 0$.

1. (0,5 puntos) Determinar su centro y su radio.

2. (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta que contiene al diámetro paralelo al eje OY.

3. (1 punto) Obtener el centro y el radio de la circunferencian que resulta al cortar dicha esfera con el plano $z = 0$.

4. (1 punto) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera en su punto del eje OX.

1.6. Septiembre 2000 - Opción B

Problema 1.6.1 *(2 puntos)* Se consideran los puntos $A(1, a, 0)$, $B(1, 1, a-2)$ y $C(1, -1, a)$.

1. (1 punto) Comprobar que no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome el parámetro a.

2. (1 punto) Hallar el área del triángulo que determinan los tres puntos.

Problema 1.6.2 *(2 puntos)* Sean la recta

$$r : \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4}\frac{z-1}{2}$$

y el plano

$$\pi : 2x - y + kz = 0$$

1. (1 punto) Calcular m y k para que la recta sea perpendicular al plano.

2. (1 punto) Calcular m y k para que la recta esté contenida en el plano.

Problema 1.6.3 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$.

1. (1,5 puntos) Determinar los puntos de corte de su gráfica con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

2. (0,5 puntos) Esbozar la gráfica de la función.

3. (1 punto) Calcular el área determinada por la gráfica de f, el eje horizontal y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

Problema 1.6.4 *(3 puntos)*

1. (2 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ 2x & - & kz = & 0 \\ x- & y+ & z = & 0 \end{array}\right.$$

2. (1 punto) Discutir en función de los valores de λ y resolver en los casos de compatibilidad del sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ 2x & - & 3z = & 0 \\ x- & y+ & z = & 0 \\ x+ & 2y+ & 2\lambda z = & \lambda \end{array}\right.$$

Capítulo 2

Año 2001

2.1. Modelo 2001 - Opción A

Problema 2.1.1 *(2 puntos)* Comprobar que las siguientes matrices tienen el mismo determinante

$$A=\left(\begin{array}{cccc} 1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{array}\right) \text{ y } B=\left(\begin{array}{cc} \left|\begin{array}{cc} 1+a & 1\\ 1 & 1-a \end{array}\right| & \left|\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 1 & 1 \end{array}\right| \\ & \\ \left|\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 1 & 1 \end{array}\right| & \left|\begin{array}{cc} 1+b & 1\\ 1 & 1-b \end{array}\right| \end{array}\right)$$

Problema 2.1.2 *(2 puntos)*Sea la matriz $A=\left(\begin{array}{cc} 1 & 3\\ 1 & 4 \end{array}\right)$

1. calcular A^{-1}
2. Resolver el sistema $A\cdot\left[\left(\begin{array}{c} 5\\ -1 \end{array}\right)+\left(\begin{array}{c} x\\ y \end{array}\right)\right]=\left(\begin{array}{c} 21\\ 24 \end{array}\right)$

Problema 2.1.3 *(3 puntos)* Sea la parábola $x^2=4y$. Sean u y v las rectas tangentes a la parábola en los puntos P de abcisa a y Q de abcisa b, (a_1,b), $(a_1,0)$, $(b_1,0)$.

1. (1,5 puntos) Hallar las coordenadas del punto R de intersección de u y v.
2. (1 punto) Hallar la relación entre a y b prar que las rectas u y v sean perpendiculares.
3. (0,5 puntos) Probar que en el caso del apartado anterior, el punto R está en la directriz de la parábola.

Problema 2.1.4 *(3 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$$

1. (1 punto) Indicar el dominio de definición de la función f y hallar sus asíntotas.

2. (1 punto) Hallar los extremos relativos de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad.

3. (1 punto) Dibujar la gráfica de f y hallar su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo $[-1, 1]$.

2.2. Modelo 2001 - Opción B

Problema 2.2.1 *(2 puntos)* los vértices de un triángulo son $A(-2, -1)$, $B(7, 5)$ y $C(x, y)$.

1. Calcular el área del triángulo en función de x e y.

2. Encontrar el lugar geométrico de los puntos (x, y) tales que la anterior área es 36.

Problema 2.2.2 *(2 puntos)* Sea $A(1, 1)$ y $B(-1, 1)$ dos puntos del plano.

1. Determinar las ecuaciones de todas las circunferencias que pasan por los puntos A y B razonando dónde están situados sus centros.

2. De entre las circunferencias del apartado anterior hallar el centro y el radio de la que es tangente a la recta $y = x$.

Problema 2.2.3 *(3 puntos)*

1. (1,5 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver cuando tenga más de una solución, el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrr} x+ & y+ & 2z = 3 \\ 2x- & y+ & kz = 9 \\ x- & y- & 6z = 5 \end{array} \right.$$

2. (1,5 puntos) Si el rango de la matriz $A = \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & k & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{array} \right)$ es 2, determinar una combinación lineal nula de los vectores fila $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ y $\overrightarrow{F_3}$, así como una combinación lineal nula de los vectores columna $\overrightarrow{C_1}$, $\overrightarrow{C_2}$, $\overrightarrow{C_3}$ y $\overrightarrow{C_4}$.

Problema 2.2.4 *(3 puntos)*

1. (1,5 puntos) Hallar el valor de la integral definida

$$\int_{-10}^{-1} \frac{e^x\, dx}{\sqrt{1-e^x}}$$

2. (1,5 puntos) Calcular la integral indefinida de la función

$$f(x) = \frac{1}{1-e^x}$$

mediante un cambio de variable.

2.3. Junio 2001 - Opción A

Problema 2.3.1 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ 2x- & y+ & 3z = & 2 \\ 5x- & y+ & az = & 6 \end{array}\right.$$

1. (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro a.
2. (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Problema 2.3.2 *(2 puntos)* Sea k un número natural y sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. (1 punto) Calcular A^k.
2. (1 punto) Hallar la matriz X que verifica la ecuación $A^kX = BC$.

Problema 2.3.3 *(3 puntos)*Dado el plano $\pi : x + y + x = 1$, la recta $r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1)$, y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

1. (1 punto) Hallar la ecuación de la recta s que sea perpendicular a r y pase por P.
2. (1 punto) Hallar el punto P', simétrico de P respecto de r.
3. (1 punto) Hallar el punto P'', simétrico de P respecto de π.

Problema 2.3.4 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \sin x$

1. (0,5 puntos) Calcular $a > 0$ tal que el área encerrada por la gráfica de f, el eje $y = 0$, y la recta $x = a$, sea $\frac{1}{2}$.

2. (1 punto) Calcular la ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = \frac{\pi}{4}$

3. (1,5 puntos) Calcular el área de la superficie encerrada por la tangente anterior, la gráfica de la función f y las rectas $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$.

2.4. Junio 2001 - Opción B

Problema 2.4.1 *(2 puntos)* Sea la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} (2-x)^3 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

1. (0,5 puntos) Razonar si la función es continua en todoa la recta real.

2. (0,5 puntos) Razonar si f es derivable en toda la recta real.

3. (1 punto) Determinar el área encerrada por la gráfica de f y por las tres rectas $y = 8$, $x = 0$, $x = 2$.

Problema 2.4.2 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Determinar los extremos relativos de la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$. Dibujar su gráfica

2. (1 punto) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto $P(3, -5)$.

Problema 2.4.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real λ.

2. (1 punto) Resolverlo para $\lambda = -3$.

3. (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 1$.

Problema 2.4.4 *(3 puntos)* Sean las rectas

$$r : x - 2 = \frac{y-1}{k} = \frac{z+1}{-2} \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right.$$

1. (1 punto) Hallar k para que r y s sean coplanarias.
2. (1 punto) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
3. (1 punto) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas.

2.5. Septiembre 2001 - Opción A

Problema 2.5.1 *(2 puntos)* Determinar la ecuación cartesiana de los puntos del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(0, 0)$ y $(1, 1)$ es igual a 9. Si se trata de una curva cerrada, calcular el área que encierra.

Problema 2.5.2 *(2 puntos)* Sean A, B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación

$$\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA}$$

1. (1 punto) Calcular el valor que toma k en la expresión $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$
2. (1 punto) Si $A(1, 2, -1)$ y $B(3, 6, 9)$, hallar las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.

Problema 2.5.3 *(3 puntos)* Se consideran las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = ax^2 + b$

1. (1 punto) Calcular a y b para que las gráficas de f y g sean tangentes en el punto de abcisa $x = 2$.
2. (1 punto) Para los valores de a yb calculados en el apartado anterior, dibujar las gráficas de ambas funciones y hallar la ecuación de la recta tangente común.
3. (1 punto) Para los mismos valores de a yb, hallar el área limitada por las gráficas de las funciones y el eje vertical.

Problema 2.5.4 *(3 puntos)* Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} ax+ & y+ & 4z = & 1 \\ -x+ & ay- & 2z = & 1 \\ & y+ & z = & a \end{array} \right.$$

1. (1 punto) Discutir el sistema según los valores del parámetro a.
2. (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.
3. (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

2.6. Septiembre 2001 - Opción B

Problema 2.6.1 *(2 puntos)*.Sean la función $f(t) = \dfrac{1}{1+e^t}$

1. (1 punto) Calcular $\displaystyle\int f(t)dt$
2. (1 punto) Se definen $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$

Problema 2.6.2 *(2 puntos)* Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 tal que:

- $P(x)$ es una función par.
- Dos de sus raices son $x = 1$ y $x = \sqrt{5}$.
- $P(0) = 5$.

Se pide:

1. (1 punto) Hallar sus puntos de inflexión.
2. (1 punto) Dibujar su gráfica.

Problema 2.6.3 *(3 puntos)* Se considera el tetraedro cuyos vértices son $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(-2, 1, 0)$ y $D(0, 1, 3)$.

1. (1 punto) Hallar el área del triángulo ABC y el volumen del tatraedro $ABCD$.
2. (1 punto) Calcular la distancia de D al plano determinado por los puntos A, B y C.
3. (1 punto) Hallar la distancia entre las rectas AC y BD.

Problema 2.6.4 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ se pide:

1. (1 punto) Comprobar que verifica la igualdad $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.
2. (1 punto) Justificar que A tiene inversa y obtener A^{-1}.
3. (1 punto) Calcular A^{100}.

Capítulo 3

Año 2002

3.1. Modelo 2002 - Opción A

Problema 3.1.1 *(2 puntos)* Se considera una varilla $\overline{AB}$ de longitud 1. El extremo A de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$; la varilla se mantiene en todo momento tangente a dicha circunferencia.

1. (1 punto) Determinar el lugar geométrico descrito por el extremo B de la varilla.

2. (1 punto) Obtener la ecuación cartesiana de dicho lugar geométrico.

Problema 3.1.2 *(2 puntos)* Sean las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{c} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{array} \right. \qquad s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{a} = z$$

1. (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s según los valores de a.

2. (1 punto) Calcular la distancia entre las rectas r y s cuando $a = -2$:

Problema 3.1.3 *(3 puntos)* Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 + 2A = I$, donde I denota la matriz identidad.

1. (1 punto) Demostrar que A es no singular ($det(A) \neq 0$) y expresa A^{-1} en función de A e I.

2. (1 punto) Calcular dos números p y q tales que $A^3 = pI + qA$

3. (1 punto) Si
$$A = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & k \end{array} \right)$$
cumple la relación de partida, calcular el valor de k.

Problema 3.1.4 *(3 puntos)* Dada la parábola $y = 4 - x^2$, se considera el triángulo rectángulo $T(r)$ formado por los ejes de coordenadas y la tangente a la parábola en el punto de abcisa $x = r > 0$.

1. (2 puntos) Hallar r para que $T(r)$ tenga área mínima.

2. (1 punto) Calcular el área de la región delimitada por la parábola, su tangente en el punto de abcisa $x = 1$, y el eje vertical.

3.2. Modelo 2002 - Opción B

Problema 3.2.1 *(3 puntos)* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcular A^{-1}.

2. (1 punto) Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

Problema 3.2.2 *(2 puntos)* Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para cada número real O definimos la matriz $B = A - OI$, donde I denota la matriz identidad 2×2.

1. (1 punto) Hallar los valores de O que hacen que el determinate de B sea nulo.

2. (1 punto) Resolver el sistema

$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Para los diferente valores de O.

Problema 3.2.3 *(3 puntos)* Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

1. (1 punto) Hallar su centro y su radio y dibujarla.

2. (1 punto) Hallar el punto de la curva, de abcisa cero, más alejado del origen; hallar también la recta tangente a la curva en ese punto.

3. (1 punto) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(3,0)$ razonando la respuesta.

Problema 3.2.4 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = xe^{3x}$

1. (1,5 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f.

2. (1,5 puntos) Sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de f y el eje OX entre $x = 0$ y $x = p$ ($p > 0$) vale $1/9$, calcular el valor de p.

3.3. Junio 2002 - Opción A

Problema 3.3.1 *(2 puntos)* Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Problema 3.3.2 *(2 puntos)* Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Problema 3.3.3 *(3 puntos)* Se consideran las cónicas C_1 y C_2 cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \quad ; \quad C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

1. (2 puntos) Identificar C_1 y C_2. Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad, y asíntotas (si existen).

2. (1 punto) Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1.

Problema 3.3.4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

1. (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abcisa positiva de la gráfica de f.
2. (2 puntos) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta anterior y el eje $x = 0$.

3.4. Junio 2002 - Opción B

Problema 3.4.1 *(2 puntos)* Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r:

$$x = 1 + t \quad , \quad y = -1 + 2t \quad , \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π:

$$2x + y - z = 2.$$

Problema 3.4.2 *(2 puntos)* Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$, $C(1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.
Se pide:

1. (1 punto) Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.
2. (1 punto) Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Problema 3.4.3 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x- & y & & = \; 2 \\ ax+ & y+ & 2z & = \; 0 \\ x- & y+ & az & = \; 1 \end{array} \right.$$

Se pide:

1. (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.
2. (0,5 punto) Resolver el sistema para $a = -1$.
3. (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.

Problema 3.4.4 *(3 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{x^2+3x+1}{x} & si & x \geq -1 \\ & & \\ \frac{2x}{x-1} & si & x < -1 \end{array} \right.$$

1. (0,5 punto) Estudiar el dominio y la continuidad de f.
2. (1,5 puntos) Hallar las asíntotas de la gráfica de f.
3. (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado y limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$ $x = 1$, $x = 2$.

3.5. Septiembre 2002 - Opción A

Problema 3.5.1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

1. (1 punto) Determinar sus máximos y mínimos relativos.
2. (1 punto) Calcular el valor de $a > 0$ para el cual se verifica la igualdad

$$\int_0^a f(x)\,dx = 1$$

Problema 3.5.2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lcl} \sqrt[3]{x-2} & \text{si} & x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si} & x < 2 \end{array} \right.$$

1. (1 punto) Estudiar su continuidad y derivabilidad.
2. (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3, 1)$.

Problema 3.5.3 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependientes del parámetro real λ:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & \lambda z = & \lambda^2 \\ & y- & z = & \lambda \\ x+ & \lambda y+ & z = & \lambda \end{array} \right.$$

1. (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ.
2. (1 punto) Resolver el sistema en los caso en que sea posible.
3. (0,5 puntos) En el caso $\lambda = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

Problema 3.5.4 *(3 puntos)* Se consideran las rectas

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2} \quad s : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

1. (1 punto) Calcular la distancia entre r y s.
2. (1 punto) Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s y que corta a ambas.
3. (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s y que pasa por el punto $P(1, 0, 0)$.

3.6. Septiembre 2002 - Opción B

Problema 3.6.1 *(2 puntos)* Hallar una ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -1)$ es igual a 1. Identificar dicho lugar geométrico.

Problema 3.6.2 *(2 puntos)* Para cada valor del parámetro real a, se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1 : x + y + az = -2; \quad \pi_2 : x + ay + z = -1; \quad \pi_2 : ax + y + z = 3$$

Se pide:

1. (1,5 puntos) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.
2. (0,5 puntos) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

Problema 3.6.3 *(3 puntos)* Sea A una matriz cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2 = I$, siendo I la matriz identidad de orden n.

Se pide:

1. (1 punto) Expresar A^{-1} en térmninos de A
2. (1 punto) Expresar A^n en términos de A e I, para cualquier número natural n.
3. (1 punto) Calcular a para que $A^2 = I$, siendo A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 3.6.4 *(3 puntos)* Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que:

$$f(0) = 1; \quad f(1) = 2; \quad f'(0) = 3; \quad f'(1) = 4.$$

Se pide:

1. (1 punto) Calcular $g'(0)$, siendo $g(x) = f(x + f(0))$.
2. (2 punto) Calcular $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{2(f(x))^2 - f(x+1)}{e^x - 1}$

Capítulo 4

Año 2003

4.1. Modelo 2003 - Opción A

Problema 4.1.1 *(2 puntos)* Determinar los valores de las constantes A, B, C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real

$$f(x) = A\sin x + Bx^2 + Cx + D$$

tiene tangente horizontal en el punto $(0, 4)$ y además su derivada segunda es $f''(x) = 3\sin x - 10$

Problema 4.1.2 *(2 puntos)* Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^2+4}{x^2-5x+6}\,dx$$

Problema 4.1.3 *(3 puntos)* Sea M una matriz cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Se pide:

1. (1 punto) Estudiar si existe la matriz inversa de M. En caso afirmativo, expresar M^{-1} en términos de M e I.
2. (1 punto) Expresar M^3 como combinación lineal de M e I.
3. (1 punto) Hallar todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Problema 4.1.4 *(3 puntos)* Se consideran el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi : x + y - 2z = 6; \quad r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

Se pide:

1. (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1,1,1)$ respecto del plano π.

2. (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1,1,1)$ respecto de la recta r.

4.2. Modelo 2003 - Opción B

Problema 4.2.1 *(3 puntos)* Hallar todas las matrices X tales que $XA = AX$, siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 4.2.2 *(2 puntos)* Para cada valor del parámetro real k, se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2k \\ 3x- & 5y = & k^2 \end{array}\right.$$

Se pide:

1. (1 punto) Discutir el sistema según los valores de k.

2. (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea compatible.

Problema 4.2.3 *(3 puntos)* Se consideran los puntos:

$$A(1,1,1),\ \ B(0,-2,2)\ \ C(-1,0,2)\ \ D(2,-1,-2).$$

Se pide:

1. (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

2. (1 punto) Calcular la distancia del punto D al plano determinado por los puntos A, B y C.

3. (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C.

Problema 4.2.4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$$

1. (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

2. (0,5 puntos) Hallar los puntos donde la gráfica de f tiene tangente vertical.

3. (0,5 puntos) Representar gráficamente la función.
4. (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x = -1$, $x = 1$.

   Nota: Para obtener las asíntotas puede ser de utilidad la igualdad:
$$A - B = \frac{A^3 - B^3}{A^2 + AB + B^2}$$

4.3. Junio 2003 - Opción A

Problema 4.3.1 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites (donde "ln"significa logaritmo neperiano).

1. (1 punto) $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$
2. (1 punto) $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{4x}$

Problema 4.3.2 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6}$

1. (1 punto) Encontrar los puntos de discontinuidad de f. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.
2. (1 punto) Estudiar sin f tiene alguna asíntota vertical.

Problema 4.3.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones
$$\left\{\begin{array}{rrr} (m+2)x+ & (m-1)y- & z = 3 \\ mx- & y+ & z = 2 \\ x+ & my- & z = 1 \end{array}\right.$$

1. (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.
2. (2 puntos) Discutirlo para los distintos valores de m.

Problema 4.3.4 *(3 puntos)* Dadas las rectas en el espacio:
$$r : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$$
$$s : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

1. (1,5 punto) Hallar la distancia entre las dos rectas.

2. (1,5 puntos) Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s.

4.4. Junio 2003 - Opción B

Problema 4.4.1 *(2 puntos)* Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

Problema 4.4.2 *(2 puntos)* Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión 2×2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 4.4.3 *(3 puntos)*

1. (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$

2. (1 punto) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento para $x \longrightarrow \infty$ y $x \longrightarrow -\infty$.

3. (1 punto) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

Problema 4.4.4 *(3 puntos)* Dados el plano

$$\pi : x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$s : \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

1. (1,5 punto) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

2. (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π, π'.

4.5. Septiembre 2003 - Opción A

Problema 4.5.1 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(1,0,1)$ y $B(0,2,0)$, y el plano $\pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B.

Problema 4.5.2 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1}$$

$$s: \left\{ \begin{array}{rrr} x- & y+ & z = 3 \\ 3x+ & & z = 1 \end{array} \right.$$

1. (1 punto) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.
2. (1 puntos) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

Problema 4.5.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rrr} 3x+ & 4y+ & 3z = 9 \\ mx+ & 2y+ & z = 5 \\ x+ & y+ & z = 2 \end{array} \right.$$

1. (1,5 puntos) Determinar los valores de m para que el sistema dado tenga solución única.
2. (1,5 puntos) Resolverlo para $m = 1$.

Problema 4.5.4 *(3 puntos)* Sea la función

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

definida en el intervalo cerrado y acotado $[-2\pi, 2\pi]$. Se pide:

1. (1 punto) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.
2. (1 punto) Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo dado.
3. (1 punto) Calcular
$$\int_0^{\pi/3} f(x)\, dx$$

4.6. Septiembre 2003 - Opción B

Problema 4.6.1 *(2 puntos)* Un mayorista del sector turístico vende a la agencia de viajes A, 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a destinos internacionales no comunitarios, y cobra 13.000 euros. A una tercera agencia C le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7.000 euros. Se pide:

1. (1,5 puntos) Hallar el precio de cada billete.
2. (0,5 puntos) Por razones de mercado, el mayorista se ve obligado a bajar un 20 por ciento el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de todos los billetes extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias.

Problema 4.6.2 *(2 puntos)*

1. Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad $A+B=AB$. Comprobar que entonces se tiene la fórmula:
$$(I-B)^{-1}=-B^{-1}A$$
(Donde I denota la matriz identidad).
2. Dada la matriz
$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$
hallar la matriz B para la cual se verifica $A+B=AB$.

Problema 4.6.3 *(3 puntos)*Sea la función $f(x)=2x|4-x|$.

1. Estudiar su continuidad y su derivabilidad.
2. Dibujar su gráfica.
3. Calcular el área del recinto acotado por la gráfica $y=f(x)$, las rectas $x=0$, $x=5$, y el eje OX.

Problema 4.6.4 *(3 puntos)* Dado el plano

$$\pi: x+y+z=0$$

y la recta

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

se pide:

1. (1 punto) Calcular el punto Q en el que se cortan el plano π y la recta r.

2. (2 puntos) Encontrar un plano π', paralelo a π, tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.

Capítulo 5

Año 2004

5.1. Modelo 2004 - Opción A

Problema 5.1.1 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Calcular el límite de la sucesión cuyo término general es $\left(\dfrac{3n-1}{3n}\right)^{2n}$.

2. (1 punto) Sean las funciones $F(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{5+e^{t^4}}\,dt$, $g(x) = x^2$. Calcular $(F(g(x)))'$.

Problema 5.1.2 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{e^x - 1}{x^2 - x} & \text{si} & x \neq 0 \\ & & \\ a & \text{si} & x = 0 \end{array} \right.$$

1. (1 punto) Determinar su dominio, y calcular los límites laterales cuando $x \longrightarrow 1$.

2. (1 punto) Estudiar su continuidad, y hallar el valor de a para el que f es continua en $x = 0$.

Problema 5.1.3 *(3 puntos)* Discutir según los valores del parámetro λ, y resolver en los casos que sea posible el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 6x+ & 4y+ & 2\lambda z = & 2 \\ \lambda x+ & y- & z = & 2 \\ 5x+ & 3y+ & 3z = & 2\lambda \end{array} \right.$$

Problema 5.1.4 *(3 puntos)* Dado el plano $\pi : x + y + az + 1 = 0$ y las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{array} \right. \quad r' : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2t \\ z = t \end{array} \right. \quad r'' : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 3t \\ z = t \end{array} \right.$$

Se pide:

1. Calcular el valor de a para que los puntos de corte del plano π con las rectas r, r' y r'' estén alineados (1,5 puntos).
2. Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por esos tres puntos (0,75 puntos).
3. Calcula la distancia de dicha recta al origen (0,75 puntos).

5.2. Modelo 2004 - Opción B

Problema 5.2.1 *(2 puntos)* seconsideran las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - y = 2 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} 2x - z + 2 = 0 \\ 2y - mz = 6 \end{array} \right.$$

1. Hallar el valor de m para que r y s sean paralelas.
2. Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene las rectas r y s.

Problema 5.2.2 *(2 puntos)* Calcular las ecuaciones parámetricas de la recta que pasa por el punto $P(3, -1, 0)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 5 + 3\lambda \end{array} \right.$$

Problema 5.2.3 *(3 puntos)* Se considera la función :

$$f(x) = \frac{1}{1 + (\sin x)^2}$$

Se pide:

1. (1 punto) Calcular sus puntos críticos en el intervalo abierto $(-\pi, \pi)$.
2. (1 punto) Calcular los extremos relativos y/o absolutos de la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[-\pi, \pi]$.
3. (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $(\pi/4, f(\pi/4)$.

Problema 5.2.4 *(3 puntos)*.Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & az = & 4 \\ x+ & ay+ & z = & 2 \\ x+ & 4y- & 5z = & 6 \end{array}\right.$$

Se pide:

1. (2 punto) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

2. (1 punto) Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.

5.3. Junio 2004 - Opción A

Problema 5.3.1 *(2 puntos)* Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Problema 5.3.2 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

1. (1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.

2. (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

Problema 5.3.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} (1-a)x- & 2y+ & 4z=0 \\ x- & (1+a)y+ & z=0 \\ -x+ & ay- & z=0 \end{array}\right.$$

1. (1,5 puntos) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro a.

2. (1,5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado.

Problema 5.3.4 *(3 puntos)* Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x = 2-3\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = 4-\lambda \end{array}\right. ; \quad \pi_1: 2-3x+2y-z=0; \quad \pi_2: 3+2x+2y-2z=0$$

1. (1 punto) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.

2. (1 punto) Determinar la posición relativa de los dos planos.

3. (1 punto) Calcular la distancia de r a π_2.

5.4. Junio 2004 - Opción B

Problema 5.4.1 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. (1 punto) Hallar A^{-1}.

2. (1 punto) Hallar la matriz X, tal que:

$$A \cdot X \cdot A^T = B$$

(donde A^T significa la matriz traspuesta de A).

Problema 5.4.2 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{rr} x+ & 2y = 1 \\ 3x- & y = 2 \end{array} \right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax + by = c$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

2. (1 punto) Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{rrr} 2x+ & 2y- & z = 1 \\ x+ & y+ & 2z = 1 \end{array} \right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante siga siendo compatible indeterminado.

Problema 5.4.3 *(3 puntos)*

1. (2 puntos) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro k:

$$\begin{array}{rrrrr} \pi_1: & 2x+ & 3y+ & kz = & 3 \\ \pi_2: & x+ & ky- & z = & -1 \\ \pi_3: & 3x+ & y- & 3z = & -k \end{array}$$

2. (1 punto) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

Problema 5.4.4 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

1. (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.

2. (1 punto) Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado anterior corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.

3. (1 punto) Determinar el valor de $a \in (0,1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$.

5.5. Septiembre 2004 - Opción A

Problema 5.5.1 (2 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Determinar la matriz inversa de B.

2. (1 punto) Determinar una matriz X tal que $A = B \cdot X$.

Problema 5.5.2 (2 puntos)

1. (1 punto) Si A es una matriz tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A?

2. (1 punto) Calcular un número k tal que:

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 5.5.3 (3 puntos) Sea el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$.

1. (1 punto) Hallar el punto simétrico del $(0, 0, 0)$ respecto de π.

2. (1 punto) Hallar el plano perpendicular a π que contiene a OZ.

3. (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes de coordenados.

Problema 5.5.4 (3 puntos) Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x) = (x-4)^2(x^2 - 8x + 7)$$

1. (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

2. (1 punto) Hallar los máximos y mínimos relativos de f.

3. (1 punto) ¿Es el punto $x = 4$ un punto de inflexión de f?. Justificar razonadamente la respuesta.

5.6. Septiembre 2004 - Opción B

Problema 5.6.1 (2 puntos)

1. (1,5 puntos) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z = 0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x - y + 2z = 4$.

2. (0,5 puntos) Describir dicho conjunto.

Problema 5.6.2 (2 puntos) El plano $\pi : 2x - 2y + z = -2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

1. (0,5 puntos) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.

2. (0,5 puntos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.

3. (1 punto) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π.

Problema 5.6.3 (3 puntos) Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

1. (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

2. (1 punto) Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abcisas son $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.

3. (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje OX, la recta $x = 0$, y la recta $x = 2$.

Problema 5.6.4 (3 puntos)

1. (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrr} \lambda x+ & 3y+ & z= & \lambda \\ x+ & \lambda y+ & \lambda z= & 1 \\ x+ & y- & z= & 1 \end{array}\right.$$

2. (1 punto) Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda = 2$

Capítulo 6

Año 2005

6.1. Modelo 2005 - Opción A

Problema 6.1.1 *(2 puntos)*

1. Justificar razonadamente que la gráfica de la función
$$f(x) = x^{15} + x + 1$$
corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1, 1]$.
2. Determinar el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real.

Problema 6.1.2 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Determinar el punto P, contenido en el primer cuadrante, en el que se corta la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$.
2. (1 punto) Calcular el área de la región limitada por la recta que une el origen y el punto P hallado en el apartado anterior, y el arco de la curva $y = \dfrac{x^2}{2}$ comprendido entre el origen y el punto P.

Problema 6.1.3 *(3 puntos)*

1. (2 punto) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema
$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2\lambda x+ & 2y+ & \lambda z = & 1 \\ x+ & \lambda y- & z = & 1 \\ 4x+ & 3y+ & z = & 2\lambda \end{array} \right.$$

2. (1 punto) Resolver el sistema anterior en los casos en que sea compatible.

Problema 6.1.4 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(-1,1,1)$, $B(1,-3,-1)$ y $C(1,0,3)$, hallar las coordenadas de un punto D perteneciente a la recta:

$$r: x-1=\frac{y-1}{-1}=z-1$$

de manera que el tetraedro $ABCD$ tenga un volumen igual a 2.

6.2. Modelo 2005 - Opción B

Problema 6.2.1 *(2 puntos)* considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que a es un parámetro real:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -ax+ & 4y+ & az= & -a \\ 4x+ & ay- & az= & a \\ -x- & y+ & z= & 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

1. (1 punto) Discutir el sistema
2. (1 punto) Resolver el sistema para $a=1$.

Problema 6.2.2 *(2 puntos)* Sea la matriz:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

1. (1 punto) Comprobar que
$$A^3-2A^2=0$$
2. (1 punto) Hallar A^n.

Problema 6.2.3 *(3 puntos)* Sea la función $f(x)=\ln(1+x^2)$, donde ln significa *Logaritmo Neperiano.*

1. (1 punto) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad.
2. (1 punto) Dibujar la gráfica de f.
3. (1 punto) Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

Problema 6.2.4 *(3 puntos)* Se considera la recta: $r:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-5}{2}$ y la familia de rectas dependientes del parámetro m:

$$s:\left\{\begin{array}{l} 3x-y=8-12m\\ y-3z=7-3m\end{array}\right.$$

1. (2 puntos) Determinar el valor de m para el que las dos rectas r y s se cortan.

2. (1 punto) Para el caso de $m=0$, hallar la distancia entre las dos rectas.

6.3. Junio 2005 - Opción A

Problema 6.3.1 *(2 puntos)* Sea $f(x)$ una función derivable en $(0,1)$ y continua en $[0,1]$, tal que $f(1)=0$ y $\displaystyle\int_0^1 2xf'(x)dx=1$. Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Problema 6.3.2 *(2 puntos)* Calcular un polinomio de tercer grado $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ sabiendo que verifica:

- tiene un máximo relativo en $x=1$
- tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0,1)$.
- se verifica que
$$\int_0^1 p(x)dx=\frac{5}{4}$$

Problema 6.3.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} (m-1)x+ & y+ & z= & 3\\ mx+ & (m-1)y+ & 3z= & 2m-1\\ x+ & 2y+ & (m-2)z= & 4\end{array}\right.$$

1. (1,5 punto) Discutirlo según los distintos valores de m.

2. (1,5 puntos) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Problema 6.3.4 *(3 puntos)* Dado el punto $P(1,3,-1)$, se pide:

1. (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.

2. (2 puntos) Calcular los puntos de la recta

$$\left\{\begin{array}{rrr} x = & & 3\lambda \\ y = & 1+ & \lambda \\ z = & 1- & 4\lambda \end{array}\right.$$

cuya distancia a P es igual 3.

6.4. Junio 2005 - Opción B

Problema 6.4.1 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y+ & 3z = 1 \\ 2x+ & y- & z = 2 \end{array}\right.$$

2. (1 punto) Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación: $5x + y + \alpha z = \beta$, el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Problema 6.4.2 *(2 puntos)* Hallar una matriz X tal que:

$$A^{-1}XA = B$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 6.4.3 *(3 puntos)* Calcular los siguientes límites

1. (1,5 puntos)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}\right)$$

2. (1,5 puntos)

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} x \left[\arctan\left(e^x\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

Problema 6.4.4 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4} \quad s : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$$

1. (1,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.

2. (1,5 puntos) Calcular la mínima distancia entre r y s.

6.5. Septiembre 2005 - Opción A

Problema 6.5.1 *(2 puntos)* Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos

$$\begin{array}{l} \pi_1 : x + z = \lambda \\ \pi_2 : 4x + (\lambda - 2)y + (\lambda + 2)z = \lambda + 2 \\ \pi_3 : 2(\lambda + 1)x - (\lambda + 6)z = -\lambda \end{array}$$

Problema 6.5.2 *(2 puntos)* Se consideran las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{rrrl} x- & y & & = 3 \\ x+ & y & -z & = 0 \end{array} \right. , \quad s : \left\{ \begin{array}{rrrl} x- & & z & = 4 \\ 2x- & y & & = 7 \end{array} \right.$$

1. (1 punto) Hallar la recta t, perpendicular a r y a s, que pasa por el origen.

2. (1 punto) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado anterior.

Problema 6.5.3 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.

2. (1 punto) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.

3. (1 punto) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A-X)(A+X) = A^2 - X^2$.

Problema 6.5.4 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ se pide:

1. (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a > 0$

2. (1 punto) Hallar los puntos de corte de las recta tangente hallada en el apartado anterior con los ejes coordenados.

3. (1 punto) Hallar el valor de $a > 0$ que hace que las distancias entre los dos puntos hallados en el apartado anterior sea mínima.

6.6. Septiembre 2005 - Opción B

Problema 6.6.1 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{x-1}$ donde ln significa *logaritmo neperiano*, definida para $x > 1$, hallar un punto $(a, f(a))$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje OX.

Problema 6.6.2 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

1. (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales de la función $f(x)$.
2. (1 punto) Determinar el valor del parámetro a tal que:

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{1}{4}$$

Problema 6.6.3 *(3 puntos)* Se considera la familia de planos:

$$mx + (m-2)y + 3(m+1)z + (m+1) = 0$$

siendo m un parámetro real.

Se pide:

1. (1 punto) Determinar la recta común a todos los planos de la familia.
2. (1 punto) Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto $P(1, 1, 0)$.
3. (1 punto) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & & 2z+ & 1=0 \\ - & y+ & z+ & 1=0 \end{array}\right.$$

Problema 6.6.4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Hallar A^{10}.
2. (1 puntos) Hallar la matriz inversa de B.
3. (1 punto) En el caso particular de $k = 0$, hallar B^{10}.

Capítulo 7

Año 2006

7.1. Modelo 2006 - Opción A

Problema 7.1.1 *(2 puntos)* Un punto de luz situado en $P(0,1,1)$ proyecta la sombra de la recta:

$$x = y = -z$$

sobre el plano $\pi : x - z = 0$.

Calcular las coordenadas del punto de esta proyección que pertenece al plano $z = 1$.

Problema 7.1.2 *(2 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-5}{2} \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $P(2,-1,1)$ y cuyo vector director es perpendicular a lo vectores directores de las dos rectas anteriores.

Problema 7.1.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y- & z = & k \\ x+ & 2y+ & 3z = & 2 \\ kx+ & ky- & 4z = & -1 \end{array} \right.$$

1. (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

2. (1 punto) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Problema 7.1.4 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

1. (2 puntos) Hallar sus máximos y mínimos locales y/o globales.

2. (1 punto) Determinar el valor del parámetro $a > 0$ para el cual es:

$$\int_0^a f(x)\,dx = -1$$

7.2. Modelo 2006 - Opción B

Problema 7.2.1 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Hallar el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciones:
$$f(x) = \frac{2}{x} \quad g(x) = +\sqrt{x^2-3}$$

2. (1 punto) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demostrar que son perpendiculares.

Problema 7.2.2 *(2 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{2+\sin x - \cos x}$$

Se pide:

1. (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales en el intervalo $[-\pi, \pi]$

2. (1 punto) Comprobar la existencia de, al menos, un punto $c \in [-\pi, \pi]$ tal que $f''(c) = 0$. (Sugerencia: utilizar el teorema de Rolle). Demostrar que en c hay un punto de inflexión.

Problema 7.2.3 *(3 puntos)*Dadas las rectas:

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{1} \quad s: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

1. (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

2. (1,5 puntos) Calcular la distancia de s al plano anterior.

Problema 7.2.4 *(3 puntos)* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. (1,5 punto) Hallar $(A - I)^2$.
2. (1,5 punto) Calcular A^4 haciendo uso del apartado anterior.

7.3. Junio 2006 - Opción A

Problema 7.3.1 *(2 puntos)* Dado el sistema homogeneo

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & ky & -z = 0 \\ kx- & y & +z = 0 \\ (k+1)x+ & y & = 0 \end{array}\right.$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resolverlo en tales casos.

Problema 7.3.2 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tales que $AP = PA$.

Problema 7.3.3 *(3 puntos)* Se pide:

1. (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.
2. (1 punto) Demostrar que la función $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ es monótona creciente.
3. (1 punto) Calcular $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} n^2(a_{n+1} - a_n)$

Problema 7.3.4 *(3 puntos)* Sean las rectas:

$$r : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \qquad \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

1. (1,5 punto) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.
2. (1,5 puntos) Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s.

7.4. Junio 2006 - Opción B

Problema 7.4.1 *(2 puntos)* Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\overrightarrow{v} = (4, 3, 1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi : z = 0$, el triángulo OPQ tenga área 1.

Problema 7.4.2 *(2 puntos)* Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r : \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1} \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 5z - 5 = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{array} \right.$$

Problema 7.4.3 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.

2. (1,5 punto) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

Problema 7.4.4 *(3 puntos)* Se pide:

1. (1,5 punto) Estudiar y representar gráficamente la función:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

2. (1,5 puntos) Hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y = 1$, $x = 5/2$.

7.5. Septiembre 2006 - Opción A

Problema 7.5.1 *(2 puntos)* Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 2x}$

Problema 7.5.2 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Calcular los valores de a y b para que la función

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 3x + 2 & \text{si} & x < 0 \\ x^2 + 2a\cos x & \text{si} & 0 \le x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si} & x \ge \pi \end{array} \right.$$

sea continua en todo valor de x.

2. (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para todos los valores a y b obtenidos en el apartado anterior.

Problema 7.5.3 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. (1 punto) Comprobar que $|A^2| = |A|^2$, y que $|A + I| = |A| + |I|$

2. (0,5 puntos) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple $|M^2| = |M|^2$?. Razonar la respuesta.

3. (1,5 puntos) Encontrar todas las matrices cuadradas M, de orden 2, tales que:
$$|M + I| = |M| + |I|$$

Problema 7.5.4 *(3 puntos)* Se consideran los puntos $A(0, 1, 0)$ y $B(1, 0, 1)$. Se pide:

1. (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ que equidistan de A y B.

2. (0,5 puntos) Determinar la ecuación que verifican los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a A es igual a la distancia de A a B.

3. (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x, y, z)$ del plano $x + y + z = 3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A.

7.6. Septiembre 2006 - Opción B

Problema 7.6.1 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:
$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y- & 3z = 0 \\ 2x+ & 3y- & z = 5 \end{array}\right.$$

2. (1 punto) Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

Problema 7.6.2 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Hallar todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 = A$

2. (1 punto)Para cualquiera de las matrices A obtenidas en el apartado a), calcular
$$M = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10}$$

Problema 7.6.3 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide:

1. (1,5 puntos) Dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

2. (1,5 puntos) Calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de $f(x)$ entre $-1 \leq x \leq 1$.

Problema 7.6.4 *(3 puntos)* Un plano π corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(0, \lambda, 0)$ y $C(0, 0, 4)$. Se pide:

1. (1,5 puntos) Hallar el valor de $\lambda > 0$ de manera que el volumen del tetraedro $OABC$ (donde O es el origen), sea 2.

2. (1,5 puntos) Para el valor de λ obtenido en el apartado a), calcular la longitud de la altura del tetraedro $OABC$ correspondiente al vértice O.

Capítulo 8

Año 2007

8.1. Modelo 2007 - Opción A

Problema 8.1.1 *(2 puntos)* Se considera la recta $\left\{\begin{array}{r} x-y=0 \\ x+2y+3z=0 \end{array}\right.$ y el punto $P(1,1,1)$. Dado el punto $Q(0,0,0)$ de r, hallar todos los puntos A contenidos en r tales que el triángulo de vértices A, P y Q tenga área 1.

Problema 8.1.2 *(2 puntos)*

1. (1,5 puntos) Calcula la ecuación general de un plano π_1 que contiene a la recta
$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$
y es perpendicular al plano $\pi_2: 2x+y-z=2$.

2. (0,5 puntos) Determinar la ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

Problema 8.1.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & k^2z= & 1 \\ x+ & ky- & kz= & k^2 \\ -x+ & ky- & k^2z= & k^2 \end{array}\right.$$

1. (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

2. (1 punto) Resolverlo para $k=-1$.

Problema 8.1.4 *(3 puntos)*

1. (1 puntos) Si f es una función continua, obtener $F'(x)$ siendo

$$F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3)\, dt$$

2. (2 punto) Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 f(t)dt = 1$, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$.

8.2. Modelo 2007 - Opción B

Problema 8.2.1 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$, se pide:

1. (1 punto) Hallar un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$.

2. (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de f y la parte positiva del eje OX.

Problema 8.2.2 *(2 puntos)* Obtener el valor de k sabiendo que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5} = e^2$$

Problema 8.2.3 *(3 puntos)* Se consideran el punto $P(1, 0, 1)$ y la recta:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

y el plano $\pi : x + y + z = 0$. Se pide:

1. (1,5 puntos) Obtener un punto P', simétrico de P respecto del plano π.

2. (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta s que contiene al punto P, corta a la recta r y es paralela al plano π.

Problema 8.2.4 *(3 puntos)* Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro λ.

2. (1,5 punto) Determinar para qué valores de λ existe la matriz inversa de M. Calcular dicha inversa para $\lambda = 0$.

8.3. Junio 2007 - Opción A

Problema 8.3.1 *(2 puntos)* Estudiar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro m.

Problema 8.3.2 *(2 puntos)* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$

Problema 8.3.3 *(3 puntos)* Dados el punto $A(1, -2, -3)$, la recta $r : \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi : x - 2y - 3z + 1 = 0$, se pide:

1. (1,5 puntos) Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.

2. (1,5 puntos) Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π.

Problema 8.3.4 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.

1. (1,5 puntos) Para cada valor de m hallar el valor de $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

2. (1,5 puntos) Hallar el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.

8.4. Junio 2007 - Opción B

Problema 8.4.1 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 12}{x^2 + 4}$ calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX.

Problema 8.4.2 *(2 puntos)* Dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{|x|}{2 - x}$$

indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

Problema 8.4.3 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. (1,5 puntos) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $AB = BA$.
2. (1,5 puntos) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10}.

Problema 8.4.4 *(3 puntos)* Sean los puntos

$$A(\lambda, 2, \lambda), \quad B(2, -\lambda, 0), \quad C(\lambda, 0, \lambda + 2)$$

1. (1 punto) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A, B y C están alineados?
2. (1 punto) Comprobar que si A, B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles.
3. (1 punto) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen coordenadas.

8.5. Septiembre 2007 - Opción A

Problema 8.5.1 *(2 puntos)* Hallar los puntos de la recta $r : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z+1}{1}$ cuya distancia al plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ es igual a 1.

Problema 8.5.2 *(2 puntos)* Sea consideran las rectas:

$$r : \left\{ \begin{array}{c} x - y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{c} x - z = 4 \\ 2x - y = 7 \end{array} \right.$$

Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto $P(2, -1, 2)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

Problema 8.5.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & (k+1)y+ & 2z = & -1 \\ kx+ & y+ & z = & k \\ (k-1)x- & 2y- & z = & k+1 \end{array} \right.$$

se pide:

1. (2 puntos) Discutirlo según los distintos valores de k.

2. (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Problema 8.5.4 *(3 puntos)*

1. (1,5 puntos) Hallar los máximos y los mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:
$$f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$$

2. (1,5 puntos) Determinar una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$ y además $F(0) = 4$.

8.6. Septiembre 2007 - Opción B

Examen de Matemáticas II (Septiembre 2007) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 8.6.1 *(2 puntos)* Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica
$$XA^2 + BA = A^2$$
siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 8.6.2 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones
$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z = & 3 \\ 2x+ & 3y+ & z = & 5 \end{array}\right.$$
se pide:

1. (1 punto) Calcular a y b de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $ax + y + bz = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.

2. (1 punto) Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

Problema 8.6.3 *(3 puntos)* Sean las rectas
$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}, \quad s : \left\{\begin{array}{l} x - 3y - 5 = 0 \\ x - 3z - 8 = 0 \end{array}\right.$$

1. (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

2. (1,5 puntos) Calcular la distancia entre el plano π y la recta s.

Problema 8.6.4 *(3 puntos)* Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x, de la que se conoce la siguiente información:

- $g'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, mientras que $g'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 2)$.

- $g''(x) > 0$ para todo $x \in (1, 3)$ y $g''(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

- $g(-1) = 0, \ \ g(0) = 2, \ \ g(2) = 1$.

- $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = 3$

Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide:

1. (1 punto) Analizar razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

2. (1 punto) Dibujar de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$.

3. (1 punto) Si $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\, dt$ encontrar un valor x_0 tal que su derivada $G'(x_0) = 0$

Capítulo 9

Año 2008

9.1. Modelo 2008 - Opción A

Problema 9.1.1 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

1. (1 punto) Hallar sus asíntotas y sus extremos locales.

2. (1 punto) Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ y dibujar la gráfica de $f(x)$.

Problema 9.1.2 *(2 puntos)* Calcular:

1. (1 punto) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}$

2. (1 punto) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}}{n+5}$

Problema 9.1.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & mz = & m+2 \\ 2x+ & (m+1)y+ & (m+1)z = & -m \\ (m+2)x+ & 3y- & (2m+1)z = & 3m+4 \end{array}\right.$$

1. (2 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real m.

2. (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Problema 9.1.4 *(3 puntos)* Sean los puntos $A(1,0,2)$ y $B(1,1,-4)$.

1. (1 punto) Determinar las coordenadas de los puntos P y Q que divide al segmento AB en tres partes iguales.

2. (1 punto) Si P es el punto del apartado anterior más próximo al punto A, determinar la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a la recta AB.

3. (1 punto) Determinar la posición relativa del plano π y la recta

$$r: \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

9.2. Modelo 2008 - Opción B

Problema 9.2.1 *(2 puntos)* Hallar los puntos de la recta $r: \left\{\begin{array}{l} 2x+z=0 \\ x-y+z=3 \end{array}\right.$ cuya distancia al plano $\pi: 3x+4y=4$ es igual a $\dfrac{1}{3}$.

Problema 9.2.2 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(1,3,-2)$, $B(2,2k+1,k)$ y $C(k+1,4,3)$, se pide:

1. (1 punto) Determinar para qué valor de k el triángulo BAC es rectángulo, con el ángulo recto en el vértice A.

2. (1 punto) Para el valor $k=0$ hallar el área del triángulo ABC.

Problema 9.2.3 *(3 puntos)* Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Hallar una matriz X tal que $AXA^{-1} = B$.

2. (1 punto) Calcular A^{10}.

3. (1 punto) Hallar todas las matrices M que satisfacen

$$(A-M)(A+M) = A^2 - M^2$$

Problema 9.2.4 *(3 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} ax^2+b & \text{si} & |x| < 2 \\ 1/x^2 & \text{si} & |x| \geq 2 \end{array}\right.$$

Se pide:

1. (1,5 punto) Calcular a y b para que f sea continua y derivable en todo R.

2. (1,5 punto) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular el área de la región acotada limitada por la gráfica de f el eje horizontal y las rectas $x=1$, $x=3$.

9.3. Junio 2008 - Opción A

Problema 9.3.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & ay= & 2 \\ ax- & y= & a+1 \end{array}\right.$$

se pide:

1. (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a. Resolverlo cuando la solución sea única.

2. (1 punto) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene solución en la que $y = 2$.

Problema 9.3.2 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x-ay=2 \\ ay+z=1 \end{array}\right. \qquad s:\left\{\begin{array}{l} x-z=1 \\ y+z=3 \end{array}\right.$$

se pide:

1. (1,5 puntos) Discutir la posición relativa de las dos rectas r, s según los valores del parámetro a.

2. (1,5 puntos) Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r y s.

Problema 9.3.3 *(2 puntos)* Estudiar los siguientes límites:

1. (1 punto) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}(e^x - x^2)$

2. (1 punto) $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\dfrac{4^x+5^x}{3^x+6^x}$

Problema 9.3.4 *(2 puntos)* Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x(\ln(x))^2$$

siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x.

9.4. Junio 2008 - Opción B

Problema 9.4.1 *(3 puntos)* Dada la siguiente matriz de orden n:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_2.
2. (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_3.
3. (2 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_5.

Problema 9.4.2 *(3 puntos)*

1. (1,5 puntos) Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función:

$$f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1$$

el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

2. (1,5 puntos) Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado anterior es mínima.

Problema 9.4.3 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 0, -1)$, $C(0, 1, -2)$ y $D(1, 2, 0)$, se pide:

1. (0,5 puntos) Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.
2. (1 punto) Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.
3. (0,5 puntos) Hallar la distancia del punto D al plano π.

Problema 9.4.4 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi : 3x + 2y - z + 10 = 0$ y el punto $P(1, 2, 3)$, se pide:

1. (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.
2. (0,5 puntos) Hallar el punto Q intersección de π con r.
3. (0,5 puntos) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY.
4. (0,5 puntos) Hallar el área del triángulo PQR

9.5. Septiembre 2008 - Opción A

Problema 9.5.1 *(3 puntos)* Dada la función;

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + 1)$$

se pide:

1. (2 puntos) Dibujar la gráfica de f, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

2. (1 punto) Calcular:
$$\int_0^1 f(x)\, dx$$

Problema 9.5.2 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. (1,5 puntos) Determinar el rango de A según los valores del parámetro a.

2. (1,5 puntos) Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para $a = 1$.

Problema 9.5.3 *(2 puntos)* Dados los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(0, 1, 0)$, se pide:

1. (1 punto) Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.

2. (1 punto) Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican $\text{dist}(P, S) = 2\text{dist}(Q, S)$, donde "dist" significa distancia.

Problema 9.5.4 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}, \quad s: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$$

hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.

9.6. Septiembre 2008 - Opción B

Problema 9.6.1 *(3 puntos)*

1. (1,5 puntos) Calcular:
$$\int x^3 \ln(x)\, dx$$
donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x.

2. (1,5 puntos) Utilizar el cambio de variable
$$x = e^t - e^{-t}$$
para calcular:
$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$$
Indicación : Para deshacer el cambio de variable utilizar:
$$t = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$$

Problema 9.6.2 *(3 puntos)* Dados el plano:
$$\pi_1 : x + y + z = 1$$
y la recta:
$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$$
se pide:

1. (1 punto) Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1.

2. (2 puntos) Hallar el plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1, π_2 tenga longitud $\sqrt{29}$ unidades.

Problema 9.6.3 *(2 puntos)* Resolver el siguiente sistema:
$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -2y & +\ z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & +\ z & +3v & = & 4 \\ 2x & -4y & +2z & -6v & = & -8 \\ 2x & & +2z & & = & 0 \end{array}\right.$$

Problema 9.6.4 *(2 puntos)* El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

Capítulo 10

Año 2009

10.1. Modelo 2009 - Opción A

Problema 10.1.1 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi : x + 2y - z = 2$, la recta:

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{4}$$

y el punto $P(-2, 3, 2)$, perteneciente al plano π, se pide:

1. (0,5 puntos) Determinar la posición relativa de π y r.
2. (1 punto) Calcular la ecuación de la recta t contenida en π, que pasa por el punto P y que corta perpendicularmente a r.
3. (1,5 puntos) Sea Q el punto intersección de r y t. Si s es la recta perpendicular al plano π y que contiene a P, y R es un punto cualquiera de s, probar que la recta determinada por R y Q es perpendicular a r.

Problema 10.1.2 *(3 puntos)* Sea:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\[2ex] \dfrac{7}{12}\left(1 - (x-2)^2\right) & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

1. (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.
2. (1 punto) Hallar los máximos y mínimos locales de $f(x)$
3. (1 punto) Dibujar la gráfica de $f(x)$.

Problema 10.1.3 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2k \\ 3x- & 5y = & k \end{cases}$$

1. (1 punto) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.
2. (1 punto) Resolverlo en los casos en que sea posible.

Problema 10.1.4 *(2 puntos)* Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2 \\ x-1 & x+1 & x+1 \\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix} = 0$$

10.2. Modelo 2009 - Opción B

Problema 10.2.1 *(3 puntos)* Dados el punto $P(1,-1,2)$ y el plano π : $2x - y + z = 11$, se pide:

1. (1,5 puntos) Determinar el punto Q de intersección del plano π con la recta perpendicular a π que pasa por P. Hallar el punto simétrico del punto P respecto del plano π.
2. (1,5 puntos) Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π que contiene al punto H que se encuentra a $5\sqrt{6}$ unidades del punto P en el sentido del vector $\overrightarrow{PQ}$.

Problema 10.2.2 *(3 puntos)* Si $A = (C_1, C_2, C_3)$ es una matriz cuadrada de orden 3 con columnas C_1, C_2, C_3, y se sabe que $det(A) = 4$, se pide:

1. (1 punto) Calcular $det(A^3)$ y $det(3A)$.
2. (2 puntos) Calcular $det(B)$ y $det(B^{-1})$, siendo $B = (2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)$ la matriz cuyas columnas son:
$$2C_3, C_1 - C_2, 5C_1$$

Problema 10.2.3 *(2 puntos)* Sea:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$$

1. (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.
2. (1 punto) Estudiar cuándo se verifica que $f'(x) = 0$. Puesto que $f(1) = f(-1)$, ¿existe contradicción con el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$?

Problema 10.2.4 *(3 puntos)* Sea

$$f(x) = \left\{\begin{array}{ccc} (x-1)^2 & \text{si} & x \le 1 \\ \ln x & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x. Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de $f(x)$, y por la recta $y = 1$.

10.3. Junio 2009 - Opción A

Problema 10.3.1 *(3 puntos)* Dado el plano $\pi : x + 3y + z = 4$, se pide:

1. (1 punto) Calcular el punto simétrico P del punto $O(0,0,0)$ respecto del plano π.
2. (1 punto) Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $z = 0$.
3. (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π, y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Problema 10.3.2 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 4x+ & 4\lambda y+ & 2z = & 2\lambda \\ \lambda x+ & y- & \lambda z = & \lambda \\ 4\lambda x+ & 4\lambda y+ & \lambda z = & 9 \end{array}\right.,$$

Se pide:

1. (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.
2. (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

Problema 10.3.3 *(2 puntos)* Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(x+1)}$$

según los valores del parámetro α

Problema 10.3.4 *(2 puntos)* Calcular la integral:

$$F(x) = \int_0^x t^2\, e^{-t}\, dt$$

10.4. Junio 2009 - Opción B

Problema 10.4.1 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}, \quad s : \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1},$$

se pide:

1. (1 punto) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.
2. (1 punto) Determinar la distancia entre las rectas r y s.

3. (1 punto) Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por $O(0,0,0)$ corta a la recta s.

Problema 10.4.2 *(3 puntos)* Si la derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x-1)^3(x-5)$$

Obtener:

1. (1 punto) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
2. (1 punto) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.
3. (1 punto) La función f sabiendo que $f(0) = 0$

Problema 10.4.3 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{array}\right.$$

1. (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ
2. (0,5 punto) Resolver el sistema cuando sea posible

Problema 10.4.4 *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

se pide:

1. (1 punto) Estudiar el rango de A según los distintos valores del parámetro a.
2. (1 punto) Obtener la matriz inversa de A para $a = -1$

10.5. Septiembre 2009 - Opción A

Problema 10.5.1 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

1. (1,25 puntos). Determinar los valores del prámetro m para los cuales la matriz M es invertible.

2. (0,5 puntos). Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.

3. (1,25 puntos). Para $m = -1$ calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de M.

Problema 10.5.2 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{si} \quad 1 + ax > 0 \text{ y } x \neq 0 \\ \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} \qquad x = 0 \end{cases},$$

Se pide:

1. (1,5 puntos) Hallar los valores de los parámetros a, b para los cuales la función f es continua en $x = 0$.

2. (1,5 puntos). Para $a = b = 1$, estudiar si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

Problema 10.5.3 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}, \quad s : \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1},$$

determinar los valores de los parámetros a, b para los cuales las rectas r, s se cortan perpendicularmente.

Problema 10.5.4 *(2 puntos)* Dado el plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π.

10.6. Septiembre 2009 - Opción B

Problema 10.6.1 *(3 puntos)*

1. (1 punto). Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2},$$

hallar el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.

2. (0,5 puntos). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$.

3. (1,5 puntos). Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demostrar que existe al menos un punto c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $g'(c) = 1$.

Problema 10.6.2 *(3 puntos)* Dada la recta:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

y el plano $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π.

Problema 10.6.3 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda x + 2y + z = 0 \\ \lambda x - y + 2z = 0 \\ x - \lambda y + 2z = 0 \end{array}\right. ,$$

se pide:

1. (1 punto). Obtener los valores de parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de:

$$x = y = z = 0$$

2. (1 punto). Resolver el sistema para $\lambda = 5$.

Problema 10.6.4 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $AXB = A + B$

10.7. Septiembre 2009 - Opción A (Reserva)

Problema 10.7.1 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{1}, \quad s : \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-\lambda}{2}$$

se pide:

1. (1 punto). Determinar para qué valor, o valores, del parámetro λ las rectas r, s se cortan en un punto.

2. (1 punto). Para $\lambda = 23$ calcular las coordenadas del punto P intersección de las rectas r, s.

3. (1 punto). Para $\lambda = 23$ hallar la ecuación general del plano π determinado por las rectas r y s.

Problema 10.7.2 *(3 puntos)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. (1 punto). $f(x) = (2x)^{3x}$.
2. (1 punto). $g(x) = \cos\dfrac{\pi}{8}$.
3. (1 punto). $h(x) = \displaystyle\int_{5\pi}^{6\pi} e^{\cos t}\,dt$.

Problema 10.7.3 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y = \sqrt{3} \\ 3x + 2z = 2\sqrt{5} \end{array}\right.$$

se pide:

1. (1 punto). Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible determinado.
2. (1 punto). Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Problema 10.7.4 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X que verifique la ecuación matricial $XB = A + B$

10.8. Septiembre 2009 - Opción A (Reserva)

Problema 10.8.1 *(3 puntos).* Se pide:

1. (1 punto). Demostrar que si tres vectores v_1, v_2 y v_3 son perpendiculares entre sí entonces se verifica que:

   $$|\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3}|^2 = |\overrightarrow{v_1}|^2 + |\overrightarrow{v_2}|^2 + |\overrightarrow{v_3}|^2,$$

   donde $|w|$ denota módulo del vector $\overrightarrow{w}$

2. (1 punto). Dados los vectores $\overrightarrow{v_1}(1, 1, -1)$, $\overrightarrow{v_2} = (1, 0, 1)$ hallar un vector $\overrightarrow{v_3}$ tal que:

   $$|\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3}|^2 = |\overrightarrow{v_1}|^2 + |\overrightarrow{v_2}|^2 + |\overrightarrow{v_3}|^2.$$

3. (1 punto). Dado el vector $\overrightarrow{v}(1,2,3)$, hallar los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ que cumplan las tres condiciones siguientes:

   a) $\overrightarrow{v_1}$ tiene sus tres coordenadas iguales y no nulas;

   b) $\overrightarrow{v_1}$ es perpendicular a $\overrightarrow{v_2}$;

   c) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$

Problema 10.8.2 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} (m+1)x+ & y+ & z= & 0\\ x+ & (m+1)y+ & z= & m\\ x+ & y+ & (m+1)z= & m^2 \end{array}\right.$$

se pide:

1. (2 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro m.
2. (1 punto). Resolver el sistema para $m = 0$.

Problema 10.8.3 *(2 puntos)* Sabiendo que el volumen de un cubo de lado a es $V(a) = a^3$ centímetros cúbicos, calcular el valor mínimo de $V(x)+V(y)$ si $x + y = 5$.

Problema 10.8.4 *(2 puntos)* Calcular las siguientes integrales:

1. (1 punto). $\displaystyle\int (2x+1)^3\,dx$, $\displaystyle\int x^3e^{x^4}\,dx$
2. (1 punto). $\displaystyle\int 2^x\,dx$, $\displaystyle\int \frac{1+x+x^4}{x^3}\,dx$

Capítulo 11

Año 2010

11.1. Modelo 2010 - Opción A

Problema 11.1.1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = e^x + a\,e^{-x},$$

siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a:

1. (1,5 puntos) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

2. (1 punto) Estudiar para que valor , o valores, de a la función f tiene alguna asíntota horizontal.

3. (0,5 puntos) Para $a \geq 0$, hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Problema 11.1.2 *(3 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

$$s \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

1. (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta t que corta a r y s, y que contiene al origen de coordenadas.

2. (1,5 puntos) Determinar la mínima distancia entre las rectas r y s.

Problema 11.1.3 *(2 puntos)* Obtener, para todo número natural n, el valor de:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Problema 11.1.4 *(2 puntos)* Discutir razonadamente, en función del parámetro k, el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & z = & k+2 \\ kx+ & y+ & z = & k \\ x+ & y+ & kz = & -2(k+1) \end{array}\right.$$

11.2. Modelo 2010 - Opción B

Problema 11.2.1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = x^3 - x$$

Se pide:

1. (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, f(-1))$.
2. (1 punto) Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f.
3. (1 punto) Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de f y la recta obtenida en el apartado anterior.

Problema 11.2.2 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & & z = & 2 \\ x+ & \lambda y- & z = & 4 \\ -\lambda x- & y- & z = & -5 \end{array}\right.$$

1. (1 punto) Discutirlo para los distintos valores del parámetro λ
2. (1 punto) Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.
3. (1 punto) Resolverlo para $\lambda = -2$.

Problema 11.2.3 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(2, 2, 3)$ y $B(0, -2, 1)$, hallar el punto, o los puntos, de la recta:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$$

que equidistan de A y de B.

Problema 11.2.4 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv 5x - 4y + z = 0$ y la recta:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

contenida en π, obtener la recta s contenida en π que es perpendicular a r, y que pasa por el origen de coordenada $O(0, 0, 0)$.