Problemas de Selectividad de Matemáticas II
Comunidad de Madrid
(Resueltos)

Isaac Musat Hervás

27 de marzo de 2010

Índice general

Capítulo 1

Año 2000

1.1. Modelo 2000 - Opción A

Problema 1.1.1 *(2 puntos)* Dados los vectores $\overrightarrow{u} = (a, 1 + a, 2a)$, $\overrightarrow{v} = (a, 1, a)$ y $\overrightarrow{w} = (1, a, 1)$, se pide:

1. (1 punto) Determinar los valores de a para que los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ sean linealmente dependientes.

2. (0,5 puntos) Estudiar si el vector $\overrightarrow{c} = (3, 3, 0)$ depende linealmente de los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ para el caso $a = 2$. Justificar la respuesta.

3. (0,5 puntos) Justificar razonadamente si para $a = 0$ se cumple la igualdad
$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}) = 0$$

Nota: el símbolo $\wedge$ significa producto vectorial.

Solución:

1. $$\begin{vmatrix} a & 1+a & 2a \\ a & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = a(a^2 - 1)0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = \pm 1$$

   Si $a \neq 0$ y $a \neq \pm 1 \Longrightarrow$ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son Linealmente Independientes.

   Si $a = 0$ o $a = \pm 1 \Longrightarrow$ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ son Linealmente Dependientes.

2. si $a = 2$, los tres vectores son linealmente independientes y, por tanto, forman una base. Luego el vector $\overrightarrow{c} = (3, 3, 0)$ es combinación lineal

de $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$. Veamos de que combinación lineal se trata, tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u}=(2,3,4)\\ \overrightarrow{v}=(2,1,2)\\ \overrightarrow{w}=(1,2,1)\end{array}\right.$$

$$(3,3,0)=a(2,3,4)+b(2,1,2)+c(1,2,1)\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rrrr}2a+ & 2b+ & c= & 3\\ 3a+ & b+ & 2c= & 3\\ 4a+ & 2b+ & c= & 0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=-\dfrac{3}{2}\\ \\ b=\dfrac{3}{2}\\ \\ c=3\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{c}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{u}+\frac{3}{2}\overrightarrow{v}+3\overrightarrow{w}$$

3. Si $a=0$ tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u}=(0,1,0)\\ \overrightarrow{v}=(0,1,0)\\ \overrightarrow{w}=(1,0,1)\end{array}\right.$$

Sabemos que $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})$. Pero

$$[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}]=\left|\begin{array}{ccc}0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{array}\right|=0$$

Luego $\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w})=0$

Problema 1.1.2 *(2 puntos)*

1. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia al punto $A(4,0)$ es el doble de su distancia a la recta $x=1$.

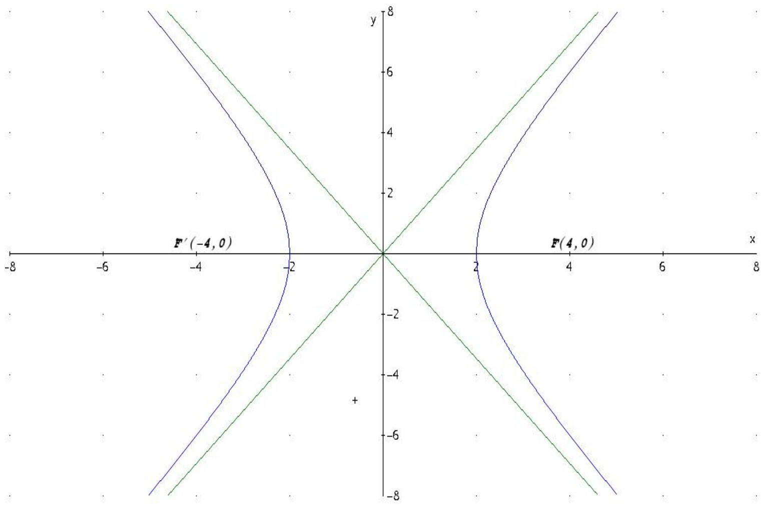
2. Comprobar que el anterior lugar geométrico es una cónica. Indicar el tipo de cónica que es y hallar sus focos.

Solución:

1.

$$d(P,A)=2d(P,r),\quad r:x=1,\quad A(4,0)$$

$$\left\{\begin{array}{l}d(P,A)=|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{(x-4)^2+y^2}\\ \\ d(P,r)=\dfrac{|x-1|}{1}\end{array}\right.\Longrightarrow (x-4)^2+y^2=4(x-1)^2\Longrightarrow$$



$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

2. Se trata de una hipérbola $a^2 = 4$ y $b^2 = 12$, como $c^2 = a^2 + b^2 = 16 \Longrightarrow c = 4$. Los focos serían los puntos $F'(-4, 0)$ y $F(4, 0)$.

Problema 1.1.3 *(3 puntos)* Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} + 2 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ k & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea continua en $x = 0$?
2. (1 punto) ¿Hay algún valor de k para el cual $f(x)$ sea derivable en $x = 0$?
3. (1 punto) Determinar sus asíntotas.

Solución:

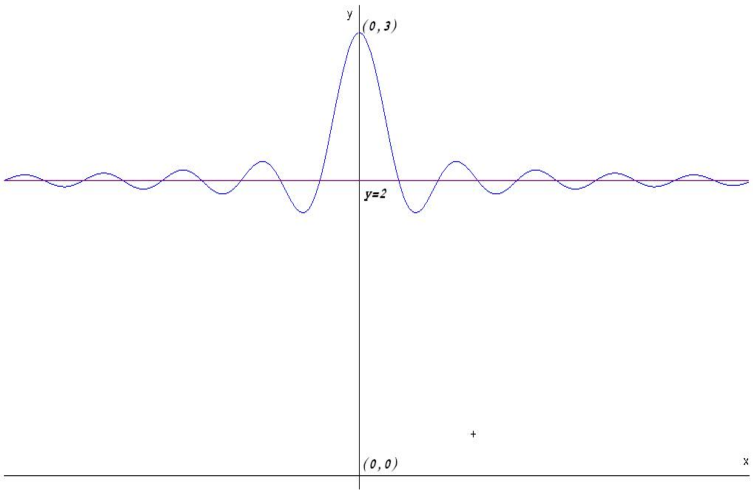
1.
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} + 2 \right) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sin x + 2x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos x + 2}{1} = 3$$

Para que f sea continua en $x = 0 \Longrightarrow k = 3$

2.
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-x\sin x}{2x}=$$
$$\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-\sin x-x\cos x}{2}=0$$

En conclusión, para que una función sea derivable antes tiene que ser continua y por tanto $k=3$. Luego en este caso también se cumple $f'(0^-)=f'(0^+)$ y es derivable.



3. Asíntotas:

   - Verticales no hay, la única posible sería en $x=0$ y en ese punto hay una discontinuidad evitable.
   - Horizontales
   $$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{\sin x}{x}+2\right)=2\Longrightarrow y=2$$
   - Oblicuas no hay al haber horizontales

Problema 1.1.4 *(3 puntos)* Sea el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} -x+ & \lambda y+ & 2z= & \lambda\\ 2x+ & \lambda y- & z= & 2\\ \lambda x- & y+ & 2z= & \lambda \end{array}\right.$$

1. (1 punto) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de λ.

2. (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda=-1$.

3. (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = 2$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & \lambda & 2 & \lambda \\ 2 & \lambda & -1 & 2 \\ \lambda & -1 & 2 & \lambda \end{array} \right), \quad |A| = -3\lambda^2 - 6\lambda - 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1$$

- Si $\lambda \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A})$ =nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado. (Solución única)
- Si $\lambda = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

Como tiene dos filas iguales y el menor $\left| \begin{array}{rr} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{array} \right| = 3 \neq 0$ tenemos que Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A})$ <nº incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

2. Si $\lambda = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} -x- & y+ & 2z = & -1 \\ 2x- & y- & z = & 2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{rr} x = & 1+t \\ y = & t \\ z = & t \end{array} \right.$$

3. Si $\lambda = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} -x+ & 2y+ & 2z = & 2 \\ 2x+ & 2y- & z = & 2 \\ 2x- & y+ & 2z = & 2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{rr} x = & 2/3 \\ y = & 2/3 \\ z = & 2/3 \end{array} \right.$$

1.2. Modelo 2000 - Opción B

Problema 1.2.1 *(2 puntos)* De una función derivable $f(x)$ se conoce que pasa por el punto $A(-1, -4)$ y que su derivada es

$$f'(x) = \left\{ \begin{array}{lll} 2 - x & \text{si} & x \leq 1 \\ \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} & x > 1 \end{array} \right.$$

1. Hallar la expresión de $f(x)$.

2. Obtener la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 2$.

Solución:

1.
$$f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} + a & \text{si} \quad x \le 1 \\ \\ \ln|x| + b & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Como $f(-1) = -4 \Longrightarrow a = -\dfrac{3}{2}$. Si f es derivable en $x = 1 \Longrightarrow f$ es continua en $x = 1 \Longrightarrow b = 0$. Luego:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{3}{2} & \text{si} \quad x \le 1 \\ \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

2. Si $x = 2 \Longrightarrow f(2) = \ln 2 \Longrightarrow (2, \ln 2)$.

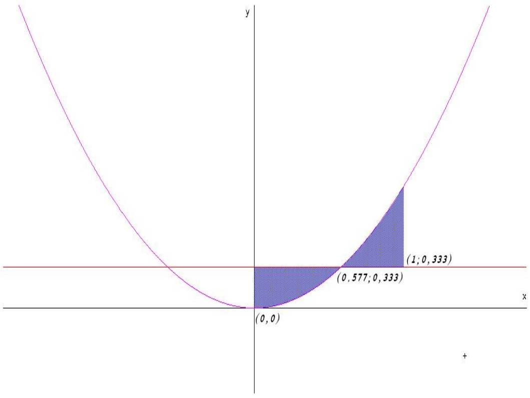
Tenemos $m = f'(2) = \dfrac{1}{2}$ y, por tanto, la recta tangente es:

$$y - \ln 2 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

Problema 1.2.2 *(2 puntos)* Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$ donde a es un número real comprendido entre 0 y 1 ($0 < a < 1$). Ambas curvas se cortan en un punto (x_0, y_0) con abcisa positiva. Hallar a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.

Solución:

Calculamos la abcisa del punto de corte de ambas gráficas en función del parámetro a:
$$x^2 = a \Longrightarrow x = \sqrt{a}$$
Elegimos la solución positiva porque así nos lo indica el enunciado del problema. Tenemos, por tanto, que cuando $x = \sqrt{a}$ ambas curvas se cortan $(x_0, y_0) = (\sqrt{a}, a)$ y la posición de las curvas cambia, de manera que, la que estaba por encima pasará a estar debajo. Es decir,
$$\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)\, dx = \int_{\sqrt{a}}^1 (x^2 - a)\, dx \Longrightarrow$$



$$ax - \frac{x^3}{3}\Bigg]_0^{\sqrt{a}} = \frac{x^3}{3} - ax\Bigg]_0^{\sqrt{a}} \Longrightarrow a = \frac{1}{3}$$

Problema 1.2.3 *(3 puntos)*

1. (1 punto) Encontrar la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta que pasa por los puntos $Q(1, 2, 1)$ y $R(1, 0, -1)$.
2. (1 punto) Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos P, Q y R.
3. (1 punto) Encontrar todos los puntos S del plano determinado por P, Q y R de manera que el cuadrilátero de vértices P, Q, R y S sea un paralelogramo.

Solución:

1. Calculamos la ecuación de la recta r que pasa por Q y R:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{QR} = (0, -2, -2) \\ Q(1, 2, 1) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 - 2\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{array}\right.$$

$$|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}| = |\left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \end{array}\right|| = |(-10, 0, 0)| = 10$$

$$d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}|}{|\overrightarrow{QR}|} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\ u$$

2. Tenemos

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{QP} = (0, -3, 2) \\ \overrightarrow{QR} = (0, -2, -2) \end{array}\right.$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}| = 5\ u^2$$

3. El plano π que contiene a los puntos P, Q y R es el siguiente

$$\pi : \begin{vmatrix} 0 & 0 & x-1 \\ -3 & -2 & y \\ 2 & -2 & z+1 \end{vmatrix} = 10(x-1) = 0 \Longrightarrow \pi : x - 1 = 0$$

   - Sean P, Q y R vértices consecutivos, entonces $S = P + \overrightarrow{QR} = (1,-1,3) + (0,-2,-2) = (1,-3,1)$
   - Sean P, R y Q vértices consecutivos, entonces $S = P + \overrightarrow{RQ} = (1,-1,3) + (0,2,2) = (1,1,5)$
   - Sean Q, P y R vértices consecutivos, entonces $S = Q + \overrightarrow{PR} = (1,2,1) + (0,1,-4) = (1,3,-3)$
   - Sean Q, R y P vértices consecutivos, entonces $S = Q + \overrightarrow{RP} = (1,2,1) + (0,-1,4) = (1,1,5)$
   - Sean R, P y Q vértices consecutivos, entonces $S = R + \overrightarrow{PQ} = (1,0,-1) + (0,3,-2) = (1,3,-3)$
   - Sean R, Q y P vértices consecutivos, entonces $S = R + \overrightarrow{QP} = (1,0,-1) + (0,-3,2) = (1,-3,1)$

   Los puntos S son $(1,-3,1)$, $(1,1,5)$ y $(1,3,-3)$. Todos ellos están contenidos en el plano π

Problema 1.2.4 *(3 puntos)*

1. (1 punto) Encontrar los valores de λ para los que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \\ \lambda & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   es invertible.

2. (1 punto) Para $\lambda = 2$, hallar la inversa de A y comprobar el resultado.

3. (1 punto) Resolver el sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   para $\lambda = 1$

Solución:

1. $|A| = (\lambda - 1)(3\lambda - 4) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$ y $\lambda = \frac{4}{3}$.

   Si $\lambda = 1$, o $\lambda = \frac{4}{3} \Longrightarrow$ No es invertible.

   Si $\lambda \neq 1$, y $\lambda \neq \frac{4}{3} \Longrightarrow$ Si es invertible.

2. Si $\lambda = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1/2 \\ 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Con $\lambda = 1$ y $AX = O$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rrr} & y- & z = 0 \\ - & y+ & z = 0 \\ x+ & & 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrr} & y- & z = 0 \\ x+ & & 2z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} x = & -2t \\ y = & t \\ z = & t \end{array} \right.$$

1.3. Junio 2000 - Opción A

Problema 1.3.1 *(2 puntos)* Resolver la siguiente ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{x} \wedge (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$$

sabiendo que $|\overrightarrow{x}| = \sqrt{6}$, donde $\wedge$ significa "producto vectorial".

Solución:

LLamamos $\overrightarrow{x} = (a, b, c) \Longrightarrow (a, b, c) \wedge (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-b - c, a + 2c, a - 2b) = (1, 3, 5) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -b - c = 1 \\ a + 2c = 3 \\ a - 2b = 5 \end{array} \right.$$

Como la primera ecuación es el resultados de restar a la tercera la segunda, sólo tendríamos dos ecuaciones, la tercera la obtenemos de $|\overrightarrow{x}| = \sqrt{6} \Longrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 6$:

$$\left\{ \begin{array}{r} -b - c = 1 \\ a + 2c = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 6 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{array} \right. \quad \text{o} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 5/3 \\ b = -5/3 \\ c = 2/3 \end{array} \right.$$

Es decir, $\overrightarrow{x} = (1, -2, 1)$ y $\overrightarrow{x} = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Problema 1.3.2 *(2 puntos)*

1. Determinar el centro y el radio de la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 8z - 4 = 0$$

2. Determinar el centro y el radio de la circunferencia intersección de la esfera del apartado anterior con el plano $z = 0$.

Solución:

1.

$$\begin{cases} -2a = -2 \\ -2b = 4 \\ -2c = 8 \\ a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -4 \\ r = 5 \end{cases}$$

Esfera de centro $(1, -2, -4)$ y radio $r = 5$.

2. Al cortar la esfera con el plano $z = 0$ nos queda la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$\begin{cases} -2a = -2 \\ -2b = 4 \\ a^2 + b^2 - r^2 = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ r = 3 \end{cases}$$

Circunferencia de centro $(1, -2)$ y radio $r = 3$.

Problema 1.3.3 *(3 puntos)* Para una matriz cuadrada, se define su traza como la suma de los elementos de la diagonal principal. En lo que sigue, A y B son matrices cuadradas 2×2.

1. (0,5 puntos) Comprobar que se verifica:

$$Traza(A + B) = Traza(A) + Traza(B)$$

2. (1 punto) Comprobar que

$$Traza(A \cdot B) = Traza(B \cdot A)$$

3. (1 punto) Utilizando los resultados anteriores, demostrar que es imposible tener $AB - BA = I$, donde I denota la matriz identidad.

4. (0,5 puntos) Encontrar dos matrices A y B para las que:

$$Traza(AB) \neq Traza(A) \cdot Traza(B)$$

Solución:

1. Sean

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

$$Traza(A) = a_1 + a_4, \quad Traza(B) = b_1 + b_4$$

$$Traza(A) + Traza(B) = a_1 + b_1 + a_4 + b_4$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow Traza(A + B) = a_1 + b_1 + a_4 + b_4$$

Luego:

$$Traza(A + B) = Traza(A) + Traza(B)$$

2.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_3 & a_1b_2 + a_2b_4 \\ a_3b_1 + a_4b_3 & a_3b_2 + a_4b_4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_3b_2 & a_2b_1 + a_4b_2 \\ a_1b_3 + a_3b_4 & a_2b_3 + a_4b_4 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Traza(AB) = a_1b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_4b_4 \\ Traza(BA) = a_1b_1 + a_3b_2 + a_2b_3 + a_4b_4 \end{array} \right. \Longrightarrow Traza(AB) = Traza(BA)$$

3. Suponemos que la igualdad es cierta, es decir:

$$AB - BA = I \Longrightarrow AB = BA + I \Longrightarrow Traza(AB) = Traza(BA + I) \Longrightarrow$$

$$Traza(AB) = Traza(BA) + Traza(I), \text{ como } Traza(AB) = Traza(BA)$$

$$\Longrightarrow 0 = 2$$

Luego esta igualdad es falsa.

4. Sea A una matriz cualquiera y $B = I$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = A \Longrightarrow Traza(A \cdot B) = Traza(A) = 4, \quad Traza(B) = 2$$

$$Traza(A) \cdot Traza(B) = 4 \cdot 2 = 8$$

Luego $Traza(A \cdot B) \neq Traza(A) \cdot Traza(B)$

Problema 1.3.4 *(3 puntos)* Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ un polinomio que cumple $f(1) = 0$, $f'(0) = 2$, y tiene dos extremos relativos para $x = 1$ y $x = 2$.

1. (2 puntos) Determinar a, b, c y d.

2. (1 punto) ¿Son máximos o mínimos los extremos relativos?

Solución:

1.
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$\left\{\begin{array}{l} f(1) = 0 \Longrightarrow a + b + c + d = 0 \\ f'(1) = 0 \Longrightarrow 3a + 2b + c = 0 \\ f'(2) = 0 \Longrightarrow 12a + 4b + c = 0 \\ f'(0) = 2 \Longrightarrow c = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1/3 \\ b = -3/2 \\ c = 2 \\ d = -5/6 \end{array}\right.$$
La función será:
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{5}{6}$$

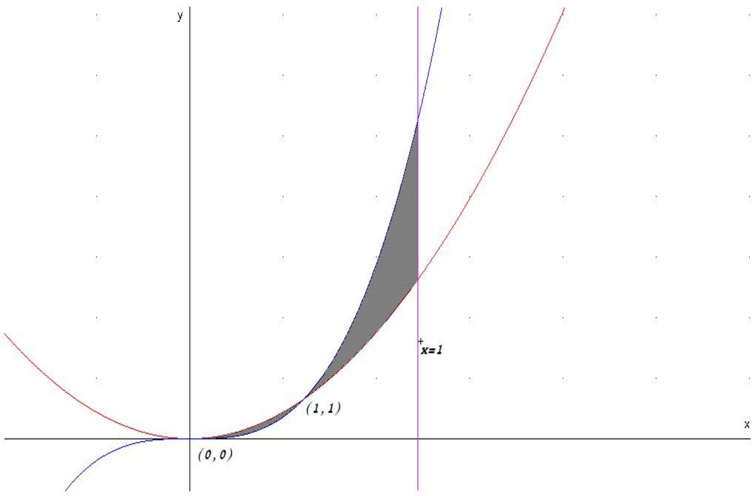
2. Calculamos la segunda derivada
$$f''(x) = 2x - 3 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f''(1) = -3 < 0 \Longrightarrow \text{Máximo} \\ f''(2) = 1 > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo} \end{array}\right.$$

1.4. Junio 2000 - Opción B

Problema 1.4.1 *(2 puntos)*.Sean las funciones:
$$f(x) = x^2 \ \text{ y } \ g(x) = x^3$$
Determinar el área encerrada por las gráficas de ambas funciones y la recta $x = 2$.

Solución:

Buscamos los puntos de corte de ambas funciones
$$x^2 = x^3 \Longrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Longrightarrow x^2(x - 1) = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = 1$$
Los intervalos de integración serán $[0, 1]$ y $[1, 2]$. Calculamos la primitiva de $f(x) - g(x)$:
$$F(x) = \int (f(x) - g(x))\, dx = \int (x^2 - x^3)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$
$$\int_0^1 (f(x) - g(x))\, dx = F(1) - F(0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$



$$\int_1^2 (f(x)-g(x))\,dx = F(1)-F(0) = \frac{8}{3}-\frac{16}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = -\frac{17}{12}$$

$$S = \left|\frac{1}{12}\right| + \left|-\frac{17}{12}\right| = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}\ u^2$$

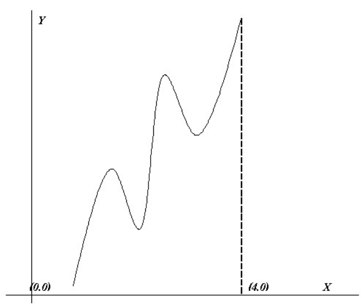
Problema 1.4.2 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Si es posible, dibujar de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo $[0,4]$ que tenga al menos un máximo relativo en el punto $(2,3)$ y un mínimo relativo en el punto $(3,4)$.

2. (1 punto) Si la función fuera polinómica, ¿cuál ha de ser como mínimo su grado?

Solución:

1. El dibujo sería el siguiente:



2. La función tiene al menos cuatro extremos, luego el grado del polinomio tiene que ser cinco como mínimo. Si fuese cuatro, la primera derivada tendría como mucho tres soluciones al igualar a cero.

Problema 1.4.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrl} ax+ & y+ & z= & (a-1)(a+2) \\ x+ & ay+ & z= & (a-1)^2(a+2) \\ x+ & y+ & az= & (a-1)^3(a+2) \end{array}\right.$$

1. (1 punto) Comprobar que es compatible para todo valor de a.
2. (1 punto) Describir en términos geométricos el conjunto de soluciones para $a=1$ y para $a=-2$.
3. (1 punto) Resolverlo para $a=-2$.

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & (a-1)(a+2) \\ 1 & a & 1 & (a-1)^2(a+2) \\ 1 & 1 & a & (a-1)^3(a+2) \end{array}\right), \; |A|=a^3-3a+2=0 \Longrightarrow a=1, \; a=-2$$

- Si $a\neq 1$ y $a\neq -2 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})$ =Rango(A) $=3=$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ SCD.
- Si $a=1$: (Homogéneo)

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=\text{Rango}(A)<\text{n}^{\text{o}}\text{incógnitas} \Longrightarrow \text{SCI}$$

- Si $a=-2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right), \; \left|\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{array}\right|=3\neq 0 \Longrightarrow$$

Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A)=2$ <n$^{\text{o}}$ incógnitas$\Longrightarrow$ SCI

Para cualquier valor de a el sistema es, por tanto, compatible.

2. Si $a=1$ se trata de tres planos coincidentes, $x+y+z=0$.

Si $a=-2$ se cortan en una recta que calculamos en el siguiente apartado.

3.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 2y+ & z= & 0\\ x+ & y+ & -2z= & 0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x- & 2y= & -z\\ x+ & y= & 2z\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\lambda\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Problema 1.4.4 *(3 puntos)* Sean los puntos $P(8,13,8)$ y $Q(-4,-11,-8)$. Se considera el plano π, perpendicular al segmento PQ por su punto medio.

1. (1 punto) Obtener la ecuación del plano π.
2. (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del punto $O(0,0,0)$ sobre π.
3. (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro determinado por los puntos en los que el plano π corta a los ejes coordenados y en el origen de coordenadas.

Solución:

1. Se trata de un plano mediador. Calculamos punto medio del segmento $\overline{PQ}$ que será $M(2,1,0)$ y el vector $\overrightarrow{PQ} = (-12,-24,-16) = -4(3,6,4)$.

$$3x+6y+4z+\lambda=0,\ \ 6+6+0+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-12$$

$$\pi : 3x+6y+4z-12=0$$

2. Calculamos una recta r perpendicular a π que pase por O y después calculamos el corte de esa recta r y el plano π.

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(3,6,4)\\ P_r=O(0,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3\lambda\\ y=6\lambda\\ z=4\lambda\end{array}\right.$$

$$3(3\lambda)+6(6\lambda)+4(4\lambda)-12=0 \Longrightarrow \lambda=\frac{12}{61}$$

El punto proyectado es: $O'\left(\frac{36}{61},\frac{72}{61}\frac{48}{61}\right)$

3. Los puntos de corte son:

Con el eje OX: hacemos $y=0$ y $z=0 \Longrightarrow A\,(4,0,0)$.

Con el eje OY: hacemos $x=0$ y $z=0 \Longrightarrow B\,(0,2,0)$.

Con el eje OZ: hacemos $x=0$ y $y=0 \Longrightarrow C\,(0,0,3)$.

Los vectores:

$\overrightarrow{OA} = (4, 0, 0)$.

$\overrightarrow{OB} = (0, 2, 0)$.

$\overrightarrow{OC} = (0, 0, 3)$.

El volumen del tetraedro es

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}| = 4\ u^3$$

1.5. Septiembre 2000 - Opción A

Problema 1.5.1 *(2 puntos)* Sea la función $f(x) = 2x + \sin 2x$

1. (1 punto) Determinar si tiene asíntotas de algún tipo.
2. (1 punto) Estudiar su monotonía y la existencia de extremos relativos.

Solución:

1. Asíntotas:
   - Verticales y Horizontales no hay claramente.
   - Oblicuas: $y = mx + n$

   $$m = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2x + \sin 2x}{x} = 2$$

   $$n = \lim_{x \longrightarrow \infty} (2x + \sin 2x - 2x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} (\sin 2x) \text{ No existe}$$

   Luego tampoco hay asíntotas oblicuas.

2. $f'(x) = 2 + 2\cos 2x = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ Para cualquier x que escojamos $f'(x) > 0$, excepto en los puntos que la anulan, luego la función es siempre creciente y no hay ni máximos ni mínimos. Veamos los puntos de inflexión:

   $$f''(x) = -4\sin 2x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

   $$f'''(x) = -8\cos 2x \Longrightarrow f'''(\pi/2) = 8 \neq 0$$

   Luego los puntos $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ son puntos de inflexión.

Problema 1.5.2 *(2 puntos)* Dados tres números reales cualesquiera r_1, r_2 y r_3, hallar el número real x que minimiza la función

$$D(x) = (r_1 - x)^2 + (r_2 - x)^2 + (r_3 - x)^2$$

Solución:

$$D'(x) = -2(r_1-x)-2(r_2-x)-2(r_3-x) = -2(r_1+r_2+r_3-3x) = 0 \Longrightarrow x = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$$

x es la media aritmética de los tres números.

$$D''(x) = 6 \Longrightarrow D''\left(\frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}\right) = 6 > 0$$

Luego se trata de un mínimo.

Problema 1.5.3 *(3 puntos)* Considerar el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrl} & y+ & z = & 1 \\ (\lambda-1)x+ & y+ & z = & \lambda \\ x+ & (\lambda-1)y- & z = & 0 \end{array}\right.$$

1. (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro λ.
2. (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 0$.
3. (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 3$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccr|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda-1 & -1 & 0 \end{array}\right), \quad |A| = \lambda(\lambda-1) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0, \ \ \lambda = 1$$

- Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3 =$Rango$\overline{A}$ =n° de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado (solución única).
- Si $\lambda = 0$
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$
Como la tercera fila es igual a la segunda multiplicada por -1, y como el menor $\left|\begin{array}{rr} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right| = 1 \neq 0$ Tenemos que Rango$(A) =$ 2 =Rango$(\overline{A})$ <n° de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

- Si $\lambda = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

  Como la primera fila es igual a la segunda, y como el menor $\left| \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| = -1 \neq 0$ Tenemos que Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A})$ <n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

2. Si $\lambda = 0$

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} & y+ & z = & 1 \\ -x+ & y+ & z = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} x = & 1 \\ y = & 1-t \\ z = & t \end{array} \right.$$

3. Si $\lambda = 3$

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} & y+ & z = & 1 \\ 2x+ & y+ & z = & 3 \\ x+ & 2y- & z = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

Problema 1.5.4 *(3 puntos)* Sea la superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 8z + 9 = 0$.

1. (0,5 puntos) Determinar su centro y su radio.

2. (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta que contiene al diámetro paralelo al eje OY.

3. (1 punto) Obtener el centro y el radio de la circunferencian que resulta al cortar dicha esfera con el plano $z = 0$.

4. (1 punto) Hallar la ecuación del plano tangente a la esfera en su punto del eje OX.

Solución:

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 6y - 8z + 9 = 0 \Longrightarrow$ centro $C(3, 3, 4)$ y radio $r = 5$

2. $$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (0, 1, 0) \\ P_t(3, 3, 4) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 3 + \lambda \\ z = 4 \end{array} \right.$$

3. Imponemos $z = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$ circunferencia de centro $(3, 3, 0)$ y radio $r = 3$

4. Si cortamos la esfera con el eje OX hacemos $y = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow$

$$(x-3)^2 + (-3)^2 + (-4)^2 = 25 \Longrightarrow x = 3 \Longrightarrow P(3,0,0)$$

El vector característico del plano tangente puede ser $\overrightarrow{PC} = (0,3,4)$

$$\pi : 3y + 4z + \lambda = 0$$

Como tiene que contener al punto $P \Longrightarrow \lambda = 0$. Luego el plano buscado es $\pi : 3y + 4z = 0$.

1.6. Septiembre 2000 - Opción B

Problema 1.6.1 *(2 puntos)* Se consideran los puntos $A(1,a,0)$, $B(1,1,a-2)$ y $C(1,-1,a)$.

1. (1 punto) Comprobar que no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome el parámetro a.
2. (1 punto) Hallar el área del triángulo que determinan los tres puntos.

Solución:

1. $$\left|\begin{array}{ccc} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & a-2 \\ 1 & -1 & a \end{array}\right| = -2 \neq 0 \ \ \forall a \in R$$

   Luego no están alineados.

2. $$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (1,1,a-2) - (1,a,0) = (0,1-a,a-2) \\ \overrightarrow{AC} = (1,-1,a) - (1,a,0) = (0,-1-a,a) \end{array}\right. \Longrightarrow$$

   $$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = |\left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 0 & 1-a & a-2 \\ 0 & -1-a & a \end{array}\right|| = |(-2,0,0)| = 2$$

   $$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 1\, u^2$$

Problema 1.6.2 *(2 puntos)* Sean la recta

$$r : \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4}\frac{z-1}{2}$$

y el plano

$$\pi : 2x - y + kz = 0$$

1. (1 punto) Calcular m y k para que la recta sea perpendicular al plano.

2. (1 punto) Calcular m y k para que la recta esté contenida en el plano.

Solución:

1. Deben ser $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi}$ o o proporcionales:

$$(m, 4, 2) = (2, -1, k) \Longrightarrow m = 2, \;\; k = 2$$

2. El producto escalar de ambos vectores debe ser igual a cero:

$$2m - 4 + 2k = 0 \Longrightarrow m + k = 2$$

Todos aquellos valores de m y k que cumplan $m + k = 2$ harán que la recta r esté contenida en el plano π.

Problema 1.6.3 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$.

1. (1,5 puntos) Determinar los puntos de corte de su gráfica con los ejes y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
2. (0,5 puntos) Esbozar la gráfica de la función.
3. (1 punto) Calcular el área determinada por la gráfica de f, el eje horizontal y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

Solución:

1. Los puntos de corte son:

Con el eje OX: hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (-1, 0)$, $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(3, 0)$ $A\left(\dfrac{14}{3}, 0, 0\right)$.

Con el eje OY: hacemos $x = 0 \Longrightarrow (0, 0)$

Estudiamos su monotonía:

$$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 2x + 6 = 0 \Longrightarrow x = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}, \;\; x = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}, \;\; x = 1$$

	$\left(\infty, 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$	$\left(1 - \frac{\sqrt{10}}{2}, 1\right)$	$\left(1, 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

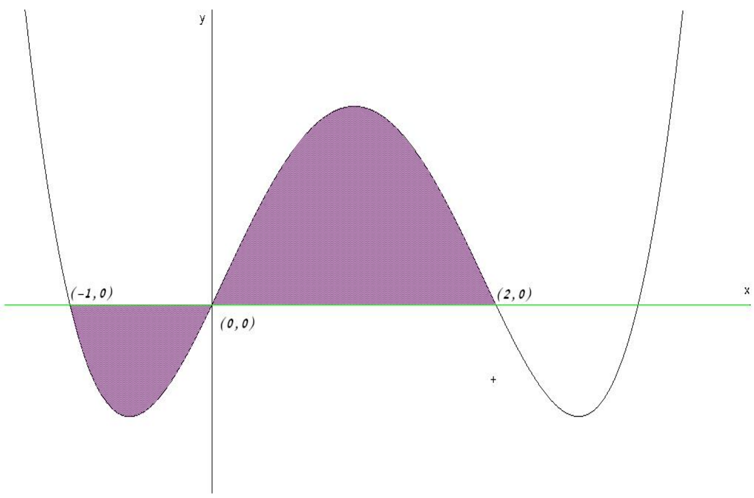
En el punto $(-0,58; -2,25)$ la función tiene un mínimo, en el punto $(1, 4)$ la función tiene un máximo y en el punto $(2,58; -2,25)$ la función tiene un mínimo.

2. Hay un punto de corte con el eje de abcisas en el intervalo $(-1, 2)$ ese punto es el $(0, 0)$. Luego tendremos que hacer dos integrales, una entre -1 y 0, y otra entre 0 y 2.

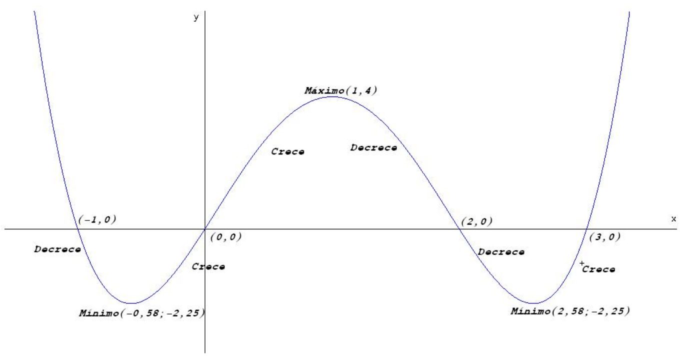
$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x)\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_{-1}^{0} = -\frac{22}{15}$$

$$S_2 = \int_{0}^{2} (x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x)\, dx = \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} + 3x^2\right]_{0}^{2} = \frac{76}{15}$$

$$S = |S_1| + |S_2| = \frac{22}{15} + \frac{76}{15} = \frac{98}{15}\ u^2$$



3. Representación gráfica



Problema 1.6.4 *(3 puntos)*

1. (2 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver el sistema

$$\begin{cases} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ 2x & - & kz = & 0 \\ x- & y+ & z = & 0 \end{cases}$$

2. (1 punto) Discutir en función de los valores de λ y resolver en los casos de compatibilidad del sistema

$$\begin{cases} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ 2x & - & 3z = & 0 \\ x- & y+ & z = & 0 \\ x+ & 2y+ & 2\lambda z = & \lambda \end{cases}$$

Solución:

1. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -k \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = -2k - 12 = 0 \Longrightarrow k = -6$$

   Se trata de un sistema homgéneo y, por tanto, es siempre compatible.

   - Si $k \neq -6 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado. Como la sollución es única, sólo tiene la trivial: $x = y = z = 0$
   - Si $k = -6$:

     $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \text{Rango}(A) < \text{n}^{\text{o}}\text{incógnitas} \Longrightarrow \text{SCI}$$

     El sistema en este caso es Compatible Indeterminado, si escogemos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, vemos que el Rango$(A) = 2$ y, además podemos eliminar la segunda fila, para la solución del sistema y nos queda:

     $$\begin{cases} x+ & y+ & 5z = & 0 \\ x- & y+ & z = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x+ & y = & -5\lambda \\ x- & y = & -\lambda \\ & z = & \lambda \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = & -3\lambda \\ y = & -2\lambda \\ z = & \lambda \end{cases}$$

2. Ahora tenemos

   $$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2\lambda & \lambda \end{array}\right) \text{ y que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

$$|\overline{A}| = \left|\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2\lambda & \lambda \end{array}\right| = \lambda \left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right| = -18\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0$$

- Si $\lambda \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 4 \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.(No tiene solución)

- Si $\lambda = 0$ se trata de un sistema homogeneo. Tenemos que Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas, ya que

  $$\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right| = -18 \neq 0 \Longrightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

  La única solución en este caso es la solución trivial: $x = y = z = 0$

Capítulo 2

Año 2001

2.1. Modelo 2001 - Opción A

Problema 2.1.1 *(2 puntos)* Comprobar que las siguientes matrices tienen el mismo determinante

$$A=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+b & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1+a & 1\\ 1 & 1-a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1 \end{vmatrix}\\ \\ \begin{vmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1+b & 1\\ 1 & 1-b \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Solución:

$$|B|=\begin{vmatrix} -a^2 & 0\\ 0 & 1-b^2 \end{vmatrix}=a^2b^2$$

$$|A|=\begin{bmatrix} F_1-F_2\\ F_2\\ F_3-F_4\\ F_4 \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} a & a & 0 & 0\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 0 & 0 & b & b\\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}=ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1-a & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} F_1\\ F_2-F_3\\ F_3\\ F_4-F_1 \end{bmatrix}=$$

$$ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1-a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1-b \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3\\ F_4-F_3 \end{bmatrix}=ab\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -b \end{vmatrix}=$$

$$=-a^2b\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -b \end{vmatrix}=a^2b^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2b^2$$

Problema 2.1.2 *(2 puntos)*Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 3\\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. calcular A^{-1}

2. Resolver el sistema $A \cdot \left[\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix}$

Solución:

1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A(B + X) = C \Longrightarrow X = A^{-1}C - B$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Problema 2.1.3 *(3 puntos)* Sea la parábola $x^2 = 4y$. Sean u y v las rectas tangentes a la parábola en los puntos P de abcisa a y Q de abcisa b, (a_1, b), $(a_1, 0)$, $(b_1, 0)$.

1. (1,5 puntos) Hallar las coordenadas del punto R de intersección de u y v.

2. (1 punto) Hallar la relación entre a y b prar que las rectas u y v sean perpendiculares.

3. (0,5 puntos) Probar que en el caso del apartado anterior, el punto R está en la directriz de la parábola.

Solución:

1. u tangente en el punto $P(a, 0)$ y v tangente en el punto $Q(b, 0)$. Tenemos $f'(x) = \frac{1}{2}x$:

$$m_1 : f'(a) = \frac{1}{2}a, \quad m_2 = f'(b) = \frac{1}{2}b$$

$$\left\{\begin{array}{l} u : y = \frac{1}{2}a(x - a) \\ \\ u : y = \frac{1}{2}b(x - b) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = a + b \\ y = \frac{ab}{2} \end{array}\right. \Longrightarrow R\left(a + b, \frac{ab}{2}\right)$$

2.
$$m_1 = \frac{-1}{m_2} \Longrightarrow ab = -4$$

3. Se trata de una parábola vertical cuya directriz es la recta $d : y = -2$. Si $ab = -4 \Longrightarrow R\left(a + b, \frac{-4}{2}\right) = R(a + b, -2) \in d$

Problema 2.1.4 *(3 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$$

1. (1 punto) Indicar el dominio de definición de la función f y hallar sus asíntotas.
2. (1 punto) Hallar los extremos relativos de la función f y sus intervalos de concavidad y convexidad.
3. (1 punto) Dibujar la gráfica de f y hallar su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución:

1. $Dom(f) = R - \{-2, 2\}$. Sus asíntotas:

   - Verticales:

     En $x = 2$:

     $$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

     $$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

     En $x = -2$:

     $$\lim_{x \longrightarrow -2^-} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty$$

     $$\lim_{x \longrightarrow -2^+} \frac{1}{4 - x^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

   - Horizontales:

     En $y = 0$:

     $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{4 - x^2} = 0$$

   - Oblicuas: No hay al haber horizontales.

2.
   $$f'(x) = \frac{2x}{(4 - x^2)^2}, \quad f''(x) = \frac{2(3x^2 + 4)}{(4 - x^2)^3}$$

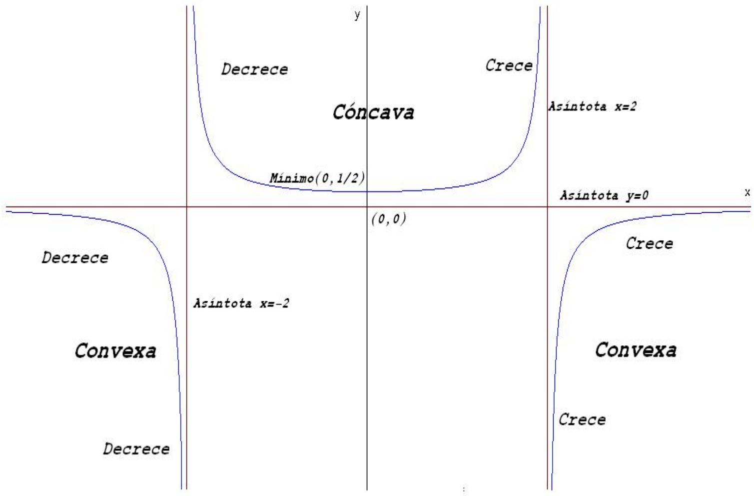
   La segunda derivada no se anula nunca y, por tanto, no hay puntos de inflexión, y además $2(3x^2 + 4) > 0$ siempre. Por otro lado, por el denominador:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	Convexa	Cóncava	Convexa

3.
$$f'(x) = \frac{2x}{(4-x^2)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decrece	Crece

Luego en el punto $(0, 1/4)$ la función presenta un mínimo.



2.2. Modelo 2001 - Opción B

Problema 2.2.1 *(2 puntos)* los vértices de un triángulo son $A(-2, -1)$, $B(7, 5)$ y $C(x, y)$.

1. Calcular el área del triángulo en función de x e y.
2. Encontrar el lugar geométrico de los puntos (x, y) tales que la anterior área es 36.

Solución:

1.
$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (x+2, y+1, 0) \\ \overrightarrow{AB} = (9, 6, 0) \end{array} \right.$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}| \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ x+2 & y+1 & 0 \\ 9 & 6 & 0 \end{array} \right| | =$$

$$= \frac{1}{2}|(0, 0, 6x - 9y + 3)| = \frac{3}{2}(2x - 3y + 1)$$

2.

$$\frac{3}{2}(2x - 3y + 1) = 36 \Longrightarrow 2x - 3y - 23 = 0$$

Problema 2.2.2 *(2 puntos)* Sea $A(1,1)$ y $B(-1,1)$ dos puntos del plano.

1. Determinar las ecuaciones de todas las circunferencias que pasan por los puntos A y B razonando dónde están situados sus centros.

2. De entre las circunferencias del apartado anterior hallar el centro y el radio de la que es tangente a la recta $y = x$.

Solución:

1. Los centros de las circunferencias están en la mediatriz que une los dos puntos, es decir, la recta $x = 0$. Luego el centro de ellas es de la forma $C(0,a)$ y el radio $r = d(C,A) = \sqrt{a^2 - 2a + 2}$. La ecuación de una circunferencia con este centro y este radio es:

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2 - 2a + 2 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 2ay + 2a - 2 = 0$$

2. Si la recta $y = x$ es tangente a la circunferencia el punto de tangencia tiene que ser $A(1,1)$, necesariamente.

   Una recta perpendicular a $y = x$ tiene de pendiente $m = -1$.

   Construímos una recta con esta pendiente que pase por A:

$$y - 1 = -(x - 1) \Longrightarrow x + y - 2 = 0$$

   Esta recta corta a $x = 0$ en el punto $(0,2)$, que será el centro de la circunferencia. Y el radio $r = |\overrightarrow{CP}| = \sqrt{2}|$. Luego la circunferencia buscada es

$$x^2 + (y - 2)^2 = 2 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 2 = 0$$

Problema 2.2.3 *(3 puntos)*

1. (1,5 puntos) Discutir en función de los valores de k y resolver cuando tenga más de una solución, el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & 2z = 3 \\ 2x- & y+ & kz = 9 \\ x- & y- & 6z = 5 \end{array}\right.$$

2. (1,5 puntos) Si el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & k & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ es 2, determinar una combinación lineal nula de los vectores fila $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ y $\overrightarrow{F_3}$, así como una combinación lineal nula de los vectores columna $\overrightarrow{C_1}$, $\overrightarrow{C_2}$, $\overrightarrow{C_3}$ y $\overrightarrow{C_4}$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & k & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{array}\right), \quad |A| = 2k + 16 = 0 \Longrightarrow k = -8$$

- Si $\lambda \neq -8 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$(\overline{A}) =n^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado. (Solución única)
- Si $\lambda = -8$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -8 & 9 \\ 1 & -1 & -6 & 5 \end{array}\right), \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A| = 0, \ |A_2| = 0, \ |A_3| = 0, \ |A_4| = 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2 =$Rango$(\overline{A}) <$n$^{\text{o}}$ incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)

Podemos tachar la tercera ecuación y nos queda el sitema

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y+ & 2z = 3 \\ 2x- & y- & 8z = 9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} x = 4 + 2\lambda \\ y = -1 - 4\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

2.

$$\overrightarrow{F_3} + a\overrightarrow{F_1} + b\overrightarrow{F_2} = (0,0,0,0) \Longrightarrow a = \frac{1}{3}, \ b = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{F_1} - \frac{2}{3}\overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{O}$$

$$4\overrightarrow{C_1} - \overrightarrow{C_2} + 0\overrightarrow{C_3} - \overrightarrow{C_4} = \overrightarrow{O}$$

Problema 2.2.4 *(3 puntos)*

1. (1,5 puntos) Hallar el valor de la integral definida

$$\int_{-10}^{-1} \frac{e^x\, dx}{\sqrt{1-e^x}}$$

2. (1,5 puntos) Calcular la integral indefinida de la función

$$f(x) = \frac{1}{1-e^x}$$

mediante un cambio de variable.

Solución:

1.
$$\int_{-10}^{-1} \frac{e^x\, dx}{\sqrt{1-e^x}} = -\int_{-10}^{-1} -(1-e^x)^{-1/2} e^x\, dx =$$
$$= -2\sqrt{1-e^x}\Big]_{-10}^{-1} = 0,4098344043$$

2. $t = 1 - e^x \Longrightarrow dt = -e^x dx = (t-1)dx \Longrightarrow dx = \dfrac{dt}{t-1}$

$$\int \frac{1}{1-e^x} dx = \int \frac{1}{t(t-1)} dt = -\ln|t| + \ln|t-1| = \ln\frac{e^x}{1-e^x} + C$$

$$\frac{1}{t(t-1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+Bt}{t(t-1)}$$

$$\begin{cases} t = 1 \Longrightarrow B = 1 \\ t = 0 \Longrightarrow A = -1 \end{cases}$$

2.3. Junio 2001 - Opción A

Problema 2.3.1 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ 2x- & y+ & 3z = & 2 \\ 5x- & y+ & az = & 6 \end{cases}$$

1. (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro a.

2. (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & a & 6 \end{array} \right), \quad |A| = -3a + 24 = 0 \Longrightarrow a = 8$$

- Si $a \neq 8 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCD.
- Si $a = 8$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & 8 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}\right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2. \text{ Estudiamos el Rango}(\overline{A}):$$

$$|A_1| = |A| = 0, \quad |A_2| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 6 \end{array}\right| = 0$$

$$|A_3| = \left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 6 \end{array}\right| = 0, \quad |A_3| = \left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 8 & 6 \end{array}\right| = 0$$

Luego Rango$(\overline{A}) = 2$ =Rango$(A) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCI. El sistema tiene infinitas soluciones.

2. Si $a = 8$ por el menor elegido podemos eliminar la tercera ecuación.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 2 \\ 2x- & y+ & 3z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} x+ & y = & 2-2z \\ 2x- & y = & 2-3z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 4/3 - 5/3\lambda \\ y = 2/3 - 1/3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 2.3.2 *(2 puntos)* Sea k un número natural y sean las matrices:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{r} 0 \\ 1 \\ -1 \end{array}\right), \quad C = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

1. (1 punto) Calcular A^k.
2. (1 punto) Hallar la matriz X que verifica la ecuación $A^kX = BC$.

Solución:

1.
$$A^1 = A, \quad A^2 = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad A^3 = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$A^k = \left(\begin{array}{ccc} 1 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. $A^kX = BC \Longrightarrow X = (A^k)^{-1}BC$

$$BC = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A^k)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -k & -k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Problema 2.3.3 *(3 puntos)*Dado el plano $\pi : x + y + x = 1$, la recta $r : (x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 1)$, y el punto $P(1, 1, 0)$, se pide:

1. (1 punto) Hallar la ecuación de la recta s que sea perpendicular a r y pase por P.
2. (1 punto) Hallar el punto P', simétrico de P respecto de r.
3. (1 punto) Hallar el punto P'', simétrico de P respecto de π.

Solución:

1. Hallamos un plano perpendicular a r que contenga a P

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_{\pi_1}} = \overrightarrow{u_r} = (0, 1, 1) \\ P(1, 1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow y + z + \lambda = 0 \Longrightarrow 1 + \lambda = 0$$

Como $\lambda = -1 \Longrightarrow \pi_1 : y + z - 1 = 0$.

Ahora encontramos el punto de corte de este plano π_1 con la recta r:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow \lambda + \lambda - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

El punto de corte será $Q\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

La recta que buscamos pasa por P y por Q:

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{PQ} = (0, 1/2, -1/2) \\ P_s = P(1, 1, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 + 1/2t \\ z = -1/2t \end{array} \right.$$

2. El simétrico de P respecto de r será el simétrico de P respecto del punto Q hallado en el apartado anterior:

$$Q = \frac{P + P'}{2} \Longrightarrow P' = 2Q - P = (1, 0, 1)$$

3. Primero hallamos la ecuación de la recta t perpendicular a π que pasa por P:

$$t : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ahora hallamos el punto de corte de esta recta t con el plano π:

$$(1 + \lambda) + (1 + \lambda) + \lambda = 1 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Longrightarrow$$

El punto de corte será $R\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Este punto R es el punto medio entre P y su simétrico P':

$$R = \frac{P + P'}{2} \Longrightarrow P' = 2R - P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Problema 2.3.4 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \sin x$

1. (0,5 puntos) Calcular $a > 0$ tal que el área encerrada por la gráfica de f, el eje $y = 0$, y la recta $x = a$, sea $\frac{1}{2}$.
2. (1 punto) Calcular la ecuación de la tangente a la gráfica de f en el punto de abcisa $x = \frac{\pi}{4}$
3. (1,5 puntos) Calcular el área de la superficie encerrada por la tangente anterior, la gráfica de la función f y las rectas $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$.

Solución:

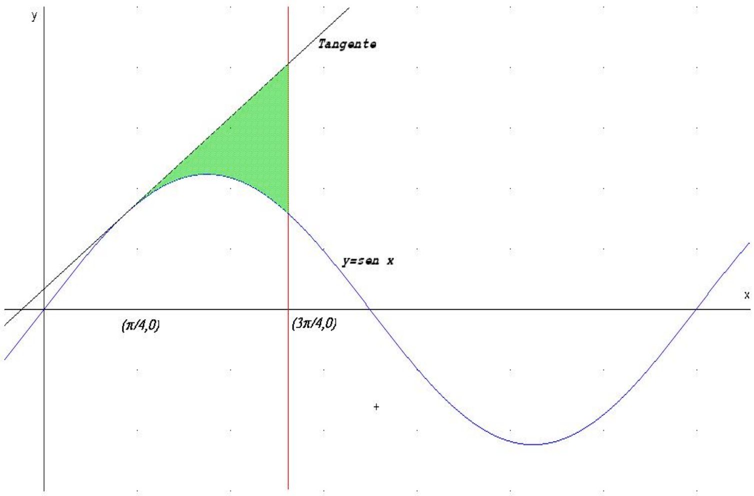
1. $$\int_0^a \sin x \, dx = -\cos x]_0^a = -\cos a + 1 = \frac{1}{2} \Longrightarrow a = \frac{\pi}{3}$$

2. $$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(x) = \cos x \Longrightarrow m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

La recta tangente es

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$



3. Calculamos la primitiva de $f(x)-g(x)$:

$$F(x)=\int\left[\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}+1\right)\right]dx=-\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{\pi x}{4}+x\right)$$

$$S=\left|F\left(\frac{3\pi}{4}\right)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|=\left|-\frac{\sqrt{2}\pi^2}{16}-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}+\sqrt{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{16}(\pi^2+4\pi-16)$$

2.4. Junio 2001 - Opción B

Problema 2.4.1 *(2 puntos)* Sea la función real de variable real definida por

$$f(x)=\left\{\begin{array}{rcl}(2-x)^3 & \text{si} & x\le 1\\ x^2 & \text{si} & x>1\end{array}\right.$$

1. (0,5 puntos) Razonar si la función es continua en todoa la recta real.
2. (0,5 puntos) Razonar si f es derivable en toda la recta real.
3. (1 punto) Determinar el área encerrada por la gráfica de f y por las tres rectas $y=8$, $x=0$, $x=2$.

Solución:

1. Las dos ramas son continuas, el único punto en el que puede haber discontinuidad es en $x=1$:

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-}f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^-}(2-x)^3=1$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1^+}f(x)=\lim_{x\longrightarrow 1^-}x^2=1$$

Como además $f(1)=1$, podemos concluir que f es continua en R.

2.
$$f'(x)=\left\{\begin{array}{rcl} -3(2-x)^2 & \text{si} & x\le 1\\ 2x & \text{si} & x>1\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(1^-)=-3\\ f'(1^+)=2\end{array}\right.$$

Como $f'(1^-)\neq f'(1^+)\Longrightarrow f$ no es derivable en $x=1$.

3.
$$S_1=\int_0^1(8-(2-x)^3)\,dx=\left.\frac{x^4}{4}-2x^3+6x^2\right]_0^1=\frac{17}{4}$$
$$S_2=\int_1^2(8-x^2)\,dx=\left.8x-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{17}{3}$$
$$S=|S_1|+|S_2|=\frac{17}{4}+\frac{17}{3}=\frac{119}{12}\,u^2$$

Problema 2.4.2 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Determinar los extremos relativos de la función $f(x)=x^2-4x+2$. Dibujar su gráfica
2. (1 punto) Hallar las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la gráfica de f que pasan por el punto $P(3,-5)$.

Solución:

1.
$$f(x)=x^2-4x+2\Longrightarrow f'(x)=2x-4=0\Longrightarrow x=2$$
$$f''(x)=2\Longrightarrow f''(2)=2>0\Longrightarrow \text{Mínimo}$$

Luego tiene un mínimo en el punto $(2,-2)$

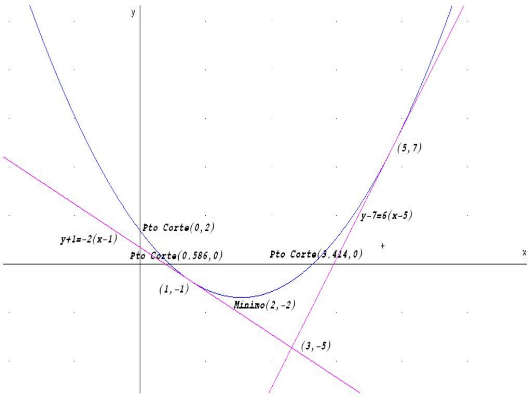
Se trata de una parábola vertical con vértice en el punto $(2,-2)$. Para dibujarla tan sólo será nesesario encontrar los puntos de corte con los ejes:

Corte con el eje OX: hacemos $f(x)=0\Longrightarrow x^2-4x+2\Longrightarrow x=2\pm\sqrt{2}$

Corte con el eje OY: hacemos $x=0\Longrightarrow f(0)=2$

Los puntos serán: $(0,2)$, $(2-\sqrt{2},0)$ y $(2+\sqrt{2},0)$.

2. La ecuación de una recta que pase por $(3,-5)$ es
$$y+5=m(x-3),\ \text{ y }\ f'(x)=2x-4$$
Si el punto de tangencia con la gráfica es (a,b) tenemos
$$b+5=m(a-3),\ \ m=f'(a)=2a-4\ \text{ y }\ b=a^2-4a+2$$



$$b + 5 = (2a - 4)(a - 3) \ \text{ y } \ b = a^2 - 4a + 2 \Longrightarrow a = 1, \ \ a = 5$$

Los puntos de tangencia son: $(1, -1)$ y $(5, 7)$. Ahora calculamos las rectas tangentes en estos puntos

- En $(1, -1)$ la pendiente vale $m = -2$: $y + 1 = -2(x - 1)$
- En $(5, 7)$ la pendiente vale $m = -2$: $y - 7 = 6(x - 5)$

Problema 2.4.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real λ.
2. (1 punto) Resolverlo para $\lambda = -3$.
3. (1 punto) Resolverlo para $\lambda = 1$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array} \right), \ |\overline{A}| = (3 + \lambda)(\lambda - 1)^3 = 0 \Longrightarrow \lambda = 1, \ \ \lambda = -3$$

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 4 \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ SI.
- Si $\lambda = -3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \ \text{ y } \ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

Tenemos que Rango$(\overline{A}) = 3$ =Rango(A) =nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCD.

- Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Tenemos que Rango$(\overline{A}) = 1$ =Rango(A) <nº de incógnitas $\Longrightarrow$ SCI.

2. Si $\lambda = -3$ quitamos la cuarta ecuación y nos queda el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & z = & -3 \\ x+ & y+ & -3z = & 1 \\ x- & 3y+ & z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

3. Si $\lambda = 1$ tenemos que suprimir tres ecuaciones y nos queda $x+y+z = -3$, se trata de un plano, en forma paramétrica será:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x = & -3- & \lambda & -\mu \\ y = & & \lambda & \\ z = & & & \mu \end{array} \right.$$

Problema 2.4.4 *(3 puntos)* Sean las rectas

$$r : x - 2 = \frac{y-1}{k} = \frac{z+1}{-2} \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 2\lambda \end{array} \right.$$

1. (1 punto) Hallar k para que r y s sean coplanarias.
2. (1 punto) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
3. (1 punto) Para el valor anterior de k, hallar la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas dadas.

Solución:

1.

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, k, -2) \\ P_r(2, 1, -1) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 2) \\ P_s(1, 2, 0) \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{P_rP_s} = (-1, 1, 1)$$

$$\left| \begin{array}{rrr} 1 & k & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow k = -1$$

Si $k = -1$ las dos rectas son coplanarias.

2.

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(1,-1,-2)\\ P_r(2,1,-1)\end{array}\right. \quad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,-1,2)\\ P_s(1,2,0)\end{array}\right. \quad \overrightarrow{P_rP_s}=(-1,1,1)$$

$$\pi:\left|\begin{array}{rrr}1&1&x-1\\-1&-1&y-2\\-2&2&z\end{array}\right|=0\Longrightarrow x+y-3=0$$

3. Calculamos el punto de corte

$$r:\left\{\begin{array}{l}x=2+\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=-1-2\lambda\end{array}\right. \quad s:\left\{\begin{array}{l}x=1+\mu\\ y=2-\mu\\ z=2\mu\end{array}\right. \Longrightarrow \lambda=-\frac{3}{4},\ \mu=\frac{1}{4}$$

El punto es $P\left(\frac{5}{4},\frac{7}{4},\frac{1}{2}\right)$.

El vector director de la recta es

$$\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{rrr}i&j&k\\1&-1&-2\\1&-1&2\end{array}\right|=-4(1,1,0)$$

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(1,1,0)\\ P_r(5/4,7/4,1/2)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=5/4+\lambda\\ y=7/4+\lambda\\ z=1/2\end{array}\right.$$

2.5. Septiembre 2001 - Opción A

Problema 2.5.1 *(2 puntos)* Determinar la ecuación cartesiana de los puntos del lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$ es igual a 9. Si se trata de una curva cerrada, calcular el área que encierra.

Solución:

LLamamos $O(0,0)$, $A(1,1)$ y $P(x,y)$:

$$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{AP}|\Longrightarrow x^2+y^2-x-y-\frac{7}{2}=0$$

Se trata de una circunferencia de centro $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ y radio $r=2$. Luego el área será: $S=\pi r^2=4\pi\, u^2$.

Problema 2.5.2 *(2 puntos)* Sean A, B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación

$$\overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{CA}$$

1. (1 punto) Calcular el valor que toma k en la expresión $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$
2. (1 punto) Si $A(1, 2, -1)$ y $B(3, 6, 9)$, hallar las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.

Solución:

1. Como $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{AC}$ tenemos

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} \Longrightarrow 4\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \Longrightarrow k = \frac{1}{4}$$

2. Volvemos a utilizar la propiedad triangular, para ello cogemos como punto auxiliar el $O(0, 0, 0)$ y el resultado del apatado anterior:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = (1, 2, -1) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$$

Luego $C\left(\frac{3}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$

Problema 2.5.3 *(3 puntos)* Se consideran las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = ax^2 + b$

1. (1 punto) Calcular a y b para que las gráficas de f y g sean tangentes en el punto de abcisa $x = 2$.
2. (1 punto) Para los valores de a yb calculados en el apartado anterior, dibujar las gráficas de ambas funciones y hallar la ecuación de la recta tangente común.
3. (1 punto) Para los mismos valores de a yb, hallar el área limitada por las gráficas de las funciones y el eje vertical.

Solución:

1. Se tiene que cumplir que $f(2) = g(2)$ y que $f'(2) = g'(2)$:

$$f(2) = 3 = 4a + b$$

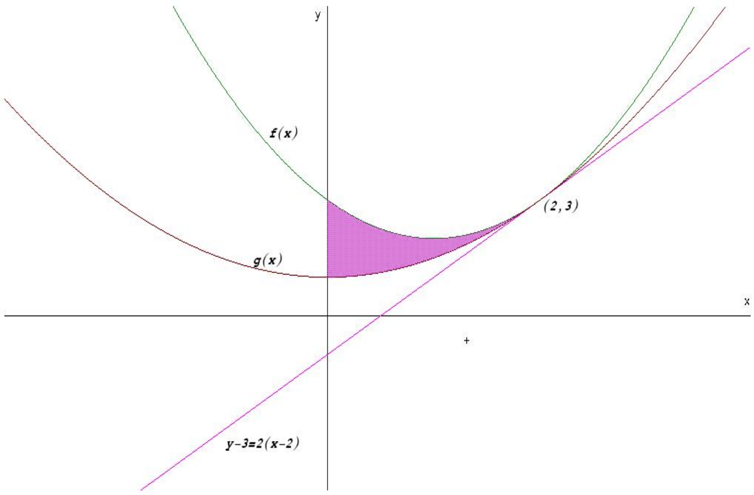
$$f'(x) = 2x - 2 \Longrightarrow f'(2) = 2, \quad g'(x) = 2ax \Longrightarrow g'(2) = 4a$$

luego $4a = 2 \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$ y $b = 1$. Con lo que

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + 1$$

2. En ambas funciones la pendiente en $x = 2$ vale $m = f'(2) = 2$ y el punto de tangencia común a ambas funciones es $(2, 3)$. La recta tangente es

$$y - 3 = 2(x - 2)$$



3. El área buscada sería:

$$S = \int_0^2 \left(x^2 - 2x + 3 - \frac{x^2}{2} + 1 \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2 \right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} - x^2 + 2x \right]_0^2 = \frac{4}{3} u^2$$

Problema 2.5.4 *(3 puntos)* Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} ax+ & y+ & 4z = & 1 \\ -x+ & ay- & 2z = & 1 \\ & y+ & z = & a \end{cases}$$

1. (1 punto) Discutir el sistema según los valores del parámetro a.
2. (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.
3. (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} a & 1 & 4 & 1 \\ -1 & a & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array} \right), \quad |A| = a^2 + 2a - 3 = 0 \Longrightarrow a = 1, \ a = -3$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -3 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado. (Solución única)
- Si $a = 1$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$
Como la segunda columna y la cuarta son iguales Rango$(\overline{A})$ = Rango$(A) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. (Infinitas soluciones)
- Si $a = -3$:
$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -3 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{rr} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{array} \right| = 10 \neq 0 \Longrightarrow$$
Rango$(A) = 2 <$ pero el menor
$$\left| \begin{array}{rrr} -3 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right| = -28 \neq 0 \Longrightarrow$$
Rango$(\overline{A}) = 3$.

  Como Rango(A) $\neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible. (No tiene solución).

2. Para $a = 2$
$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & y+ & 4z = & 1 \\ -x+ & 2y- & 2z = & 1 \\ & y+ & z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x = & -\dfrac{13}{5} \\ y = & \dfrac{3}{5} \\ z = & \dfrac{7}{5} \end{array} \right.$$

3. Para $a = 1$
$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 4z = & 1 \\ & y+ & z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lr} x = & -3\lambda \\ y = & 1 - \lambda \\ z = & \lambda \end{array} \right.$$

2.6. Septiembre 2001 - Opción B

Problema 2.6.1 *(2 puntos)* Sean la función $f(t) = \dfrac{1}{1+e^t}$

1. (1 punto) Calcular $\displaystyle\int f(t)dt$

2. (1 punto) Se definen $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Calcular $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$

Solución:

1. Hacemos el cambio de variable $1+e^t = x \Longrightarrow e^t = x-1$ y $dt = \dfrac{1}{x-1}dx$

   $$\int \frac{1}{1+e^t}\,dt = \int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C = t - \ln|1+e^t| + C$$

   La descomposición polinómica sería:

   $$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)} \Longrightarrow 1 = A(x-1)+Bx$$

   $$\left\{\begin{array}{ll} x = 0 \Longrightarrow & A = -1 \\ x = 1 \Longrightarrow & B = 1 \end{array}\right.$$

   $$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}$$

2. $$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

   Podemos aplicar la Regla de L'Hôpital para la resolución del límite. Para derivar $g(x)$ aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo y nos queda:

   $$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+e^x}}{x} = 1$$

Problema 2.6.2 *(2 puntos)* Sea $P(x)$ un polinomio de grado 4 tal que:

- $P(x)$ es una función par.
- Dos de sus raices son $x = 1$ y $x = \sqrt{5}$.
- $P(0) = 5$.

Se pide:

1. (1 punto) Hallar sus puntos de inflexión.

2. (1 punto) Dibujar su gráfica.

Solución:

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

- $P(x)$ es una función par $P(-x) = P(x)$:

  $a(-x)^4+b(-x)^3+c(-x)^2+d(-x)+e = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \Longrightarrow bx^3+dx = 0$

  Luego $P(x) = ax^4 + cx^2 + e$

- Dos de sus raices son $x = 1$ y $x = \sqrt{5}$:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 \Longrightarrow P(1) = 0 \Longrightarrow a + c + 5 = 0 \\ x = \sqrt{5} \Longrightarrow P(\sqrt{5}) = 0 \Longrightarrow 5a + c + 1 = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ c = -6 \end{array}\right.$$

- $P(0) = 5 \Longrightarrow e = 5$

El polinomio es $P(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

1. Tenemos: $P'(x) = 4x^3 - 12x$, $P''(x) = 12x^2 - 12$ y $P'''(x) = 24x$. Para obtener los puntos de inflexión igualamos la segunda derivada a cero:

$$P''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

   Sustituimos en la tercera derivada:

$$\left\{\begin{array}{l} P'''(1) = 24 \neq 0 \\ P'''(-1) = -24 \neq 0 \end{array}\right.$$

   Luego esta función tiene dos puntos de inflexión en los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

2. La gráfica será la siguiente:

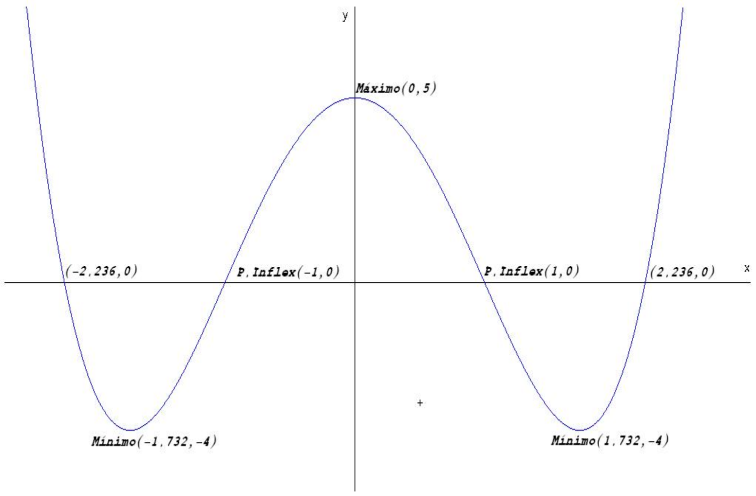
   Calculamos sus máximos y mínimos:

$$P'(x) = 4x^3 - 12x = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{3}, \ \ x = 0$$

   Por la segunda derivada

$$\left\{\begin{array}{l} P''(0) = -12 < 0 \\ P''(-\sqrt{3}) = 24 > 0 \\ P''(\sqrt{3}) = 24 > 0 \end{array}\right.$$

   La función tiene un Máximo en el punto $(0, 5)$ y dos Mínimos en los puntos $(-\sqrt{3}, -4)$ y $(\sqrt{3}, -4)$.



Ahora calculamos puntos de corte:

Con el eje OY : Hacemos $x = 0$ y tenemos $(0, 5)$.

Con el eje OX : Hacemos $P(x) = 0$ y tenemos $(\sqrt{5}, 0)$ y $(-\sqrt{5}, 0)$.

Problema 2.6.3 *(3 puntos)* Se considera el tetraedro cuyos vértices son $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(-2, 1, 0)$ y $D(0, 1, 3)$.

1. (1 punto) Hallar el área del triángulo ABC y el volumen del tatraedro $ABCD$.
2. (1 punto) Calcular la distancia de D al plano determinado por los puntos A, B y C.
3. (1 punto) Hallar la distancia entre las rectas AC y BD.

Solución:

1. Tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, 1, 1) \\ \overrightarrow{AC} = (-3, 1, 0) \\ \overrightarrow{AD} = (-1, 1, 3) \end{array}\right.$$

$$S = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2}|(-1, -3, 3)| = \frac{\sqrt{19}}{2}\, u^2$$

$$V = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}| = \frac{1}{6}|7| = \frac{7}{6}\, u^3$$

2. Construimos el plano $\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0,1,1) \\ \overrightarrow{AC} = (-3,1,0) \\ A(1,0,0) \end{array} \right.$

$$\pi : \left| \begin{array}{lll} 0 & -3 & x-1 \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi : x + 3y - 3z - 1 = 0$$

$$d(D, \pi) = \frac{|0+3-9-1|}{\sqrt{1+9+9}} = \frac{7}{\sqrt{19}} = \frac{7\sqrt{19}}{19}\, u$$

3. Calculamos las rectas r y s:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (-3,1,0) \\ A(1,0,0) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{BD} = (-1,0,2) \\ B(1,1,1) \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{AB} = (0,1,1)$$

$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]| = |\left| \begin{array}{rrr} 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{array} \right|| = 7$$

$$|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}| = |\left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{array} \right|| = |(2,6,1)| = \sqrt{41}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]|}{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}|} = \frac{7}{\sqrt{41}} = \frac{7\sqrt{41}}{41}\, u$$

Problema 2.6.4 *(3 puntos)* Dada la matriz $A = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{array} \right)$ se pide:

1. (1 punto) Comprobar que verifica la igualdad $A^3 + I = O$, siendo I la matriz identidad y O la matriz nula.

2. (1 punto) Justificar que A tiene inversa y obtener A^{-1}.

3. (1 punto) Calcular A^{100}.

Solución:

1. $$A^1 = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{array} \right), \quad A^2 = \left(\begin{array}{rrr} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{array} \right), \quad A^3 = \left(\begin{array}{rrr} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

   Luego $A^3 + I = -I + I = O$.

2. $A^3 + I = O \Longrightarrow A \cdot A^2 = -I \Longrightarrow A \cdot (-A^2) = I \Longrightarrow A^{-1} = -A^2$

$$A^{-1} = -A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Tenemos $A^1 = A$, $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, $A^3 = -I$, $A^4 = -A$, $A^5 = -A^2$, $A^6 = I$,... Dividiendo 100 entre 6 el resto es 4 luego $A^{100} = A^4 = -A$.

Capítulo 3

Año 2002

3.1. Modelo 2002 - Opción A

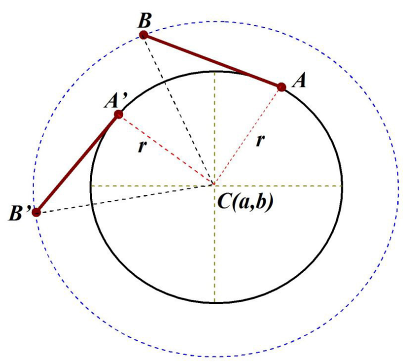
Problema 3.1.1 *(2 puntos)* Se considera una varilla $\overline{AB}$ de longitud 1. El extremo A de esta varilla recorre completamente la circunferencia de ecuación: $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$; la varilla se mantiene en todo momento tangente a dicha circunferencia.

1. (1 punto) Determinar el lugar geométrico descrito por el extremo B de la varilla.

2. (1 punto) Obtener la ecuación cartesiana de dicho lugar geométrico.

Solución:

1. Veamos un dibujo aproximado:



Como se puede ver en la figura el segmento $\overline{CA} = \overline{CA'} = r$ radio de la circunferencia descrita por el punto A. El segmento $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, ya que la varilla suponemos que siempre es del mismo tamaño. El ángulo $\widehat{CAB} = \widehat{CA'B'} = 90^{\circ}$. Luego los triángulos formados por los puntos ABC y $A'B'C$ son iguales y, por tanto, $\overline{CB} = \overline{CB'}$. En conclusión, el punto B recorre una circunfenecia de centro C y radio $R = \overline{CB}$, que sería concéntrica con la dada en el problema.

2. La circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \Longrightarrow C(2,1), \quad r = 2$.

$$R = \sqrt{\overline{AB}^2 + r^2} = \sqrt{5}$$

La circunferencia que buscamos es de centro $C(2,1)$ y radio $R = \sqrt{5}$:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$

Problema 3.1.2 *(2 puntos)* Sean las rectas:

$$r: \begin{cases} x - 2y - 6z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad s: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{a} = z$$

1. (1 punto) Determinar la posición relativa de r y s según los valores de a.

2. (1 punto) Calcular la distancia entre las rectas r y s cuando $a = -2$:

Solución:

1.

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,-2,1) \\ P_r(0,0,-1/6) \end{cases}, \quad s: \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2,a,1) \\ P_s(0,1,0) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (0,1,1/6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/6 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad |A| = \frac{a+2}{3} = 0 \Longrightarrow a = -2$$

Si $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ las dos rectas se cruzan.

Si $a = -2 \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_s} = (2,-2,1)$ y además el Rango$(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, luego las rectas son paralelas.

2. Cuando $a = -2$ hemos visto que las rectas son paralelas, luego

$$d(r,s) = d(P_r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_s}|} = \frac{\sqrt{53}}{9}$$

$$|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{u_s}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1/6 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}| = |(4/3, 1/3, -2)| = \frac{\sqrt{53}}{3}\, u$$

$$|\overrightarrow{u_s}| = 3$$

Problema 3.1.3 *(3 puntos)* Sea A una matriz cuadrada que verifica $A^2 + 2A = I$, donde I denota la matriz identidad.

1. (1 punto) Demostrar que A es no singular ($det(A) \neq 0$) y expresa A^{-1} en función de A e I.

2. (1 punto) Calcular dos números p y q tales que $A^3 = pI + qA$

3. (1 punto) Si
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$
cumple la relación de partida, calcular el valor de k.

Solución:

1. Aplicamos la propiedad $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$:
$$A^2 + 2A = I \Longrightarrow (A + 2I)A = I \Longrightarrow |A + 2I||A| = |I| = 1$$
Si $|A| = 0 \Longrightarrow 0 = 1$, lo que es imposible y, por tanto, la matriz A no es singular ($|A| \neq 0$). Esto quiere decir que siempre tiene inversa:
$$A^2 + 2A = I \Longrightarrow (A + 2I)A = I \Longrightarrow A^{-1} = A + 2I$$

2. $A^2 = I - 2A$
$$A^3 = A^2 \cdot A = A - 2A^2 = A - 2I + 4A = -2I + 5A$$
Luego $p = -2$ y $q = 5$.

3.
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & k^2 + 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & k + 2 \\ k + 2 & (k + 1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow k = -2$$

Problema 3.1.4 *(3 puntos)* Dada la parábola $y = 4 - x^2$, se considera el triángulo rectángulo $T(r)$ formado por los ejes de coordenadas y la tangente a la parábola en el punto de abcisa $x = r > 0$.

1. (2 puntos) Hallar r para que $T(r)$ tenga área mínima.

2. (1 punto) Calcular el área de la región delimitada por la parábola, su tangente en el punto de abcisa $x = 1$, y el eje vertical.

Solución:

1. La pendiente de la recta tangente en $x = r$ es $m = -2r$, y la ecuación de esta recta será:

$$y - (4 - r^2) = -2r(x - r) \Longrightarrow 2rx + y - (4 + r^2) = 0$$

La base del triángulo que buscamos será el corte de esta recta con el eje de abcisas, haciendo $y = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{4 + r^2}{2r}$

La altura del triángulo que buscamos será el corte de esta recta con el eje de ordenadas, haciendo $x = 0 \Longrightarrow y = 4 + r^2$.

La función a minimizar será:

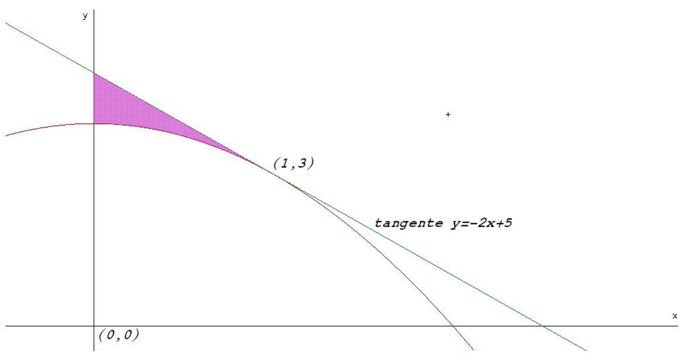
$$S(r) = \frac{\frac{4+r^2}{2r}(4 + r^2)}{2} = \frac{(4 + r^2)^2}{4r}$$

$$S'(r) = \frac{(4 + r^2)(3r^2 - 4)}{4r^2} = 0 \Longrightarrow r = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

	$(-\infty, -2/\sqrt{3})$	$(-2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3})$	$(2/\sqrt{3}, \infty)$
$S'(r)$	$+$	$-$	$+$
$S(r)$	Creciente	Decreciente	Creciente

Luego la función es mínima cuando $r = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

2. El recinto es el siguiente:



La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $2x + y - 5 = 0 \Longrightarrow y = -2x + 5$. El área es el comprendido entre esta recta y la parábola en el intervalo de integración $[0, 1]$:

$$S = \left|\int_0^1 (-2x + 5 - (4 - x^2))dx\right| = \left|\int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx\right| =$$

$$= \left| \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^1 \right| = \left| \frac{1}{3} - 1 + 1 \right| = \frac{1}{3}\, u^2$$

3.2. Modelo 2002 - Opción B

Problema 3.2.1 *(3 puntos)* Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Calcular A^{-1}.

2. (1 punto) Resolver la ecuación matricial $AX = BA$.

Solución:

1.
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $AX = BA \Longrightarrow X = A^{-1}BA$:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema 3.2.2 *(2 puntos)* Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Para cada número real O definimos la matriz $B = A - OI$, donde I denota la matriz identidad 2×2.

1. (1 punto) Hallar los valores de O que hacen que el determinate de B sea nulo.

2. (1 punto) Resolver el sistema

$$B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Para los diferente valores de O.

Solución:

1.

$$B = A - OI = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} O & 0 \\ 0 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-O & -3 \\ 1 & -2-O \end{pmatrix}$$

$$|B| = O^2 - 1 \Longrightarrow O = \pm 1$$

2. Se trata de un sistema homogéneo

$$B = \begin{pmatrix} 2-O & -3 \\ 1 & -2-O \end{pmatrix}$$

Por el apartado anterior tenemos que:

Si $O \neq \pm 1 \Longrightarrow |B| \neq 0 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado (solución única). La solución es la trivial $x = y = 0$.

Si $O = \pm 1 \Longrightarrow |B| = 0 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (infinitas soluciones):

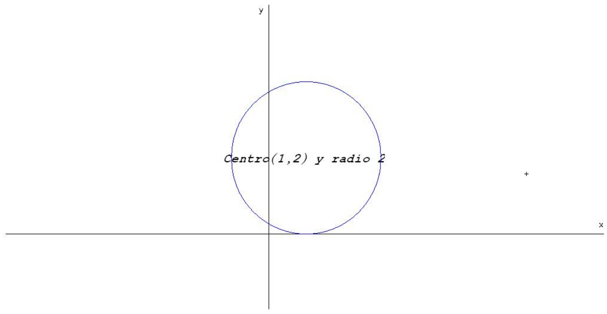
- Si $O = 1$
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$
tenemos $x - 3y = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$
- Si $O = -1$
$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
tenemos $x - y = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$

Problema 3.2.3 *(3 puntos)* Sea la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$.

1. (1 punto) Hallar su centro y su radio y dibujarla.
2. (1 punto) Hallar el punto de la curva, de abcisa cero, más alejado del origen; hallar también la recta tangente a la curva en ese punto.
3. (1 punto) Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas desde el punto $P(3, 0)$ razonando la respuesta.

Solución:

1. El centro es $C(1, 2)$ y el radio $r = 2$

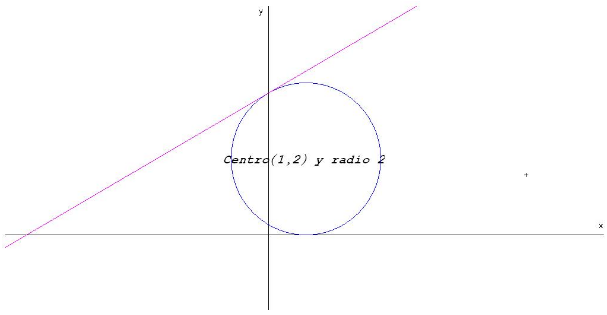


2. Para encontrar el punto hacemos $x = 0 \Longrightarrow y^2 - 4y + 1 = 0 \Longrightarrow$ $(0, 2+\sqrt{3})$ y $(0, 2-\sqrt{3})$. El punto más alejado es: $(0, 2+\sqrt{3})$

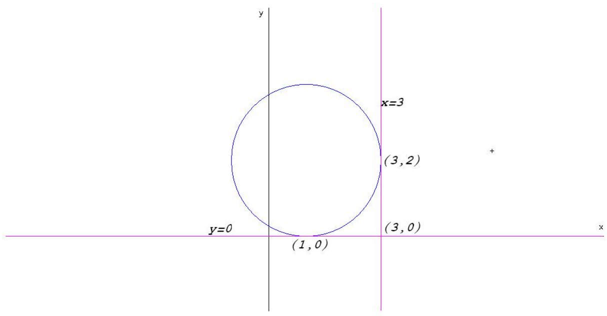
$$2xdx + 2ydy - 2dx - 4dy = 0 \Longrightarrow (2y-4)dy = -(2x-2)dx$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2x-2}{2y-4} \Longrightarrow m = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

La recta tangente es $y - 2 - \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x \Longrightarrow \sqrt{3}x - 3y - 6 - 3\sqrt{3} = 0$



3. El dibujo es:



Una de ellas es el eje de abcisa $y = 0$ y tendrá de punto de tangencia el $(2, 0)$, ya que el punto $(3, 0)$ está en el eje de abcisas. La otra recta tangente que pase por este punto debe de ser $x = 3$, ya que el punto de tangencia es el $(3, 2)$.

Problema 3.2.4 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = xe^{3x}$

1. (1,5 puntos) Estudiar y representar gráficamente la función f.
2. (1,5 puntos) Sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de f y el eje OX entre $x = 0$ y $x = p$ ($p > 0$) vale $1/9$, calcular el valor de p.

Solución:

1. Estudio:
   - Dominio: $\text{Dom}(f) = R$
   - Signo:

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f(x)$	$-$	$+$

   - Simetría: No hay $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$
   - Puntos de corte:
     - Si $x = 0 \Longrightarrow f(0) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
     - Si $f(x) = 0 \Longrightarrow x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$
   - Asíntotas:
     - Verticales no hay
     - Horizontales:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} xe^{3x} = \infty$$

$y = -x \Longrightarrow$ si $x \longrightarrow -\infty$ entonces $y \longrightarrow \infty$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} xe^{3x} = \lim_{y \longrightarrow \infty} ye^{-3y} = \lim_{y \longrightarrow \infty} \frac{-y}{e^{3y}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{y \longrightarrow \infty} \frac{-1}{3e^{3y}} = 0$$

Luego hay una asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \longrightarrow -\infty$.

     - Oblicuas: No hay al haber horizontales.
   - Monotonía: $f'(x) = e^{3x}(3x + 1) = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

	$(-\infty, -1/3)$	$(-1/3, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decrece	Crece

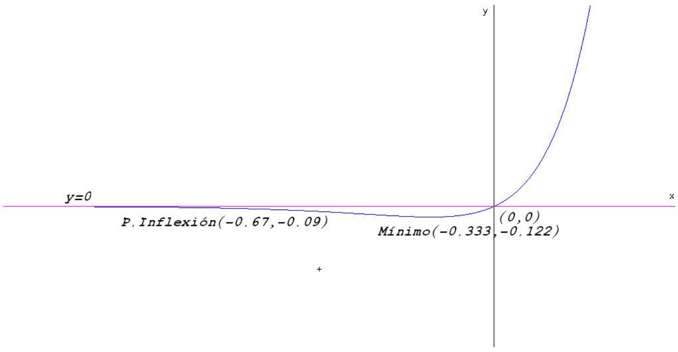
La función presenta un mínimo en el punto $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3e}\right)$

- Curvatura: $f''(x) = 3e^{3x}(3x+2) = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{2}{3}$

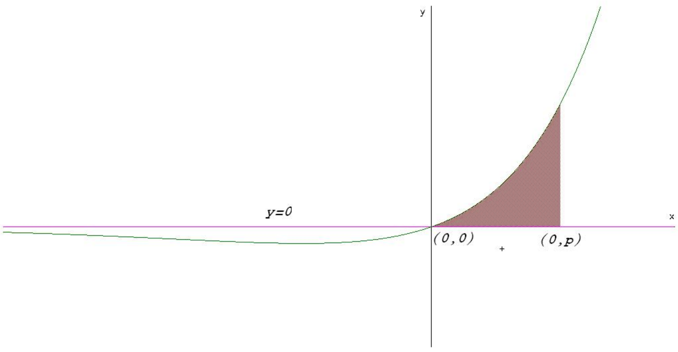
	$(-\infty, -2/3)$	$(-2/3, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa	Cóncava

La función presenta un punto de inflexión en $\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3e^2}\right)$

- Representación gráfica:



2. Veamos la figura:



La integral se calcula por partes $u = x \Longrightarrow du = dx$ y $dv = e^{3x}dx \Longrightarrow v = \dfrac{1}{3}e^{3x}$:

$$\int xe^{3x}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\int e^{3x}\,dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{9}e^{3x} = e^{3x}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)$$

$$\int_0^p xe^{3x}\,dx = e^{3x}\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right)\bigg]_0^p = e^{3p}\left(\frac{p}{3} - \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

$$e^{3p}\left(\frac{p}{3}-\frac{1}{9}\right)=0\Longrightarrow \frac{p}{3}-\frac{1}{9}=0\Longrightarrow p=\frac{1}{3}$$

3.3. Junio 2002 - Opción A

Problema 3.3.1 *(2 puntos)* Calcular las edades actuales de una madre y sus dos hijos sabiendo que hace 14 años la edad de la madre era 5 veces la suma de las edades de los hijos en aquel momento, que dentro de 10 años la edad de la madre será la suma de las edades que los hijos tendrán en ese momento y que cuando el hijo mayor tenga la edad actual de la madre, el hijo menor tendrá 42 años.

Solución:
Sea x la edad de la madre, y la edad del hijo mayor y z la del hijo menor:

$$\left\{\begin{array}{rl} x-14= & 5(\;y+z-28) \\ x+10= & \;\;\;\;\;y+z+20 \\ x-42= & \;\;\;\;\;y-z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x- & 5y- & 5z+ & 126=0 \\ x- & y- & z- & 10=0 \\ x- & y+ & z- & 42=0 \end{array}\right.$$

Multiplicamos la 2ª ecuación por -5 y la sumamos a la 1ª:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & 5y- & 5z+ & 126=0 \\ -5x+ & 5y+ & 5z+ & 50=0 \end{array}\right. \Longrightarrow -4x+176=0\Longrightarrow x=44$$

Ahora por simple sustitución en la 2ª y la 3ª nos quedaría:

$$\left\{\begin{array}{rr} y+z= & 34 \\ y-z= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} y=18 \\ z=16 \end{array}\right.$$

Problema 3.3.2 *(2 puntos)* Calcular el rango de la matriz A según los diferentes valores del parámetro real a:

$$A=\left[\begin{array}{rrrr} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{array}\right]$$

Solución:

$$A=\left[\begin{array}{rrrr} 2 & 0 & a & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 5 & a+4 & -4 & -3 \end{array}\right]$$

Es una matriz de dimensión 3×4 esto quiere decir que, el rango de la matriz como mucho será 3. Consideramos ahora las siguientes matrices:

$$A_1=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & a+4 & -4 \end{array}\right) \quad A_2=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 5 & a+4 & -3 \end{array}\right)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & a & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & a & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ a+4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Calculamos sus determinantes:
$|A_1| = -(a+4)(a-2) = 0 \Longrightarrow \quad a = -4 \ \ a = 2$
$|A_2| = -8(a+4) = 0 \Longrightarrow \quad a = -4$
$|A_3| = 12a + 48 = 0 \Longrightarrow \quad a = -4$
$|A_4| = (a+4)(3a+2) = 0 \Longrightarrow \quad a = -4 \ \ a = -\frac{2}{3}$ El único valor de a que anula todos los determinantes es $a = -4$. Además tenemos que $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.
Por tanto podemos concluir de la siguiente manera:
Si $a = -4$ el rango de A es 2
Si $a \neq -4$ el rango de A es 3

Problema 3.3.3 *(3 puntos)* Se consideran las cónicas C_1 y C_2 cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \quad ; \quad C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144$$

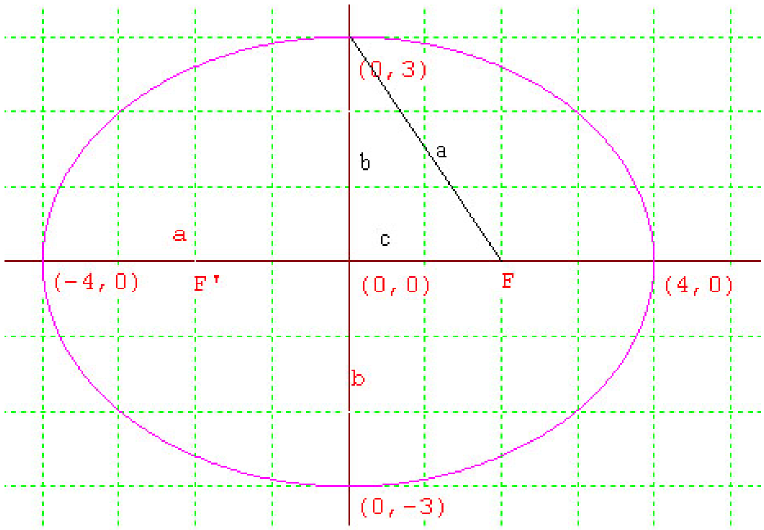
1. (2 puntos) Identificar C_1 y C_2. Especificar, para cada una de ellas, sus elementos característicos: vértices, focos, excentricidad, y asíntotas (si existen).

2. (1 punto) Hallar una ecuación cartesiana de la parábola de eje horizontal, abierta hacia la derecha y que pasa por tres de los vértices de la cónica C_1.

Solución:

1. $C_1 : 9x^2 + 16y^2 = 144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9} + \frac{y^2}{144/16} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$. Es decir, se trata de una elipse centrada en el origen con semieje mayor $a = 4$ y semieje menor $b = 3$.
   Por la igualdad fundamental tenemos que $b^2 + c^2 = a^2 \Longrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.
   Su excentricidad será: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.
   Podemos concluir:

   - Focos: $F'(-\sqrt{7}, 0) \quad F(\sqrt{7}, 0)$
   - Vértices: $(-4, 0) \ \ (0, 3) \ \ (0, -3) \ \ (4, 0)$
   - Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$
   - Asíntotas: Una elipse no tiene asíntotas.



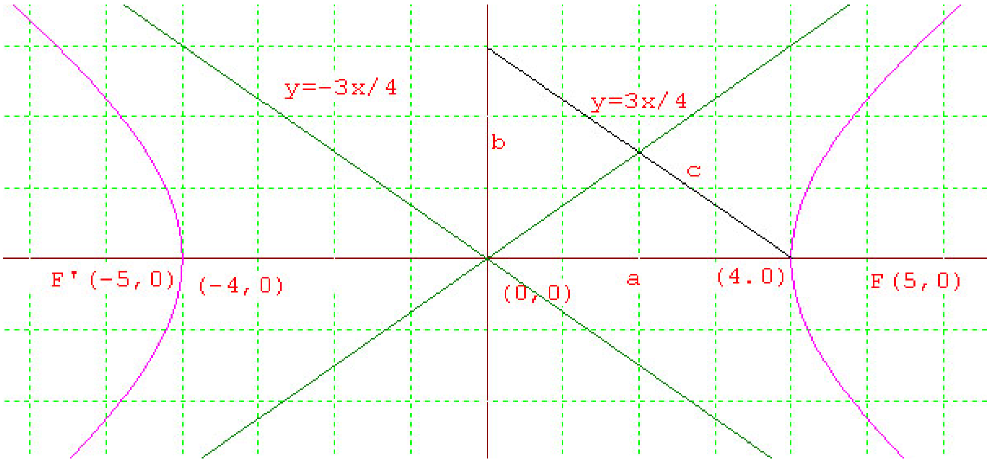
$C_2 : 9x^2 - 16y^2 = 144 \Longrightarrow \frac{x^2}{144/9} - \frac{y^2}{144/16} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ Es decir, se trata de una hipérbola donde $a = 4$, y $b = 3$, y se encuentra centrada en el origen.
Para calcular los focos $a^2 + b^2 = c^2 \Longrightarrow c = \sqrt{16 + 9} = 5$
Para calcular la excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$
Las pendientes de las asíntotas serían: $m = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ y $m' = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{4}$
Teniendo en cuenta que estas asíntotas pasan por el punto $(0, 0)$ las rectas buscadas serían:

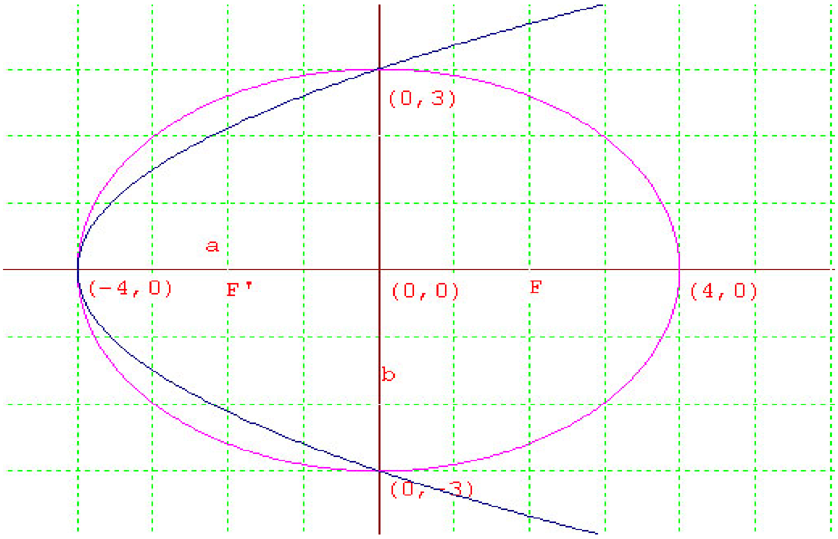
$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

Podemos concluir:

- Focos: $(-5, 0) \quad (5, 0)$
- Vértices: $(-4, 0) \quad (4, 0)$
- Excentricidad: $e = \frac{5}{4}$
- Asíntotas:
$$y = \frac{3}{4}x \quad ; \quad y = -\frac{3}{4}x$$

2. La ecuación general de una parábola con vértice en el eje de abcisas y simétrica respecto a este eje es $x = ay^2 + by + c$, habrá que calcular estos coeficientes con la ayuda de los tres puntos que nos ofrece el problema.
Como pasa por el vértice $(-4, 0), (0, 3), (0, -3)$ por sustitución tendremos un sistema de tres ecuaciones con tres incognitas:





$$\left\{\begin{array}{rrrr} -4 = & & & c \\ 0 = & 9a+ & 3b+ & c \\ 0 = & 9a- & 3b+ & c \end{array}\right. \Longrightarrow c = -4,\ a = \frac{4}{9}\ y\ b = 0 \Longrightarrow x = \frac{4}{9}y^2 - 4$$

Problema 3.3.4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3}$$

1. (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abcisa positiva de la gráfica de f.

2. (2 puntos) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de f, la recta anterior y el eje $x = 0$.

Solución:

1. Para encontrar los puntos de inflexión tendremos que ver los puntos en los que se anula la segunda derivada:

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$$

   Es decir, tenemos que calcular los puntos que hacen $f''(x) = 0$. Como el denominador $(x^2+3)^3$ no se anula nunca, los puntos buscados son aquellos que anulen el numerador, $x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$, de estas dos soluciones sólo nos interesa la positiva, que es la que nos pide el problema. Si sutituimos este punto en la función obtendremos la ordenada correspondiente: $f(1) = \frac{1}{4}$, luego la recta pedida pasará por el punto $(1, \frac{1}{4})$. Para encontrar la pediente utilizamos la primera derivada $m = f'(1) = -\frac{1}{8}$ En conclusión, la recta tangente será:

$$y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}(x-1) \Longrightarrow x + 8y - 3 = 0$$

2. El recinto pedido se calcularía mediante la integral siguiente:

$$\int_0^1 \left[\frac{3-x}{8} - \frac{1}{x^2+3}\right] dx$$

   Calculamos la integral

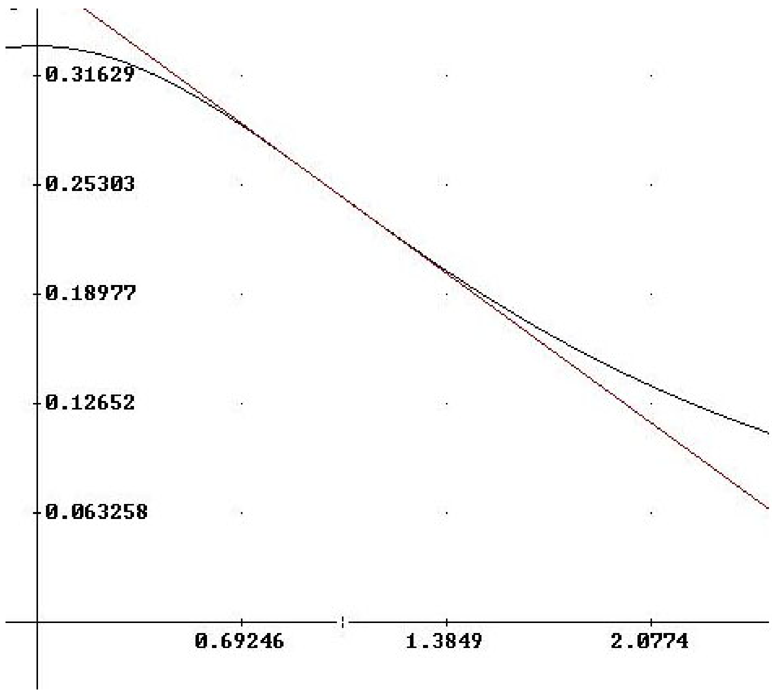
$$\int \frac{1}{x^2+3}\, dx = \int \frac{dx}{3\left[\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan t = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}}$$

   Hemos utilizado el cambio de variable $\frac{x}{\sqrt{3}} = t \quad dx = \sqrt{3}dt$
   Luego:

$$\int_0^1 \left[\frac{3-x}{8} - \frac{1}{x^2+3}\right] dx = \left[\frac{3x}{8} - \frac{x^2}{16} - \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{5}{16} - \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$



3.4. Junio 2002 - Opción B

Problema 3.4.1 *(2 puntos)* Hallar una ecuación cartesiana del plano que contiene a la recta r:

$$x = 1 + t \quad , \quad y = -1 + 2t \quad , \quad z = t$$

y es perpendicular al plano π:

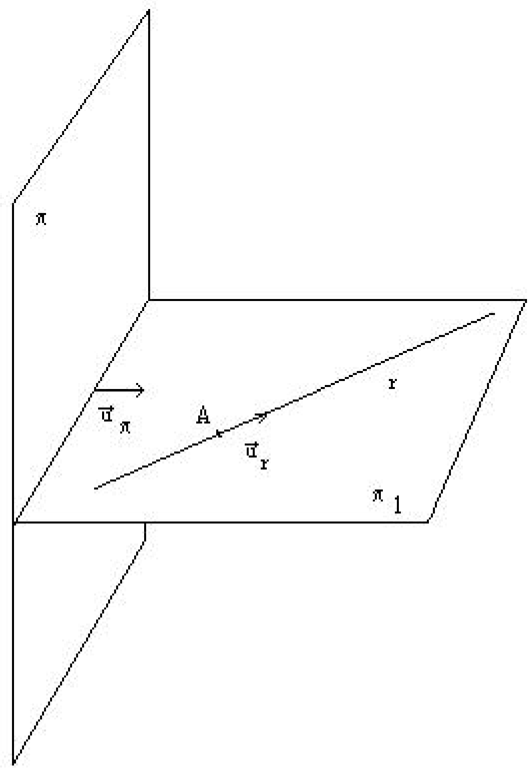
$$2x + y - z = 2.$$

Solución:
Los datos que tenemos son los siguientes:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ A(1, -1, 0) \end{cases} \qquad \pi : \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1)$$

Es decir, para calcular el plano pedido tendremos los siguientes datos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, 1) \\ \overrightarrow{u_\pi} = (2, 1, -1) \\ A(1, -1, 0) \end{cases}$$



La ecuación del plano vendrá dada por:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 1 & y+1 \\ 1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi_1 : x - y + z - 2 = 0$$

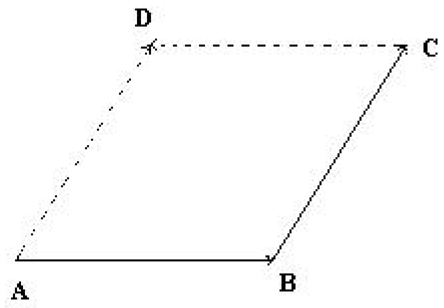
Problema 3.4.2 *(2 puntos)* Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$, $C(1,3,3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.
Se pide:

1. (1 punto) Hallar las coordenadas del cuarto vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.

2. (1 punto) Clasificar el paralelogramo por sus lados y por sus ángulos.

Solución:

1. Los vectores que nos proporciona el problema son:$\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{BC} = (-1,1,1)$.
   Las coordenadas del punto que nos piden serán $D(x_0, y_0, z_0)$. Como $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \Longrightarrow (-1,1,1) = (x_0 - 1, y_0 - 1, z_0 - 1)$ y por tanto $x_0 =$



0, $y_0 = 2$ $z_0 = 2$, el punto será $D(0,2,2)$. El área del paralelogramo viene dada por $Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}|$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0,-2,2) \Longrightarrow Area = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}| =$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

2. Primero comprobamos la longitud de los lados del paralelogramo, que no sera otra cosa que calcular el módulo de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

Es decir, los lados del paralelogramo son iguales, y por tanto, sólo puede ser o un cuadrado o un rombo, para diferenciarlo calculamos el ángulo que forman dos de los vectores, y en el caso de que ese ángulo fuese $\frac{\pi}{2}$ sería un cuadrado, mientras que en caso contrario sería un rombo. Cogemos $\overrightarrow{AB} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{AD} = (-1,1,1)$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{-1+1+1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \Longrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2}$$

Luego se trata de un rombo.

Problema 3.4.3 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x- & y & & = 2 \\ ax+ & y+ & 2z = & 0 \\ x- & y+ & az = & 1 \end{array} \right.$$

Se pide:

1. (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.
2. (0,5 punto) Resolver el sistema para $a = -1$.
3. (1 punto) Resolver el sistema para $a = 2$.

Solución:

1. Sean las matrices A y $\overline{A}$ siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ a & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular los valores de a que anulan el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = a^2 + a = 0 \Longrightarrow a = 0 \quad a = -1$$

Es decir, si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ tendríamos que $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 3 = \text{n}^\text{o}$ de incognitas; el sistema sería compatible determinado.
Si $a = 0$:

- Tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = 2$$

- Tenemos $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Longrightarrow Rango(\overline{A}) = 3$$

- En conclusión si $a = 0$ el sistema sería incompatible.

2. Si $a = -1$:

- Tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde podemos encontrar:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow Rango(A) = 2$$

- Tenemos $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ donde podemos comprobar:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

  Es decir, $Rango(\overline{A}) = 2$.

- En conclusión, si $a = -1$: $Rango(A) = Rango(\overline{A}) = 2 <$n^o de incognitas $\Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

3. Si $a = -1$ ya hemos visto en el apartado anterior que el sistema es compatible indeterminado, resolvemos:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x- & y & & = 2 \\ -x+ & y+ & 2z = & 0 \\ x- & y- & z = & 1 \end{array} \right.$$

   Si a la primera le restamos la tercera nos queda $z = 1$ y si hacemos $y = \lambda$ tendríamos el resultado:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = & 2+ \quad \lambda \\ y = & \qquad\quad \lambda \\ z = & 1 \end{array} \right.$$

4. Si $a = 2$ ya hemos comprobado que el sistema sería compatible determinado, resolvemos:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x- & y & & = 2 \\ 2x+ & y+ & 2z = & 0 \\ x- & y+ & 2z = & 1 \end{array} \right.$$

   Si a la tercera le restamos la primera tenemos: $2z = -1 \Longrightarrow z = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrl} x- & y = & 2 \\ 2x+ & y = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rr} x = & 1 \\ y = & -1 \end{array} \right.$ Es decir:

$$\left\{ \begin{array}{rr} x = & 1 \\ y = & -1 \\ z = & -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Problema 3.4.4 *(3 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \frac{x^2+3x+1}{x} & si & x \geq -1 \\ & & \\ \frac{2x}{x-1} & si & x < -1 \end{array} \right.$$

1. (0,5 punto) Estudiar el dominio y la continuidad de f.
2. (1,5 puntos) Hallar las asíntotas de la gráfica de f.
3. (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado y limitado por la gráfica de f y las rectas $y = 0$ $x = 1$, $x = 2$.

Solución:

1. Calculamos el dominio:

   - Si $x \geq 1$ tenemos que $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ es un cociente de polinomios, y en este caso el dominio será todo el intervalo excepto en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, $[-1, 0) \cup (0, +\infty)$.
   - Si $x < -1$ tenemos que $f(x) = \frac{2x}{x-1}$, como en el caso anterior tenemos que buscar puntos que anulen el denominador, y resulta que no hay ninguno. El único plosible sería el $x = 1$, pero no pertenece al intervalo de definición, y por tanto el dominio será: $(-\infty, -1)$.
   - En conclusión diremos que el dominio es: $R - \{0\}$.

   Calculamos la continuidad:
   La función $f(x)$ es un cociente de polinomios por ambas ramas, y por tanto continua salvo en los puntos en los que se anula el denominador, es decir, los puntos en los que es posible que no sea continua serían en $x = -1$ donde puede existir un salto y por supueto en $x = 0$, donde como hemos visto anteriormente no pertenece al dominio.

   - En $x = -1$:

     $$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = 1$$

     $$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{2x}{x - 1} = 1$$

     $$\lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = 1$$

     Luego f es continua en $x = -1$.
   - En $x = 0$:

     $$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

     Luego no es continua en $x = 0$.
   - En conclusión: La función f es continua en $R - \{0\}$.

2. Asíntotas verticales:

   - Cuando $x \geq -1$:

     $$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

     Luego $x = 0$ es una asíntota vertical en este intervalo.

   - Cuando $x < -1$:
     No hay ningún valor de x que sea menor de -1 que anule el denominador, y por tanto, no hay asíntotas verticales por esta rama de la función.

   Asíntotas horizontales:

   - Cuando $x \geq -1$:

     $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x} = \infty$$

     Luego no hay asíntotas horizontales en este intervalo.

   - Cuando $x < -1$:

     $$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{2x}{x - 1} = 2$$

     Luego $y = 2$ es una asíntota horizontal en este intervalo.

   Asíntotas oblicuas:
   Recordamos que $y = ax + b$ es una asíntota oblicua si

   $$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

   $$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

   - Cuando $x \geq -1$:

     $$a = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+3x+1}{x}}{x} = 1$$

     $$b = \lim_{x \longrightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \longrightarrow \infty} (\frac{x^2 + 3x + 1}{x} - x) =$$

     $$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x + 1}{x} = 3$$

     Luego en este intervalo habrá una asíntota oblicua en la recta $y = x + 3$.

- Cuando $x < -1$:

$$a = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\frac{2x}{x-1}}{x} = 0$$

Luego no hay asíntotas oblicuas en este intervalo.

3. El recinto comprendido entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$ está en el intervalo $(-1, +\infty)$ donde la función es $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x}$ y como está limitado por la recta horizontal $y = 0$(el eje de abcisas) y la función, podemos concluir con que su área vale:

$$\int_1^2 \frac{x^2+3x+1}{x}dx = \int_1^2 (x+3+\frac{1}{x})dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + \ln|x|\right]_1^2 =$$

$$= \frac{4}{2} + 6 + \ln 2 - \frac{1}{2} - 3 - \ln 1 = \frac{9}{2} + \ln 2$$

3.5. Septiembre 2002 - Opción A

Problema 3.5.1 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

1. (1 punto) Determinar sus máximos y mínimos relativos.

2. (1 punto) Calcular el valor de $a > 0$ para el cual se verifica la igualdad

$$\int_0^a f(x)\,dx = 1$$

Solución:

1.

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

Luego en el punto $(-1, -1/2)$ tenemos un Mínimo y en el punto $(1, 1/2)$ tenemos un Máximo.

2.

$$\int_0^a \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big]_0^a = 1 \Longrightarrow \frac{1}{2}\ln(a^2+1) = 1 \Longrightarrow a = \sqrt{e^2-1}$$

Problema 3.5.2 *(2 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si} \quad x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

1. (1 punto) Estudiar su continuidad y derivabilidad.

2. (1 punto) Hallar la ecuación cartesiana de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3, 1)$.

Solución:

1. Estudiamos en el punto $x = 2$:

   Continuidad:

   $$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} \sqrt[3]{x-2} = 0$$
   $$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} x(x-2) = 0$$
   $$f(2) = 0$$

   Como

   $$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2} f(x) = f(2) \Longrightarrow f \text{ es continua en } x = 2$$

   Derivabilidad:

   $$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt[3]{(x-2)^2}} & \text{si} \quad x \geq 2 \\ 2x - 2 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

   $$f'(2^-) = 2, \quad f'(2^+) = \infty$$

   Como
   $$f'(2^-) \neq f'(2^+) \Longrightarrow f \text{ no es derivable en } x = 2$$

2. Es en la rama $x \geq 2$:
   $$f(3) = 1$$
   $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt[3]{(x-2)^2}} \Longrightarrow m = f'(3) = \frac{1}{3}$$
   $$y - 1 = \frac{1}{3}(x-3) \Longrightarrow x - 3y = 0$$

Problema 3.5.3 *(3 puntos)* Se considera el siguiente sistema de ecuaciones, dependientes del parámetro real λ:

$$\begin{cases} x+ & y+ & \lambda z = & \lambda^2 \\ & y- & z = & \lambda \\ x+ & \lambda y+ & z = & \lambda \end{cases}$$

1. (1,5 puntos) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro λ.

2. (1 punto) Resolver el sistema en los caso en que sea posible.

3. (0,5 puntos) En el caso $\lambda = 2$, indicar la posición relativa de los tres planos cuyas ecuaciones forman el sistema.

Solución:

1. $$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 1 & -1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \end{array} \right) \Longrightarrow |A| = 0 \text{ siempre}$$

   Si elegimos el menor

   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 \text{ siempre}$$

   Si elegimos el menor

   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda^2 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda(1-\lambda) = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \ \lambda = 1$$

   Si $\lambda = 0$ o $\lambda = 1 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 2 <$n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado.

   Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 3 \neq$Rango$(A) = 2$ y el sistema es incompatible.

2. Si $\lambda = 0$:

   $$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{array} \right.$$

   Si $\lambda = 1$:

   $$\left\{ \begin{array}{c} x + y + z = 1 \\ y - z = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{array} \right.$$

3. Si $\lambda = 2$ el sistema es incompatible y no tiene solución.

   $$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & y+ & 2z = & 4 \\ & y- & z = & 2 \\ x+ & 2y+ & z = & 2 \end{array} \right.$$

   Los tres planos se cortan dos a dos

Problema 3.5.4 *(3 puntos)* Se consideran las rectas

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2} \quad s : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

1. (1 punto) Calcular la distancia entre r y s.

2. (1 punto) Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular común a r y s y que corta a ambas.

3. (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que corta a r y s y que pasa por el punto $P(1, 0, 0)$.

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, -2, 2) \\ P_r(0, 1, 3) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (3, 1, -1) \\ P_s(2, 0, -1) \end{cases} \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (2, -1, -4)$$

$$|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]| = | \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} | = | -35| = 35$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = | \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} | = |(0, 7, 7)| = 7\sqrt{2}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{35}{7\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \ u$$

2. La encontramos como intersección de dos planos y para ello nos apoyamos en el vector perpendicular a ambas rectas $\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = (0, 7, 7)$:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0, 7, 7) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, -2, 2) \\ P_r(0, 1, 3) \end{cases} \quad \pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (0, 7, 7) \\ \overrightarrow{u_s} = (3, 1, -1) \\ P_s(2, 0, -1) \end{cases} \quad t : \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 0 & 1 & x \\ 7 & -2 & y-1 \\ 7 & 2 & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 4x + y - z = -2$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 0 & 3 & x-2 \\ 7 & 1 & y \\ 7 & -1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x - 3y + 3z = 1$$

$$t : \begin{cases} 4x + y - z = -2 \\ 2x - 3y + 3z = 1 \end{cases}$$

3. La encontramos como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PP_r} = (-1, 1, 3) \\ \overrightarrow{u_r} = (1, -2, 2) \\ P(1, 0, 0) \end{array} \right. \quad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{PP_s} = (1, 0, -1) \\ \overrightarrow{u_s} = (3, 1, -1) \\ P(1, 0, 0) \end{array} \right. \quad t : \left\{ \begin{array}{l} \pi_1 \\ \pi_2 \end{array} \right.$$

$$\pi_1 : \left| \begin{array}{ccc} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -2 & y \\ 3 & 2 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 8x + 5y + z = 8$$

$$\pi_2 : \left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & x-1 \\ 0 & 1 & y \\ -1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x - 2y + z = 1$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 8x + 5y + z = 8 \\ x - 2y + z = 1 \end{array} \right.$$

3.6. Septiembre 2002 - Opción B

Problema 3.6.1 *(2 puntos)* Hallar una ecuación cartesiana del lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a los puntos $A(0, 3)$ y $B(0, -1)$ es igual a 1. Identificar dicho lugar geométrico.

Solución:

Sea $X(x, y)$ un punto genérico, tendremos:

$$d(A, X) = \sqrt{x^2 + (y - 3)^2}, \quad d(B, X) = \sqrt{x^2 + (y + 1)^2}$$

$$\sqrt{x^2 + (y - 3)^2} - \sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 1$$

$$4x^2 - 60y^2 + 120y - 45 = 0$$

Se trata por definición de una hipérbola.

Problema 3.6.2 *(2 puntos)* Para cada valor del parámetro real a, se consideran los tres planos siguientes:

$$\pi_1 : x + y + az = -2; \quad \pi_2 : x + ay + z = -1; \quad \pi_2 : ax + y + z = 3$$

Se pide:

1. (1,5 puntos) Calcular los valores de a para los cuales los tres planos anteriores contienen una recta común.

2. (0,5 puntos) Para los valores de a calculados, hallar unas ecuaciones cartesianas de dicha recta común.

Solución:

1. $$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & az= & -2\\ x+ & ay+ & z= & -1\\ ax+ & y+ & z= & 3\end{array}\right. \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 1 & a & -2\\ 1 & a & 1 & -1\\ a & 1 & 1 & 3\end{array}\right)$$

   $$\Longrightarrow |A| = -a^3+3a-2=0 \Longrightarrow\ a=-2,\ \ a=1$$

   Si $a\neq -2$ y $a\neq 1$ el sistema es compatible determninado y los tres planos se cortan en un punto.

   Si $a=-2$ el Rango$\overline{A}$ =Rango(A) <nº de incógnitas con lo que el sistema es compatible indeterminado, los tres planos tienen infinitos puntos comunes. Como además no son planos coincidentes, tienen por tanto, una recta común.

   Si $a=1$ tenemos que Rango$(\overline{A})=2\neq$Rango$(A)=1$ y el sistema es incompatible.

2. Si $a=-2$

   $$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & 2z= & -2\\ x- & 2y+ & z= & -1\\ -2x+ & y+ & z= & 3\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=-5/3+\lambda\\ y=-1/3+\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Problema 3.6.3 *(3 puntos)* Sea A una matriz cuadrada de orden n que verifica la igualdad $A^2=I$, siendo I la matriz identidad de orden n.

Se pide:

1. (1 punto) Expresar A^{-1} en térmninos de A
2. (1 punto) Expresar A^n en términos de A e I, para cualquier número natural n.
3. (1 punto) Calcular a para que $A^2=I$, siendo A la matriz:

   $$A=\left(\begin{array}{cc} 1 & 1\\ 0 & a\end{array}\right)$$

Solución:

1. $A^2=A\cdot A=I\Longrightarrow A=A^{-1}$
2. $A^1=A$, $A^2=I$, $A^3=A$, $A^4=I,\cdots$ luego:

   $$A^n=\left\{\begin{array}{lll} A & \text{si} & n \text{ es impar}\\ I & \text{si} & n \text{ es par}\end{array}\right.$$

3.

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & a+1\\ 0 & a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} a+1=0\Longrightarrow a=-1\\ a^2=1\Longrightarrow a=\pm 1\end{array}\right. \Longrightarrow a=-1$$

Problema 3.6.4 *(3 puntos)* Sea $f(x)$ una función real de variable real, derivable y con derivada continua en todos los puntos y tal que:

$$f(0)=1;\quad f(1)=2;\quad f'(0)=3;\quad f'(1)=4.$$

Se pide:

1. (1 punto) Calcular $g'(0)$, siendo $g(x)=f(x+f(0))$.
2. (2 punto) Calcular $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1}$

Solución:

1.

$$g'(x)=f'(x+f(0))(x+f(0))'=f'(x+1)(1+f'(0))=f'(x+1)4$$

$$g'(0)=f'(0+1)4=4\cdot 4=16$$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{2(f(x))^2-f(x+1)}{e^x-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{4(f(x))f'(x)-f'(x+1)}{e^x}=8$

Capítulo 4

Año 2003

4.1. Modelo 2003 - Opción A

Problema 4.1.1 *(2 puntos)* Determinar los valores de las constantes A, B, C y D para los cuales la gráfica de la función real de variable real

$$f(x) = A\sin x + Bx^2 + Cx + D$$

tiene tangente horizontal en el punto $(0, 4)$ y además su derivada segunda es $f''(x) = 3\sin x - 10$

Solución:

$$f(0) = 4 \Longrightarrow D = 4$$

$$f'(x) = A\cos x + 2Bx + C \ \text{ como } \ f'(0) = 0 \Longrightarrow A + C = 0$$

$$f''(x) = -A\sin x + 2B \Longrightarrow A = -3, \ \ B = -5$$

Luego $A = -3$, $B = -5$, $C = 3$ y $D = 4$:

$$f(x) = -3\sin x - 5x^2 + 3x + 4$$

Problema 4.1.2 *(2 puntos)* Calcular la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6}\,dx$$

Solución:

$$\frac{x^2 + 4}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{5x - 2}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\frac{5x - 2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2} = \frac{A(x - 2) + B(x - 3)}{x^2 - 5x + 6}$$

$$5x - 2 = A(x - 2) + B(x - 3)$$

Si $x = 2 \Longrightarrow 8 = -B \Longrightarrow B = -8$

Si $x = 3 \Longrightarrow 13 = A \Longrightarrow B = 13$. Luego:

$$\frac{x^2+4}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{13}{x-3} - \frac{8}{x-2}$$

$$\int \frac{x^2+4}{x^2-5x+6}\,dx = \int dx + 13\int \frac{1}{x-3}\,dx - 8\int \frac{1}{x-2}\,dx =$$

$$x + 13\ln|x-3| - 8\ln|x-2| = x + \ln\frac{|x-3|^{13}}{|x-2|^8}$$

Problema 4.1.3 *(3 puntos)* Sea M una matriz cuadrada de orden n que verifica la identidad $M^2 - 2M = 3I$, donde I denota la matriz identidad de orden n. Se pide:

1. (1 punto) Estudiar si existe la matriz inversa de M. En caso afirmativo, expresar M^{-1} en términos de M e I.
2. (1 punto) Expresar M^3 como combinación lineal de M e I.
3. (1 punto) Hallar todas las matrices de la forma $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ que verifican la identidad del enunciado.

Solución:

1.

$$M^2 - 2M = 3I \Longrightarrow (M-2)M = 3I \Longrightarrow \frac{1}{3}(M-2)M = I \Longrightarrow$$

$$M^{-1} = \frac{1}{3}(M-2)$$

2.

$$M^2 = 2M + 3I \Longrightarrow M^3 = (2M+3I)M =$$

$$2M^2 + 3M = 2M^2 + 3M = 2(2M+3I) + 3M = 7M + 6I$$

3.

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

$$3I + 2M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3+2a & 2b \\ 2b & 3+2a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2a & 2b \\ 2b & 3+2a \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a^2+b^2=3+2a \\ 2ab=2b \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a=1, \;\; b=\pm 2 \\ b=0, \;\; a=\pm 1 \\ b=0, \;\; a=3 \end{array} \right.$$

Las matrices serían:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 4.1.4 *(3 puntos)* Se consideran el plano π y la recta r siguientes:

$$\pi : x+y-2z=6; \quad r : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$$

Se pide:

1. (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1,1,1)$ respecto del plano π.
2. (1,5 punto) Hallar el punto simétrico de $M(1,1,1)$ respecto de la recta r.

Solución:

1. Calculamos una recta perpendicular a π que pase por el punto $M(1,1,1)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=1-2\lambda \end{array} \right.$$

Calculamos el punto de corte de esta recta con el plano π:

$$(1+\lambda+(1+\lambda)-2(1-2\lambda)=6 \Longrightarrow \lambda=1$$

$$M'(2,2,-1)$$

Este punto es el punto medio entre M y el simétrico M'':

$$M' = \frac{M''+M}{2} \Longrightarrow M'' = 2M'-M = (4,4,-2)-(1,1,1) = (3,3,-3)$$

2. Calculamos un plano perpendicular a π que contenga al punto M:

$$2x+3y-z+\lambda=0 \Longrightarrow 2+3-1+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-4$$

$$2x + 3y - z - 4 = 0$$

Calculamos el punto de corte de este plano y la recta, para ello ponemos la ecuación paramétrica de la recta

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

$$2(1 + 2\lambda) + 3(3\lambda) - (-1 - \lambda) - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{14}$$

$$M'\left(\frac{8}{7}, \frac{3}{14}, -\frac{15}{14}\right)$$

Este punto es el punto medio entre M y el simétrico M'':

$$M' = \frac{M'' + M}{2} \Longrightarrow M'' = 2M' - M = 2\left(\frac{8}{7}, \frac{3}{14}, -\frac{15}{14}\right) - (1, 1, 1) =$$

$$\left(\frac{9}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{22}{7}\right)$$

4.2. Modelo 2003 - Opción B

Problema 4.2.1 *(3 puntos)*Hallar todas las matrices X tales que $XA = AX$, siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & a + b \\ c & c + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = a + c \Longrightarrow c = 0 \\ c + d = d \Longrightarrow c = 0 \\ a + b = b + d \Longrightarrow a = d \end{cases}$$

La matriz buscada es de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 4.2.2 *(2 puntos)*Para cada valor del parámetro real k, se considera el sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y= & 3 \\ 2x- & 3y= & 2k \\ 3x- & 5y= & k^2 \end{array}\right.$$

Se pide:

1. (1 punto) Discutir el sistema según los valores de k.
2. (1 punto) Resolver el sistema en los casos en que sea compatible.

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 2k \\ 3 & -5 & k^2 \end{array}\right), \quad \left|\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{array}\right| = -1 \Longrightarrow \text{Rango}(A)=2$$

$$|\overline{A}| = -k^2+4k-3=0 \Longrightarrow k=1, \;\; k=3$$

Si $k=1$ o $k=3 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A})=2=$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k\neq 1$ y $k\neq 3 \Longrightarrow$Rango$(A)\neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

2. Si $k=1$:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y= & 3 \\ 2x- & 3y= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7 \\ y=4 \end{array}\right.$$

Si $k=2$:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & y= & 3 \\ 2x- & 3y= & 6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=3 \\ y=0 \end{array}\right.$$

Problema 4.2.3 *(3 puntos)* Se consideran los puntos:

$$A(1,1,1), \;\; B(0,-2,2) \;\; C(-1,0,2) \;\; D(2,-1,-2).$$

Se pide:

1. (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.
2. (1 punto) Calcular la distancia del punto D al plano determinado por los puntos A, B y C.
3. (1 punto) Hallar unas ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano determinado por los puntos A, B y C.

Solución:

1.

$$\overrightarrow{AB}=(-1,-3,1)\quad \overrightarrow{AC}=(-2,-1,1)\quad \overrightarrow{AD}=(1,-2,-3)$$

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}=\frac{5}{2}\,u^3$$

2.

$$\pi:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(-1,-3,1)\\ \overrightarrow{AC}=(-2,-1,1)\\ A(1,1,1) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi:\begin{vmatrix} -1 & -2 & x-1\\ -3 & -1 & y-1\\ 1 & 1 & z-1 \end{vmatrix}=0\Longrightarrow$$

$$2x+y+5z-8=0$$

$$d(D,\pi)=\frac{|4-1-10-8|}{\sqrt{4+1+25}}=\frac{15}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{2}\;u$$

3.

$$r=\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(2,1,5)\\ D(2,-1,-2) \end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} x=2+2\lambda\\ y=-1+\lambda\\ z=-2+5\lambda \end{array}\right.$$

Problema 4.2.4 *(3 puntos)* Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x)=\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$$

1. (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
2. (0,5 puntos) Hallar los puntos donde la gráfica de f tiene tangente vertical.
3. (0,5 puntos) Representar gráficamente la función.
4. (1 punto) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas $x=-1$, $x=1$.

   Nota: Para obtener las asíntotas puede ser de utilidad la igualdad:

   $$A-B=\frac{A^3-B^3}{A^2+AB+B^2}$$

Solución:

1. Monotonía:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{x^2(x+1)^2}}\right) = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	creciente	decreciente

La función es creciente en $(-\infty, -1/2)$ y decreciente en $(-1/2, \infty)$. Luego en el punto $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt[3]{4}\right)$ tenemos un Máximo.

Asíntotas:

- Verticales: No hay
- Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) = [\infty - \infty] = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x+1-x}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2}} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2(x+1)^2} + \sqrt[3]{x^2}} = 0$$

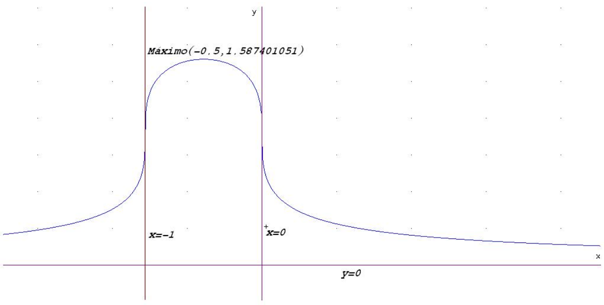
  Luego $y = 0$ es una asíntota horizontal.

- Oblicuas: No hay

2.

$$f'(a) = \infty \Longrightarrow \sqrt[3]{a^2(a+1)^2} = 0 \Longrightarrow a = 0, \ \ a = -1$$

3. Representación gráfica



4.

$$\int_{-1}^{1}(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})\,dx = \frac{3\sqrt[3]{(x+1)^4}}{4} - \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4}\Bigg]_{-1}^{1} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\ u^2$$

4.3. Junio 2003 - Opción A

Problema 4.3.1 *(2 puntos)* Calcular los siguientes límites (donde "ln" significa logaritmo neperiano).

1. (1 punto) $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

2. (1 punto) $\lim_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}$

Solución:

1. (1 punto)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\dfrac{-3\sin(3x)}{\cos(3x)}}{\dfrac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)}}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-3\sin(3x)\cos(2x)}{-2\sin(2x)\cos(3x)}$$

$$=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{3}{2}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{3\cos(3x)\cos(2x)-2\sin(3x)\sin(2x)}{2\cos(2x)\cos(3x)-3\sin(2x)\sin(3x)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

2. (1 punto)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{4x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}$$

$$=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{4+x-(4-x)}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2x}{4x(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x})}=\frac{1}{8}$$

Problema 4.3.2 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x)=\frac{x^5-x^8}{1-x^6}$$

1. (1 punto) Encontrar los puntos de discontinuidad de f. Determinar razonadamente si alguna de las discontinuidades es evitable.

2. (1 punto) Estudiar sin f tiene alguna asíntota vertical.

Solución:

1. Los puntos en los que f es discontinua es en aquellos en los que se anula el denominador, es decir, $1 - x^6 = 0 \Longrightarrow x = 1,\ x = -1$. Para ver el tipo de discontinuidad calculamos el límite en estos puntos

$$\lim_{x\longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{5x^4 - 8x^7}{-6x^5} = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x^4(5 - 8x^3)}{-6x^5} =$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{5 - 8x^3}{-6x} = \frac{1}{2}$$

Luego la discontinuidad que hay en $x = 1$ es evitable.

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{x^5 - x^8}{1 - x^6} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$

Luego la discontinuidad que hay en $x = -1$ no es evitable.

2. Por lo visto en el apartado anterior $x = -1$ es una asíntota vertical.

Problema 4.3.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} (m+2)x+ & (m-1)y- & z = 3 \\ mx- & y+ & z = 2 \\ x+ & my- & z = 1 \end{array}\right.$$

1. (1 punto) Resolverlo para $m = 1$.

2. (2 puntos) Discutirlo para los distintos valores de m.

Solución:

1. Para $m = 1$ el sistema queda de la siguiente manera

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & & z = 3 \\ x- & y+ & z = 2 \\ x+ & y- & z = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 1 \\ z = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

2.

$$\left\{\begin{array}{rrr} (m+2)x+ & (m-1)y- & z=3 \\ mx- & y+ & z=2 \\ x+ & my- & z=1 \end{array}\right.$$

$$A=\left(\begin{array}{ccr} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{ccrr} m+2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$|A|=\left|\begin{array}{ccr} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{array}\right|=-m(m+1)$$

$$-m(m+1)=0\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} m=0 \\ m=-1 \end{array}\right.$$

- Cuando $m\neq 0$ y $m\neq -1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$A=$Rango$\overline{A}=3=$n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.

- Cuando $m=0\Longrightarrow |A|=0$, y como el menor $\left|\begin{array}{cr} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{array}\right|=-2\neq 0$ tenemos que Rango$(A)=2$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{crrr} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

El menor $\left|\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right|=-1\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})=3$

En conclusión, cuando $m=0\Longrightarrow$ Rango$(A)=2\neq$Rango$(\overline{A})=3$, luego en este caso el sistema es incompatible.

- Cuando $m=-1\Longrightarrow |A|=0$, y como el menor $\left|\begin{array}{rr} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{array}\right|=-3\neq 0$ tenemos que Rango$(A)=2$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrrr} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

El menor $\left|\begin{array}{rrr} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right|=1\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})=3$

En conclusión, cuando $m=-1\Longrightarrow$ Rango$(A)=2\neq$Rango$(\overline{A})=3$, luego en este caso también el sistema es incompatible.

Problema 4.3.4 *(3 puntos)* Dadas las rectas en el espacio:

$$r : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$$

$$s : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

1. (1,5 punto) Hallar la distancia entre las dos rectas.

2. (1,5 puntos) Determinar las ecuaciones de la perpendicular común a r y s.

Solución:

1.

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3,-2,1) \\ P_r(2,1,0) \end{cases} \qquad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2,-1,2) \\ P_s(-1,-2,1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3i - 4j + k = (-3,-4,1)$$

$$|\overrightarrow{u}| = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (-1,-2,1) - (2,1,0) = (-3,-3,1)$$

$$\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right] = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 22$$

Luego la distancia entre las dos rectas será:

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{22}{\sqrt{26}}$$

2.

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3,-2,1) \\ \overrightarrow{u} = (-3,-4,1) \\ P_r(2,1,0) \end{cases} \qquad \pi_2 : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (2,-1,2) \\ \overrightarrow{u} = (-3,-4,1) \\ P_s(-1,-2,1) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 3 & -3 & x-2 \\ -2 & -4 & y-1 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x - 3y - 9z + 1 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 2 & -3 & x+1 \\ -1 & -4 & y+2 \\ 2 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 7x - 8y - 11z + 2 = 0$$

$$\begin{cases} x - 3y - 9z + 1 = 0 \\ 7x - 8y - 11z + 2 = 0 \end{cases}$$

4.4. Junio 2003 - Opción B

Problema 4.4.1 *(2 puntos)* Comprobar, aplicando las propiedades de los determinantes, la identidad:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & a+b-2a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ab-a^2 & b^2-a^2 \\ -a+b & 2b-2a \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a(b-a) & (b-a)(b+a) \\ b-a & 2(b-a) \end{vmatrix} = (b-a)^2 \begin{vmatrix} a & b+a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (a-b)^2(a-b) = (a-b)^3$$

Problema 4.4.2 *(2 puntos)* Encontrar un número real $\lambda \neq 0$, y todas las matrices B de dimensión 2×2 (distintas de la matriz nula), tales que

$$B \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda x + 3y = & 3x + 9y \\ y = & 3y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} (\lambda - 3)x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rl} \lambda z + 3h = & 3z + 9h \\ h = & 3h \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{r} (\lambda - 3)z = 0 \\ h = 0 \end{array} \right.$$

En conclusión, $\lambda = 3$ y x y z pueden ser cualquier valor que no cumpla $x = z = 0$.

$$B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 4.4.3 *(3 puntos)*

1. (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $g(x) = e^x - x$
2. (1 punto) Calcular el dominio de definición de $f(x) = \dfrac{1}{e^x - x}$ y su comportamiento para $x \longrightarrow \infty$ y $x \longrightarrow -\infty$.

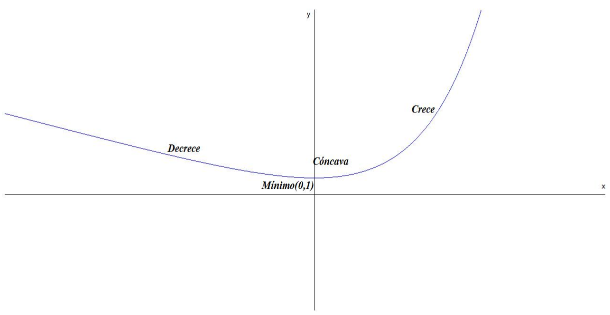
3. (1 punto) Determinar (si existen) los máximos y mínimos absolutos de $f(x)$ en su dominio de definición.

Solución:

1. El dominio de $g(x) = e^x - x$ es todo R, calculamos los máximos y mínimos de esta función
$$g'(x) = e^x - 1 = 0 \Longrightarrow e^x = 1 \Longrightarrow x = 0$$
$$g''(x) = e^x \Longrightarrow g''(0) = 1 > 0$$
Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0, 1)$ es un mínimo.

   Observando la segunda derivada, nos damos cuenta que $g''(x) = e^x > 0,\ \forall x \in R \Longrightarrow$ la función es siempre cóncava hacia arriba $\bigcup$.

   Su gráfica sería:



2. $$f(x) = \frac{1}{e^x - x}$$
Como el denominador de esta función no se anula nunca tenemos que el dominio de $f(x)$ es todo R.

   Por otra parte, si calculamos los límites
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{e^{-x} + x} = 0$$
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{e^x - x} = 0$$
Se pueden valorar estos límites dándonos cuenta de que se puede despreciar e^x frente x cuando $x \longrightarrow -\infty$. Y por el contrario, se puede despreciar x frente a e^x cuando $x \longrightarrow \infty$.

   En conclusión, la recta $y = 0$ (el eje de abcisas) es una asíntota horizontal.

3. $$f'(x) = \frac{1-e^x}{(e^x-x)^3} = 0 \Longrightarrow 1-e^x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

$$f''(x) = \frac{e^{2x} + e^x(x-4) + 2}{(e^x-x)^3} \Longrightarrow f''(0) = -1 < 0$$

Por el criterio de la segunda derivada tenemos que el punto $(0,1)$ es un máximo.

Problema 4.4.4 *(3 puntos)* Dados el plano

$$\pi : x + 3y - z = 1$$

y la recta

$$s : \frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

1. (1,5 punto) Hallar la ecuación general del plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.
2. (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π, π'.

Solución:

1. Datos:

$$\pi : \overrightarrow{u_\pi} = (1,3,-1) \quad r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (6,2,1) \\ P_r(-2,1,0) \end{array} \right.$$

$$\pi' : \left| \begin{array}{rrc} 1 & 6 & x+2 \\ 3 & 2 & y-1 \\ -1 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi' : 5x - 7y - 16z + 17 = 0$$

2. $$s : \left\{ \begin{array}{l} x + 3y - z - 1 = 0 \\ 5x - 7y - 16z + 17 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 3y = 1 + z \\ 5x - 7y = -17 + 16z \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -2 + \dfrac{5}{2} \cdot \lambda \\ \\ y = 1 - \dfrac{1}{2} \cdot \lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

4.5. Septiembre 2003 - Opción A

Problema 4.5.1 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(1,0,1)$ y $B(0,2,0)$, y el plano $\pi \equiv x - 2y - z - 7 = 0$, determinar el plano que es perpendicular al plano π y pasa por los puntos A y B.

Solución:

$\overrightarrow{u_\pi} = (1,-2,-1)$

$\overrightarrow{AB} = (-1,2,-1)$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ -2 & 2 & y-2 \\ -1 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x + y - 2 = 0$$

Problema 4.5.2 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-k}{1}$$

$$s: \left\{ \begin{array}{rrr} x- & y+ & z = 3 \\ 3x+ & & z = 1 \end{array} \right.$$

1. (1 punto) Hallar el valor de k para que las dos rectas estén contenidas en el mismo plano.
2. (1 puntos) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación general del plano que las contiene.

Solución:

1.
$$\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i + 2j + 3k = (-1,2,3)$$

   Si en la recta s hacemos $x = 0$ obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas con el resultado de $y = -2$ y $z = 1$, luego un punto de la recta sería $P_s(0,-2,1)$.

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,1) \\ P_r(1,-1,k) \end{array} \right. \quad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1,2,3) \\ P_s(0,-2,1) \end{array} \right.$$

   El plano π que buscamos contiene a las dos rectas:

$$\pi: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1,1,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (-1,2,3) \\ P_r(1,-1,k) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} -1 & -1 & x-1 \\ 1 & 2 & y+1 \\ 1 & 3 & z-k \end{vmatrix} = 0$$

$$-x-2y+z-1-k=0 \Longrightarrow x+2y-z+1+k=0$$

Como este plano contiene al punto $P_s(0,-2,1)$ sustituimos en el plano

$$0-4-1+1+k=0 \Longrightarrow k=4$$

2. El plano buscado es:

$$x+2y-z+5=0$$

Problema 4.5.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & 4y+ & 3z=9 \\ mx+ & 2y+ & z=5 \\ x+ & y+ & z=2 \end{array}\right.$$

1. (1,5 puntos) Determinar los valores de m para que el sistema dado tenga solución única.
2. (1,5 puntos) Resolverlo para $m=1$.

Solución:

1.

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & 4y+ & 3z=9 \\ mx+ & 2y+ & z=5 \\ x+ & y+ & z=2 \end{array}\right.$$

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 3 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{cccc} 3 & 4 & 3 & 9 \\ m & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 3 \\ m & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right|=-m+1=0 \Longrightarrow m=1$$

Si $m \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$A$ =Rango$\overline{A}=3=$n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego en este caso el sistema es compatible determinado.

2. Para $m=1$ el sistema queda de la siguiente manera

$$\left\{\begin{array}{rrr} 3x+ & 4y+ & 3z=9 \\ x+ & 2y+ & z=5 \\ x+ & y+ & z=2 \end{array}\right.$$

Tenemos

$$A=\left(\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \overline{A}=\left(\begin{array}{cccc} 3 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Rango$(A) = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Calculando todos los determinantes posibles que se pueden hacer de orden 3 en la matriz $\overline{A}$, comprobamos que se anulan todos ellos, y por tanto, Rango$\overline{A} = 2$.

En conclusión, si $m = 1$ Rango(A) =Rango$\overline{A}$ $= 2 <$n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego es este caso el sistema es compatible indeterminado.

Por el menor escogido anteriormente, podemos eliminar la primera ecuación y nos queda el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrl} x+ & 2y+ & z = 5 \\ x+ & y+ & z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lc} x = & -1 - t \\ y = & 3 \\ z = & t \end{array}\right.$$

Problema 4.5.4 *(3 puntos)* Sea la función

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$$

definida en el intervalo cerrado y acotado $[-2\pi, 2\pi]$. Se pide:

1. (1 punto) Calcular los puntos del intervalo dado donde f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos.
2. (1 punto) Dibujar la gráfica de la función f en el intervalo dado.
3. (1 punto) Calcular
$$\int_0^{\pi/3} f(x)\, dx$$

Solución:

1.

$$f'(x) = \frac{2\cos x - 1}{(2 - \cos x)^2} = 0 \Longrightarrow 2\cos x - 1 = 0 \Longrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Longrightarrow$$

Luego $x = \dfrac{\pi}{3}$, $x = \dfrac{5\pi}{3}$, $x = -\dfrac{\pi}{3}$ y $x = -\dfrac{5\pi}{3}$ son los únicos posibles extremos en el intervalo de definición.
Vamos a recurrir a la segunda derivada.

$$f''(x) = \frac{-2\sin x(1 + \cos x)}{(2 - \cos x)^3}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{9} < 0$$

$$f''\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}<0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Luego la función presenta dos máximo en los puntos $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(-\frac{5\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$f''\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}>0$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{9}>0$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Luego la función presenta dos mínimos en los puntos $\left(-\frac{\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(\frac{5\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

2. Para dibujar la gráfica voy a calcular los puntos de corte:

   Si $x=0$ tenemos que $f(0)=0\Longrightarrow(0,0)$

   Si $f(x)=0$ tenemos que

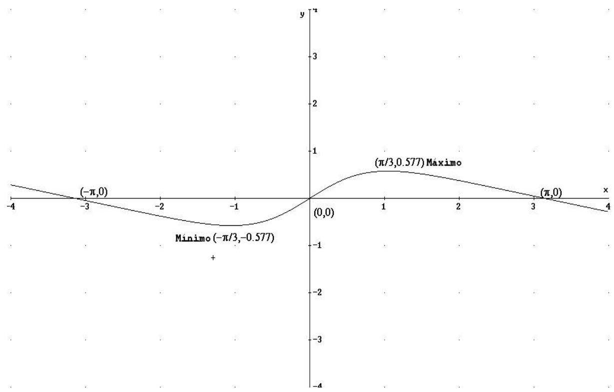
   $$\frac{\sin x}{2-\cos x}=0\Longrightarrow\sin x=0\Longrightarrow x=\pi,\ \ x=-\pi$$

   Luego tenemos los puntos $(\pi,0)$ y $(-\pi,0)$.

   Si tenemos en cuenta que la función es impar:

3. Para resolver la integral hacemos un cambio de variable

   $$t=2-\cos x\Longrightarrow\sin x\,dx=dt$$



$$\int f(x)dx = \int \frac{\sin x}{2-\cos x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + C = \ln|2-\cos x| + C$$

Luego la integral pedida valdrá:

$$\int_0^{\pi/3} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/3} \frac{\sin x}{2-\cos x}\,dx = \ln|2-\cos x|]_0^{\pi/3} = \ln\frac{3}{2}$$

Problema 4.5.5 *(3 puntos)* Dado el plano

$$\pi : x + y + z = 0$$

y la recta

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

se pide:

1. (1 punto) Calcular el punto Q en el que se cortan el plano π y la recta r.
2. (2 puntos) Encontrar un plano π', paralelo a π, tal que el punto Q' en el que se cortan el plano π' y la recta r esté a distancia 2 del punto Q hallado en el apartado anterior.

Solución:

1.

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,2) \\ P_r(1,0,-1) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{rr} x = & 1+t \\ y = & 2t \\ z = & -1+2t \end{array} \right.$$

$$1 + t + 2t - 1 + 2t = 0 \Longrightarrow t = 0 \Longrightarrow Q(1,0,-1)$$

2. Calculamos una esfera de centro Q y radio 2: $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2 = 4$; esta esfera corta a la recta r en dos puntos Q' y Q'':

$$t^2 + 4t^2 + 4t^2 = 4 \Longrightarrow t = \pm\frac{2}{3}$$

Si $t = \dfrac{2}{3} \Longrightarrow Q'\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{4}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$, y un plano que sea paralelo a π y contenga a este punto será π':

$$\frac{5}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{8}{3}$$

$$\pi' : x + y + z - \frac{8}{3} = 0$$

Si $t = -\dfrac{2}{3} \Longrightarrow Q''\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{4}{3}, -\dfrac{7}{3}\right)$, y un plano que sea paralelo a π y contenga a este punto será π'':

$$\frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \frac{7}{3} + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{10}{3}$$

$$\pi' : x + y + z - \frac{10}{3} = 0$$

4.6. Septiembre 2003 - Opción B

Problema 4.6.1 *(2 puntos)* Un mayorista del sector turístico vende a la agencia de viajes A, 10 billetes a destinos nacionales, 10 billetes a destinos extranjeros europeos comunitarios, y 10 billetes a destinos internacionales no comunitarios, cobrando por todo ello 12.000 euros. A una segunda agencia B le vende 10 billetes a destinos nacionales y 20 a destinos internacionales no comunitarios, y cobra 13.000 euros. A una tercera agencia C le vende 10 billetes a destinos nacionales y 10 a destinos extranjeros europeos comunitarios, cobrando 7.000 euros. Se pide:

1. (1,5 puntos) Hallar el precio de cada billete.
2. (0,5 puntos) Por razones de mercado, el mayorista se ve obligado a bajar un 20 por ciento el precio de todos los billetes nacionales. Hallar en qué porcentaje debe incrementar el precio de todos los billetes extranjeros europeos comunitarios (suponiendo que mantiene constante el precio de todos los billetes internacionales no comunitarios) para mantener constantes sus ingresos totales por las ventas a las tres agencias.

Solución:

1. $x =$ precio de un billete con destino nacional.

   $y =$ precio de un billete con europeo comunitario.

$z=$ precio de un billete con internacional no comunitario.

$$\left\{\begin{array}{rrrrr}10x+ & 10y & +10z= & 12000\\ 10x+ & & 20z= & 13000\\ 10x+ & 10y & = & 7000\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrr}x+ & y+ & z= & 1200\\ x+ & & 2z= & 1300\\ x+ & y & = & 700\end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=300\\ y=400\\ z=500\end{array}\right.$$

2. Si el precio de los billetes nacionales bajan un 20 por ciento costarían $0,8\cdot x=240$ euros, por lo que hay que subir el precio de los billetes europeos comunitarios en $300-240=60$ euros, lo que significa que el nuevo precio sería de $400+60=460$ euros, lo que supone una subida de estos billetes del 15 por ciento. $(400(1+t)=460\Longrightarrow t=0,15)$

Problema 4.6.2 *(2 puntos)*

1. Sean A y B dos matrices invertibles que verifican la identidad $A+B=AB$. Comprobar que entonces se tiene la fórmula:

$$(I-B)^{-1}=-B^{-1}A$$

(Donde I denota la matriz identidad).

2. Dada la matriz

$$A=\left(\begin{array}{rr}-1 & 1\\ 2 & -1\end{array}\right),$$

hallar la matriz B para la cual se verifica $A+B=AB$.

Solución:

1. $A+B=AB\Longrightarrow A+B-AB=0\Longrightarrow A-AB=-B\Longrightarrow$

$A(I-B)=-B\Longrightarrow -A(I-B)(I-B)^{-1}=B(I-B)^{-1}\Longrightarrow$

$B(I-B)^{-1}=-A\Longrightarrow B^{-1}B(I-B)^{-1}=-B^{-1}A\Longrightarrow$

$(I-B)^{-1}=-B^{-1}A$

2. LLamamos $B=\left(\begin{array}{cc}x & y\\ z & h\end{array}\right)$, y tendremos:

$$\left(\begin{array}{rr}-1 & 1\\ 2 & -1\end{array}\right)+\left(\begin{array}{cc}x & y\\ z & h\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}-x+z & -y+h\\ 2x-z & 2y-h\end{array}\right)$$

Tenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} x-1=-x+z\\ 2+z=2x-z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0\\ z=-1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} y+1=-y+h\\ -1+h=2y-h \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} h=0\\ y=-1/2 \end{array}\right.$$

Luego

$$B=\left(\begin{array}{rr} 0 & -1/2\\ -1 & 0 \end{array}\right)$$

Problema 4.6.3 *(3 puntos)*Sea la función $f(x)=2x|4-x|$.

1. Estudiar su continuidad y su derivabilidad.
2. Dibujar su gráfica.
3. Calcular el área del recinto acotado por la gráfica $y=f(x)$, las rectas $x=0$, $x=5$, y el eje OX.

Solución:

1.

$$f(x)=\left\{\begin{array}{rl} 2x(4-x) & \text{si} \quad 4-x\geq 0\\ -2x(4-x) & \text{si} \quad 4-x<0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$f(x)=\left\{\begin{array}{rl} 2x(4-x) & \text{si} \quad x\leq 4\\ -2x(4-x) & \text{si} \quad x>4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\longrightarrow 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 4}(-2x(4-x))=0\\ \lim\limits_{x\longrightarrow 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 4}(2x(4-x))=0\\ f(4)=0 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 4^+} f(x)=\lim_{x\longrightarrow 4^-} f(x)=f(4)$$

Luego la función es continua en $x=4$, y por tanto, en todo R.

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{rl} 8-4x & \text{si} \quad x\leq 4\\ -8+4x & \text{si} \quad x>4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f'(4^-)=-8\\ f'(4^+)=8 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$f'(4^-)\neq f'(4^+)$$

Luego la función no es derivable en $x=4$, pero si es derivable en $R-\{4\}$.

2. Para dibujar el recinto estudiamos la gráfica de cada rama por separado:

   $f(x) = 8x - 2x^2$ si $x \in (-\infty, 4]$

   $f'(x) = 8 - 4x = 0 \Longrightarrow x = 2$

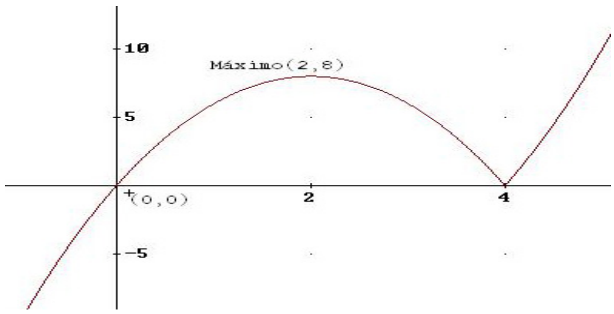
   $f''(2) = -4 \Longrightarrow (2, 8)$ es un máximo.

   Si hacemos $f(x) = 0 \Longrightarrow (0, 0)$ y $(4, 0)$, como puntos de corte.

   $f(x) = -8x + 2x^2$ si $x \in (4, +\infty)$

   $f'(x) = -8 + 4x = 0 \Longrightarrow x = 2$, que no está en el intervalo $(4, +\infty)$.

   En este intevalo la función es siempre creciente, es decir, $f'(x) > 0$ cuando $x \in (4, +\infty)$.
   Con estos datos estamos en condiciones de dibujar la gráfica:



3. A la vista de la gráfica podemos entender fácilmente de que recinto se trata.

$$\text{Área} = \int_0^4 2x(4-x)dx + \int_4^5 (-2x(4-x))dx =$$

$$= \int_0^4 (8x - 2x^2)dx + \int_4^5 (-8x + 2x^2)dx = 26\, u^2$$

Capítulo 5

Año 2004

5.1. Modelo 2004 - Opción A

Problema 5.1.1 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Calcular el límite de la sucesión cuyo término general es $\left(\dfrac{3n-1}{3n}\right)^{2n}$.

2. (1 punto) Sean las funciones $F(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{5+e^{t^4}}\, dt$, $g(x) = x^2$. Calcular $(F(g(x)))'$.

Solución:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow\infty} 2n\left(\frac{3n-1}{3n}-1\right) = \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2n}{3n} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{3n-1}{3n}\right)^{2n} = e^{-2/3}$$

2.

$$F'(x) = \sqrt{5+e^{x^4}}, \quad g'(x) = 2x$$

Por la regla de la cadena:

$$(F(g(x)))' = F'(g(x))\cdot g'(x) = 2x\sqrt{5+e^{x^8}}$$

Problema 5.1.2 *(2 puntos)* Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x^2 - x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \\ a & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1. (1 punto) Determinar su dominio, y calcular los límites laterales cuando $x \longrightarrow 1$.
2. (1 punto) Estudiar su continuidad, y hallar el valor de a para el que f es continua en $x = 0$.

Solución:

1.

$$x^2 - x = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = 1 \Longrightarrow \text{Dom}(f) = R - \{1\} \ \text{ en } x = 0 \ f(0) = a$$

Los límites laterales pedidos son:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = -\infty$$

2. En $x = 1$ hay una discontinuidad inevitable por el apartado anterior.

En $x = 0$:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2 - x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{e^x}{2x - 1} = -1$$

Para que f sea continua en ese punto $a = -1$.

Problema 5.1.3 *(3 puntos)* Discutir según los valores del parámetro λ, y resolver en los casos que sea posible el sistema:

$$\begin{cases} 6x + & 4y + & 2\lambda z = & 2 \\ \lambda x + & y - & z = & 2 \\ 5x + & 3y + & 3z = & 2\lambda \end{cases}$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 2\lambda & 2 \\ \lambda & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 2\lambda \end{array} \right), \quad |A| = 2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1, \ \ \lambda = 8/3$$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^\text{o}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $\lambda = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 6 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego el sistema es incompatible.

Si $\lambda = 8/3$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 16/3 & 2 \\ 8/3 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 16/3 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8/3 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{14}{3} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 16/3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 16/3 \end{vmatrix} = -\frac{268}{9} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego el sistema es incompatible.

Sólo es compatible en los casos $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 3$, resolvemos por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2\lambda \\ 2 & 1 & -1 \\ 2\lambda & 3 & 3 \end{vmatrix}}{2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8)} = -\frac{2(\lambda^2 - \lambda + 3)}{3\lambda^2 - 11\lambda + 8}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 2\lambda \\ \lambda & 2 & -1 \\ 5 & 2\lambda & 3 \end{vmatrix}}{2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8)} = \frac{2\lambda^3 - 7\lambda + 13}{3\lambda^2 - 11\lambda + 8}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2\lambda \end{vmatrix}}{2(3\lambda^2 - 11\lambda + 8)} = -\frac{4\lambda^2 - 9\lambda + 3}{3\lambda^2 - 11\lambda + 8}$$

Problema 5.1.4 *(3 puntos)* Dado el plano:

$$\pi : x + y + az + 1 = 0$$

y las rectas

$$r : \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{array}\right. \quad r' : \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2t \\ z = t \end{array}\right. \quad r'' : \left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 3t \\ z = t \end{array}\right.$$

Se pide:

1. Calcular el valor de a para que los puntos de corte del plano π con las rectas r, r' y r'' estén alineados (1,5 puntos).
2. Calcula las ecuaciones de la recta que pasa por esos tres puntos (0,75 puntos).
3. Calcula la distancia de dicha recta al origen (0,75 puntos).

Solución:

1. Sea A el punto de corte de r con π:

$$1 + t + at + 1 = 0 \Longrightarrow t = -\frac{2}{a+1} \Longrightarrow A\left(1, -\frac{2}{a+1}, -\frac{2}{a+1}\right)$$

Sea A' el punto de corte de r' con π:

$$2 + 2t + at + 1 = 0 \Longrightarrow t = -\frac{2}{a+2} \Longrightarrow A'\left(2, -\frac{6}{a+2}, -\frac{3}{a+2}\right)$$

Sea A'' el punto de corte de r'' con π:

$$3 + 3t + at + 1 = 0 \Longrightarrow t = -\frac{4}{a+3} \Longrightarrow A''\left(3, -\frac{12}{a+3}, -\frac{4}{a+3}\right)$$

$$\overrightarrow{AA'} = \left(1, -\frac{4a+2}{(a+1)(a+2)}, -\frac{a-1}{(a+1)(a+2)}\right)$$

$$\overrightarrow{A'A''} = \left(1, -\frac{6a+6}{(a+3)(a+2)}, -\frac{a-1}{(a+3)(a+2)}\right)$$

Para que estén alineados los tres puntos:

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A'A''} \Longrightarrow \frac{4a+2}{(a+1)(a+2)} = \frac{6a+6}{(a+3)(a+2)} \Longrightarrow a = 0 \quad a = 1$$

Si $a = 0$:

$$\overrightarrow{AA'} = (1, -1, 1/2) \neq \overrightarrow{A'A''} = (1, -1, -1/6)$$

Esta solución no vale.

$a = 1$:

$$\overrightarrow{AA'} = (1, -1, 0) = \overrightarrow{A'A''}$$

Luego cuando $a = 1$ los tres puntos están alineados.

2. La recta h que une estos puntos:

$$h : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_h} = (1, -1, 0) \\ A(1, -1, -1) \end{array} \right. \Longrightarrow h : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -1 \end{array} \right.$$

3.

$$d(O, h) = \frac{|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{u_h}|}{|\overrightarrow{u_h}|} = \frac{|(1, -1, -1) \times (1, -1, 0)|}{|(1, -1, 0)|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1\, u^2$$

5.2. Modelo 2004 - Opción B

Problema 5.2.1 *(2 puntos)* seconsideran las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x - y = 2 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} 2x - z + 2 = 0 \\ 2y - mz = 6 \end{array} \right.$$

1. Hallar el valor de m para que r y s sean paralelas.
2. Para el valor de m obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene las rectas r y s.

Solución:

1.

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = 3 + \frac{m}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 2) \\ P_r(0, -2, 1) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1/2, m/2, 1) \\ P_s(1, 3, 0) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (1, 5, -1)$$

$$\left| \begin{array}{rrr} 1/2 & m/2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \end{array} \right| = \frac{3}{2}(m - 1) = 0 \Longrightarrow m = 1$$

Cuando $m = 1$ los vectores directores de las rectas r y s coinciden, luego para este valor las rectas son paralelas.

2.

$$\pi : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (1, 1, 2) \\ \overrightarrow{v} = (1, 5, -1) \\ P(0, -2, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi : \left| \begin{array}{rrr} 1 & 1 & x \\ 1 & 5 & y + 2 \\ 2 & -1 & z - 1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 11x - 3y - 4z - 2 = 0$$

Problema 5.2.2 *(2 puntos)* Calcular las ecuaciones parámetricas de la recta que pasa por el punto $P(3,-1,0)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r:\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=4+\lambda \\ z=5+3\lambda \end{cases}$$

Solución:

$$r:\begin{cases} \overrightarrow{u_r}=(2,1,3) \\ P_r(3,4,5) \end{cases}$$

Un plano perpedicular a esta recta y que contenga al punto P será:

$$\pi: 2x+y+3z+\lambda=0 \Longrightarrow 6-1+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-5$$

$$\pi: 2x+y+3z-5=0$$

Este plano corta a la recta r en el punto P':

$$2(3+2\lambda)+4+\lambda+3(5+3\lambda)-5=0 \Longrightarrow \lambda=-\frac{10}{7}$$

$$P'\left(-\frac{1}{7},\frac{18}{7},\frac{5}{7}\right)$$

$$\overrightarrow{P'P}=(3,-1,0)-\left(-\frac{1}{7},\frac{18}{7},\frac{5}{7}\right)=\left(\frac{22}{7},-\frac{25}{7},-\frac{5}{7}\right)$$

$$s:\begin{cases} \overrightarrow{P'P}=\left(\frac{22}{7},-\frac{25}{7},-\frac{5}{7}\right) \\ P(3,-1,0) \end{cases} \Longrightarrow s:\begin{cases} x=3+\dfrac{22}{7}\lambda \\ y=-1-\dfrac{25}{7}\lambda \\ z=-\dfrac{5}{7}\lambda \end{cases}$$

Problema 5.2.3 *(3 puntos)* Se considera la función :

$$f(x)=\frac{1}{1+(\sin x)^2}$$

Se pide:

1. (1 punto) Calcular sus puntos críticos en el intervalo abierto $(-\pi,\pi)$.
2. (1 punto) Calcular los extremos relativos y/o absolutos de la función $f(x)$ en el intervalo cerrado $[-\pi,\pi]$.
3. (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto $(\pi/4, f(\pi/4)$.

Solución:

1. $1 + \sin^2 x \neq 0$ siempre $\Longrightarrow$ no hay puntos críticos.

   La función es par.

2. $$f'(x) = \frac{-2\sin x \cos x}{(1 + (\sin^2 x))^2} = 0 \Longrightarrow -2\sin x \cos x = 0$$

   $$-2\sin x \cos x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Longrightarrow x = 0, \ \ x = -\pi, \ \ x = \pi \\ \cos x = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \quad x = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

	$(-\pi, -\frac{\pi}{2})$	$(-\frac{\pi}{2}, 0)$	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente	creciente

   En los puntos de abcisa $x = 0$, $x = -\pi$ y $x = \pi$ la función presenta un Máximo.

   En el puntos de abcisa $x = -\dfrac{\pi}{2}$ y en el punto de abcisa $x = \dfrac{\pi}{2}$ la función presenta un Mínimo.

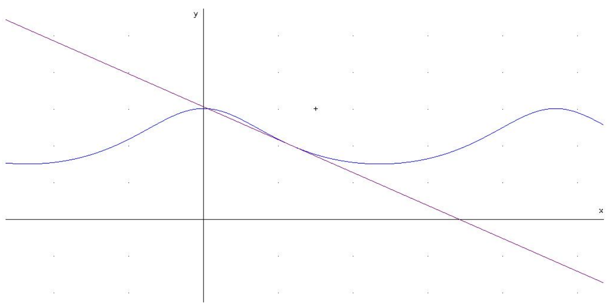
3. $$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{3}$$

   $$m = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{9}$$

   La ecuación de la recta tangente

   $$y - \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

4. Representación gráfica



Problema 5.2.4 *(3 puntos)*Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & az = & 4 \\ x+ & ay+ & z = & 2 \\ x+ & 4y- & 5z = & 6 \end{array}\right.$$

Se pide:

1. (2 punto) Discutir el sistema según los diferentes valores del parámetro a.
2. (1 punto) Resolver el sistema en el caso de que tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -a & 4 \\ 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array}\right), \quad |A| = a^2 - 9a + 14 = 0 \Longrightarrow a = 2, \ \ a = 7$$

Si $a \neq 1$ o $a \neq 3 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $a = 7$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -7 & 4 \\ 1 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 7 \end{array}\right| = 4 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{array}\right| = 10 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2$$

Como $\text{Rango}(\overline{A}) \neq \text{Rango}(A)\text{Rango}(A) \Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $a = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = -1 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$|A_1| = |A| = 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_4| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Luego Rango$(\overline{A}) = 2 =$Rango$(A) <$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado, es decir, admite infinitas soluciones.

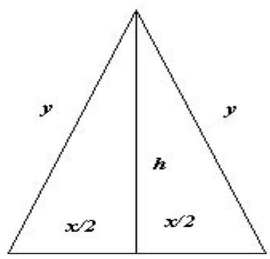
2. Por el menor elegido cuando $a = 2$ para discutir el Rango(A) podemos decidir que la tercera ecuación es combinación lineal de las dos primeras, por tanto, el sistema a resolver es:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & 3y- & 2z = & 4 \\ x+ & 2y+ & z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -2 - 7\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

5.3. Junio 2004 - Opción A

Problema 5.3.1 *(2 puntos)* Calcular la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

Solución:



$$S = \frac{x \cdot h}{2}; \quad x + 2y = 8; \quad h = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}$$

$$S(x) = \frac{x\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}}}{2} = x\sqrt{4 - x}$$

$$S'(x) = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}} = 0 \Longrightarrow x = \frac{8}{3}$$

$$S''(x) = \frac{-88+21x}{16(4-x)\sqrt{4-x}}; \quad S''\left(\frac{8}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} < 0$$

Luego se trata de un máximo. Si $x = \frac{8}{3} \Longrightarrow y = \frac{8}{3}$ y, por tanto se trata de un triángulo equilátero. Su altura será: $h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Problema 5.3.2 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$$

1. (1 punto) Calcular las asíntotas, el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x)$.

2. (1 punto) Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$

Solución:

1. *a*) **Asíntotas:**
   - **Verticales:** No hay (el denominador no se anula nunca)
   - **Horizontales:**

   $$\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} = 1 \Longrightarrow y = 1$$

   - **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.

   b) Extremos:

   $$f'(x) = \frac{4(2x-1)(2x+1)}{(4x^2+1)^2} \Longrightarrow x = \frac{1}{2}, \quad x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty,-1/2)$	$(-1/2,1/2)$	$(1/2,+\infty)$
$x+1/2$	$-$	$+$	$+$
$x-1/2$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	crece	decrece	crece

   Luego en el punto $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ la función tiene un máximo y, por el contrario, en el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ la función tiene un mínimo.

2.

$$\int \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx = \int \frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\,dx =$$

$$= \int \left(1-\frac{4x}{4x^2+1}\right)dx = x-\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)+C$$

$$\int_0^1 \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}\,dx = x-\frac{1}{2}\ln(4x^2+1)\Big]_0^1 = 1-\frac{1}{2}\ln 5$$

Problema 5.3.3 *(3 puntos)* Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrr} (1-a)x- & 2y+ & 4z=0\\ x- & (1+a)y+ & z=0\\ -x+ & ay- & z=0 \end{array}\right.$$

1. (1,5 punto) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro a.

2. (1,5 puntos) Resolver el sistema anterior cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

1. Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1-a & -2 & 4\\ 1 & -(1+a) & 1\\ -1 & a & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = -a-3=0 \Longrightarrow a=-3$$

Si $a\neq -3 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)=3$ y como el sistema es homogeneo resultaría que es compatible determinado. la solución en este caso sería $x=y=z=0$.

Si $a=-3$ tenemos

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix},\quad \begin{vmatrix} 4 & -2\\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8+2=10\neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A)=2$ y como el sistema es homogeneo podemos concluir, en este caso que, el sistema es compatible indeterminado.

2. Resolvemos este último caso. Por el menor que hemos escogido podemos despreciar la tercera ecuación.

$$\left\{\begin{array}{rrr} 4x- & 2y+ & 4z=0\\ x+ & 2y+ & z=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrr} 4x- & 2y= & -4z\\ x+ & 2y= & -z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\lambda\\ y=0\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 5.3.4 *(3 puntos)* Se consideran la recta y los planos siguientes:

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=2-3\lambda\\ y=1+2\lambda\\ z=4-\lambda \end{array}\right. ;\quad \pi_1: 2-3x+2y-z=0;\quad \pi_2: 3+2x+2y-2z=0$$

1. (1 punto) Determinar la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.

2. (1 punto) Determinar la posición relativa de los dos planos.

3. (1 punto) Calcular la distancia de r a π_2.

Solución:

1.

$$r: \frac{x-2}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x-4=-3y+3\\ -x+2=-3z+12 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-7=0\\ x-3z+10=0 \end{array}\right.$$

Primero estudiamos la posición de esta recta con respecto a $\pi_1: 3x-2y+z-2=0$, y tenemos:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & -3\\ 3 & -2 & 1 \end{array}\right);\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 0 & -7\\ 1 & 0 & -3 & 10\\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $|A|=-4 \Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ La recta corta al plano π_1.

Ahora estudiamos la posición de esta recta con respecto a $\pi_2: 2x+2y-2z+3=0$, y tenemos:

$$A=\left(\begin{array}{rrr} 2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & -3\\ 2 & 2 & -2 \end{array}\right);\quad \overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 0 & -7\\ 1 & 0 & -3 & 10\\ 2 & 2 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $|A| = 0$ y como $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$.

Por otra parte tenemos que

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -7 \\ 0 & -3 & 10 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 36 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3.$$

Luego la recta es paralela al plano.

2. $-\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{2}{2} \Longrightarrow \pi_1$ y π_2 se cortan.

3. Un punto de r es $P_r(2, 1, 4)$ y tendremos:

$$d(P_r, \pi_2) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 4 + 3|}{\sqrt{4+4+4}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

5.4. Junio 2004 - Opción B

Problema 5.4.1 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. (1 punto) Hallar A^{-1}.

2. (1 punto) Hallar la matriz X, tal que:

$$A \cdot X \cdot A^T = B$$

(donde A^T significa la matriz traspuesta de A).

Solución:

1.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

2.

$$AXA^T = B \Longrightarrow A^{-1}AXA^T(A^T)^{-1} = A^{-1}B(A^T)^{-1} \Longrightarrow X = A^{-1}B(A^T)^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema 5.4.2 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Dado el sistema $\left\{\begin{array}{rr} x+ & 2y=1 \\ 3x- & y=2 \end{array}\right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $ax+by=c$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas resultante siga siendo compatible.

2. (1 punto) Dado el sistema $\left\{\begin{array}{rrr} 2x+ & 2y- & z=1 \\ x+ & y+ & 2z=1 \end{array}\right.$, escribir una tercera ecuación de la forma $\alpha x+\beta y+\gamma z=1$ (distinta de las anteriores) de manera que el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas resultante siga siendo compatible indeterminado.

Solución:

1. La tercera ecuación debe de ser una combinación lineal de las anteriores, ya que en caso contrario el sistema resultaría incompatible. La suma de las dos puede ser una solución:

$$4x+y=3$$

2. La tercera ecuación tiene que ser una combinación lineal de las dos anteriores, pues en caso contrario, el sistema resultaría compatible determinado o incompatible. Como el término independiente tiene que ser 1, podemos multiplicar la primera por 2 y le restamos la segunda:

$$3x+3y-4z=1$$

Problema 5.4.3 *(3 puntos).*

1. (2 puntos) Determinar la posición relativa de los siguientes planos, para los distintos valores del parámetro k:

$$\begin{array}{lrrrr} \pi_1: & 2x+ & 3y+ & kz= & 3 \\ \pi_2: & x+ & ky- & z= & -1 \\ \pi_3: & 3x+ & y- & 3z= & -k \end{array}$$

2. (1 punto) En los casos en que los tres planos anteriores se corten a lo largo de una recta común, hallar un vector director de dicha recta.

Solución:

1. Sea la matriz

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & k & 3\\ 1 & k & -1 & -1\\ 3 & 1 & -3 & -k \end{array}\right)\Longrightarrow |A|=-3k^2-5k+2=0\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} k=\dfrac{1}{3}\\ \\ k=-2 \end{array}\right.$$

Si $k\neq \dfrac{1}{3}$ y $k\neq -2\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=3=$Rango$(\overline{A})\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado$\Longrightarrow$ Los tres planos se cortan en un punto.

Si $k=\dfrac{1}{3}$ tenemos

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1/3 & 3\\ 1 & 1/3 & -1 & -1\\ 3 & 1 & -3 & -1/3 \end{array}\right),\quad \left|\begin{array}{cc} 2 & 3\\ 1 & 1/3 \end{array}\right|=-\frac{7}{3}\neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A)=2$. Por otra parte tenemos

$$\left|\begin{array}{ccc} 3 & 1/3 & 3\\ 1/3 & -1 & -1\\ 1 & -3 & -1/3 \end{array}\right|=-\frac{224}{27}\neq 0$$

Luego Rango$(\overline{A})=3\neq$Rango$(A)=2\Longrightarrow$ Sistema Incompatible. En este caso tenemos que comparar los planos dos a dos:

$$\left\{\begin{array}{l} \pi_1 \text{ con } \pi_2:\ \dfrac{2}{1}\neq\dfrac{3}{1/3}\Longrightarrow \text{se cortan}\\ \pi_1 \text{ con } \pi_3:\ \dfrac{2}{1}\neq\dfrac{3}{1}\Longrightarrow \text{se cortan}\\ \pi_2 \text{ con } \pi_3:\ \dfrac{1}{3}=\dfrac{1/3}{1}=\dfrac{-1}{-3}\neq\dfrac{-1}{-1/3}\Longrightarrow \text{son paralelos} \end{array}\right\}\Longrightarrow$$

Dos planos son paralelos (π_2 y π_3) y otro plano corta a los dos (π_1).

Si $k=-2$ tenemos

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 3\\ 1 & -2 & -1 & -1\\ 3 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right),\quad \left|\begin{array}{cc} 2 & 3\\ 1 & -2 \end{array}\right|=-7\neq 0$$

Tenemos que Rango$(A)=2$, y si observamos la matriz $\overline{A}$ la tercera fila es la suma de las anteriores y, por tanto, Rango$(\overline{A})=2$. Concluimos con que el sistema es Compatible Indeterminado; comparando los planos se compruebo que no hay coincidentes y concluyo con que se cortan los tres en una recta.

2. Puedo definir esta recta como intersección de dos de estos planos r : $\begin{cases} 2x+ & 3y- & 2z = & 3 \\ x- & 2y- & z = & -1 \end{cases}$ y su vector director será:

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-7, 0, -7)$$

Problema 5.4.4 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = 1 - x^2$, se pide:

1. (1 punto) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$, donde $0 < a < 1$.
2. (1 punto) Hallar los puntos A y B en los que la recta hallada en el apartado anterior corta a los ejes vertical y horizontal respectivamente.
3. (1 punto) Determinar el valor de $a \in (0, 1)$ para el cual la distancia entre el punto A y el punto $P(a, f(a))$ es el doble de la distancia entre el punto B y el punto $P(a, f(a))$.

Solución:

1. Tenemos que calcular la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a)) = (a, 1 - a^2)$. Calculamos la pendiente de esta recta

$$f'(x) = -2x \Longrightarrow m = f'(a) = -2a$$

La ecuación de la recta buscada será

$$y - (1 - a^2) = -2a(x - a) \Longrightarrow 2ax + y - (1 + a^2) = 0$$

2. **Corte con el eje OY:** Hacemos $x = 0 \Longrightarrow y = 1+a^2 \Longrightarrow A(0, 1+a^2)$

Corte con el eje OX: Hacemos $y = 0 \Longrightarrow x = a + \dfrac{1 - a^2}{2a} = \dfrac{a^2 + 1}{2a}$.

Luego el punto buscado es $B\left(\dfrac{a^2+1}{2a}, 0\right)$.

3.

$$d(A, P) = \sqrt{(a - 0)^2 + (1 - a^2 - (1 + a^2))^2} = a\sqrt{1 + 4a^2}$$

$$d(B, P) = \sqrt{\left(a - \left(a + \frac{1 - a^2}{2a}\right)\right)^2 + (1 - a^2 - 0)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{(1 - a^2)^2}{4a^2} + (1 - a^2)^2} = (1 - a^2)\sqrt{\frac{1 + 4a^2}{4a^2}} = \frac{1 - a^2}{2a}\sqrt{1 + 4a^2}$$

$$d(A,P)=2d(B,P)\Longrightarrow a\sqrt{1+4a^2}=2\frac{1-a^2}{2a}\sqrt{1+4a^2}\Longrightarrow$$

$$a=\frac{1-a^2}{a}\Longrightarrow a^2=1-a^2\Longrightarrow 2a^2=1\Longrightarrow a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $a\in(0,1)$ la solución pedida es la positiva $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5.5. Septiembre 2004 - Opción A

Problema 5.5.1 *(2 puntos)* Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&-1\\0&1&3\end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Determinar la matriz inversa de B.
2. (1 punto) Determinar una matriz X tal que $A=B\cdot X$.

Solución:

1.

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}4/3&-1/3&-1\\-1&1&1\\1/3&-1/3&0\end{pmatrix}$$

2. $A=BX\Longrightarrow B^{-1}A=B^1BX\Longrightarrow B^{-1}A=X$

$$X=\begin{pmatrix}4/3&-1/3&-1\\-1&1&1\\1/3&-1/3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/3&1/3&-11/3\\-1&1&5\\1/3&1/3&-2/3\end{pmatrix}$$

Problema 5.5.2 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Si A es una matriz tal que $A^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, ¿cuál es el valor del determinante de A?
2. (1 punto) Calcular un número k tal que:

$$\left[\begin{pmatrix}3&-4\\1&-1\end{pmatrix}-k\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Solución:

1. $|A^2| = |A \cdot A| = |A| \cdot |A| = 0 \Longrightarrow |A| = 0$
2. $$\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{pmatrix}^2 =$$
$$= \begin{pmatrix} k^2-6k+5 & 8(k-1) \\ 2-2k & k^2+2k-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Tenemos que:
$$\left.\begin{array}{l} k^2-6k+5=0 \\ 8(k-1)=0 \\ 2-2k=0 \\ k^2+2k-3=0 \end{array}\right\} \Longrightarrow k=1$$

Problema 5.5.3 *(3 puntos)* Sea el plano $\pi : x + 2y + 3z = 6$.

1. (1 punto) Hallar el punto simétrico del $(0, 0, 0)$ respecto de π.
2. (1 punto) Hallar el plano perpendicular a π que contiene a OZ.
3. (1 punto) Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos de intersección de π con los ejes de coordenados.

Solución:

1. Calculo r, recta perpendicular a π que pasa por $P(0, 0, 0)$:
$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{u_\pi} = (1,2,3) \\ P(0,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{array}\right.$$
Esta recta cortará con el plano π en el punto P'':
$$t + 2(2t) + 3(3t) = 6 \Longrightarrow t = \frac{3}{7} \Longrightarrow P''\left(\frac{3}{7}, \frac{6}{7}, \frac{9}{7}\right)$$
El punto simétrico P' de P tendrá por punto medio a P'', es decir:
$$P'' = \frac{P + P'}{2} \Longrightarrow P' = 2P'' - P = \left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7}\right)$$
El punto simétrico de $P(0, 0, 0)$ respecto al plano π es $P'\left(\frac{6}{7}, \frac{12}{7}, \frac{18}{7}\right)$.
2. $$\pi' : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_\pi} = (1,2,3) \\ \overrightarrow{u} = (0,0,1) \\ O(0,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 0 & y \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 2x - y = 0$$

3. Los puntos de corte de π con los ejes será:

   Corte con el eje OX: $y=0$, $z=0 \Longrightarrow x=6 \Longrightarrow A(6,0,0)$
   Corte con el eje OY: $x=0$, $z=0 \Longrightarrow y=3 \Longrightarrow B(0,3,0)$
   Corte con el eje OZ: $x=0$, $y=0 \Longrightarrow z=2 \Longrightarrow C(0,0,2)$

   Tendremos: $\overrightarrow{OA}=(6,0,0)$, $\overrightarrow{OB}=(0,3,0)$, $\overrightarrow{OC}=(0,0,2)$:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=6\,u^3$$

Problema 5.5.4 *(3 puntos)* Sabiendo que una función $f(x)$ tiene como derivada

$$f'(x)=(x-4)^2(x^2-8x+7)$$

1. (1 punto) Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.
2. (1 punto) Hallar los máximos y mínimos relativos de f.
3. (1 punto) ¿Es el punto $x=4$ un punto de inflexión de f?. Justificar razonadamente la respuesta.

Solución:

1.

$$f'(x)=(x-4)^2(x^2-8x+7)=0 \Longrightarrow x=4, \quad x=1, \quad x=7$$

   Como $(x-4)^2>0$ solo tendremos que estudiar el signo de $x^2-8x+7=(x-1)(x-7)$

	$(-\infty,1)$	$(1,7)$	$(7,\infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-7$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

   Luego f crece en los intervalos $(-\infty,1)\cup(7,\infty)$, mientras que decrece en el intervalo $(1,7)$.

2. Por el apartado anterior observamos que en $x=1$ la función pasa de crecer a decrecer, por lo que podemos asegurar que estamos ante un Máximo en $\left(1,\dfrac{162}{5}\right)$; en el punto $x=7$, por el contrario, la función pasa de decrecer a crecer, por lo que estamos ante un Mínimo en $\left(7,-\dfrac{162}{5}\right)$. En $x=4$ la función pasa de decrecer a decrecer y, por tanto, en el punto $(4,0)$ no hay ni Máximo ni Mínimo.

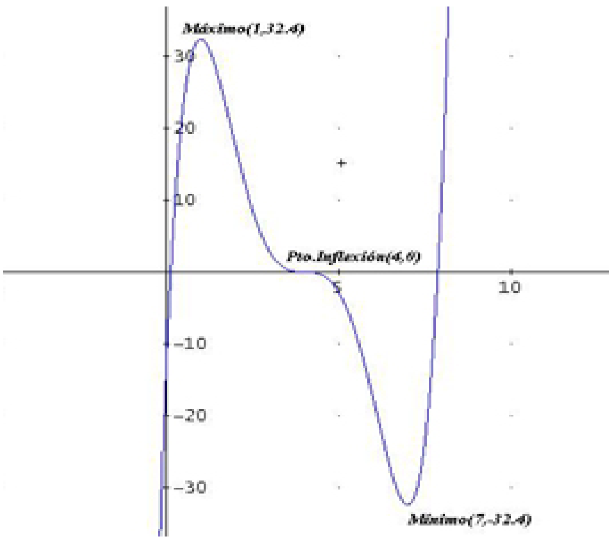
3. Para que en $x = 4$ exista un punto de inflexión la función debe de cambiar de cóncava a convexa o viceversa. Para comprobarlo calculamos la segunda derivada

   $$f''(x) = 2(x-4)(2x^2-16x+23) = 0 \Longrightarrow x = 4, \;\; x = 1,8787, \;\; x = 6,1213$$

   Serían los posibles puntos de inflexión. En el intervalo $(1,8787; 4)$ $f''(x) > 0 \Longrightarrow f$ es convexa, mientras que en el intervalo $(4; 6,1213)$ $f''(x) < 0 \Longrightarrow f$ es cóncava. Por tanto, podemos asegurar que la función f tiene un punto de inflexión en $(4, 0)$. Otra manera de comprobarlo es através de la tercera derivada:

   $$f'''(x) = 6(2x^2 - 16x + 29) \Longrightarrow f'''(4) = -18 \neq 0$$

   Luego se trata de un punto de inflexión.



5.6. Septiembre 2004 - Opción B

Problema 5.6.1 *(2 puntos)*

1. (1,5 puntos) Hallar el conjunto formado por los puntos del plano $z = 0$ que distan 3 unidades del plano de ecuación $2x - y + 2z = 4$.

2. (0,5 puntos) Describir dicho conjunto.

Solución:

1. Un punto del plano $z = 0$ será $P(x, y, 0)$

   $$d(P, \pi) = \frac{|2x - y - 4|}{\sqrt{4+1+4}} = 3 \Longrightarrow |2x-y-4| = 9 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - \;\; 13 = 0 \\ 2x - y + \;\;\;\; 5 = 0 \end{array} \right.$$

Los puntos que cumplen esta condición serán las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{l}2x-y-13=0\\ z=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=-\frac{13}{2}+\frac{1}{2}\lambda\\ y=\lambda\\ z=0\end{array}\right.$$

$$s:\left\{\begin{array}{l}2x-y+5=0\\ z=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\lambda\\ y=\lambda\\ z=0\end{array}\right.$$

2. El conjunto será:

$$\left\{(x,y,z)\in R^3:(x,y,z)\in ro(x,y,z)\in s\right\}$$

Problema 5.6.2 *(2 puntos)* El plano $\pi: 2x-2y+z=-2$ determina un tetraedro con los tres planos coordenados. Se pide:

1. (0,5 puntos) Calcular la longitud de la altura del tetraedro que parte del origen.
2. (0,5 puntos) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a dicha altura.
3. (1 punto) Calcular el área de la cara del tetraedro que está contenida en el plano π.

Solución:

1.
$$d(O,\pi)=\frac{|0+0+0-2|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2.
$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,-2,1)\\ O(0,0,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}x=2\lambda\\ y=-2\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

3. Corte con el eje OX: $y=0,\ z=0\Longrightarrow x=-1\Longrightarrow A(-1,0,0)$
Corte con el eje OY: $x=0,\ z=0\Longrightarrow y=1\Longrightarrow B(0,1,0)$
Corte con el eje OZ: $x=0,\ y=0\Longrightarrow z=-2\Longrightarrow C(0,0,-2)$

$\overrightarrow{AC}=(0,0,-2)-(-1,0,0)=(1,0,-2)$
$\overrightarrow{AB}=(0,1,0)-(-1,0,0)=(1,1,0)$

$$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}=\left|\begin{array}{ccc}i&j&k\\1&0&-2\\1&1&0\end{array}\right|=(2,-2,1)$$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}|=\frac{\sqrt{4+4+1}}{2}=\frac{3}{2}\ u^2$$

Problema 5.6.3 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

1. (1 punto) Hallar sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.
2. (1 punto) Dibujar la gráfica de la función, utilizando la información obtenida en el apartado anterior, teniendo en cuenta, además, que f tiene exactamente tres puntos de inflexión cuyas abcisas son $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, respectivamente.
3. (1 punto) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función f, el eje OX, la recta $x = 0$, y la recta $x = 2$.

Solución:

1. **Máximos y Mínimos relativos:** $f'(x) = -\dfrac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = -1,\ x = 0$. El denominador no se anula nunca, y es siempre positivo.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$-x$	$+$	$+$	$-$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

En $x = -1$ la gráfica de la función pasa de decrecer a crecer, luego estamos ante un Mínimo en el punto $\left(-1, \dfrac{1}{3}\right)$. En $x = 0$ la gráfica de la función pasa de crecer a decrecer, luego estamos ante un Máximo en el punto $(0, 1)$.

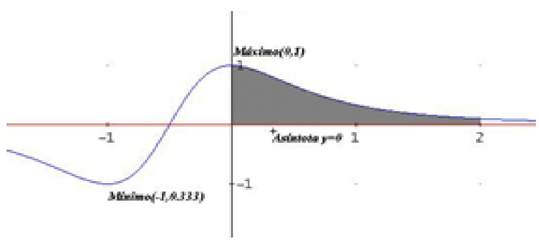
Asíntotas:

- **Verticales:** No hay, ya que el denominador no se anula nunca.
- **Horizontales:**

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} = 0 \Longrightarrow y = 0$$

- **Oblicuas:** No hay al existir horizontales.

2. Representación Gráfica:



3.

$$\int_0^2 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = -\frac{1}{x^2+x+1}\bigg]_0^2 = \frac{6}{7}$$

Problema 5.6.4 *(3 puntos)*

1. (2 puntos) Discutir según los valores del parámetro real λ el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrl} \lambda x+ & 3y+ & z = & \lambda \\ x+ & \lambda y+ & \lambda z = & 1 \\ x+ & y- & z = & 1 \end{array}\right.$$

2. (1 punto) Resolver el sistema anterior en el caso $\lambda = 2$

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} \lambda & 3 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$|A| = -2\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2, \ \ \lambda = -1$$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

Si $\lambda = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Observamos que la tercera fila es la resta de la primera menos la segunda, y teniendo en cuenta que $\left|\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{array}\right| = 1 \neq 0$, podemos concluir en este caso:
Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 2 <$n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

Si $\lambda = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Basta observar las columnas de la matriz para darnos cuenta que la primera y la cuarta son iguales y la tercera está multiplicada por -1.

Si tenemos en cuenta que $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, podemos concluir en este caso:
Rango$(\overline{A})$ =Rango$(A) = 2 <$n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

2.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y+ & z = & 2 \\ x+ & 2y+ & 2z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y = & 2- & z \\ x+ & 2y = & 1- & 2z \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rr} x = & 1+4t \\ y = & -3t \\ z = & t \end{array}\right.$$

Capítulo 6

Año 2005

6.1. Modelo 2005 - Opción A

Problema 6.1.1 *(2 puntos)*

1. Justificar razonadamente que la gráfica de la función
$$f(x) = x^{15} + x + 1$$
corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1, 1]$.

2. Determinar el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real.

Solución:

1. La función $f(x) = x^{15} + x + 1$ en los extremos del intervalo $[-1, 1]$ toma los valores $f(-1) = -1$ y $f(1) = 3$, como además la función es continua por el teorema de Bolzano: $\exists c \in [-1, 1]$ tal que $f(c) = 0$.

2. La derivada de la función $f'(x) = 15x^{14} + 1 > 0$ para cualquier valor de x, luego la función es siempre creciente, luego sólo puede cortar una vez al eje OX, y por el apartado anterior este punto de corte tiene que estar en el intervalo $[-1, 1]$.

Problema 6.1.2 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Determinar el punto P, contenido en el primer cuadrante, en el que se corta la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$.

2. (1 punto) Calcular el área de la región limitada por la recta que une el origen y el punto P hallado en el apartado anterior, y el arco de la curva $y = \dfrac{x^2}{2}$ comprendido entre el origen y el punto P.

Solución:

1.

$$\begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases} \Longrightarrow x \pm 2$$

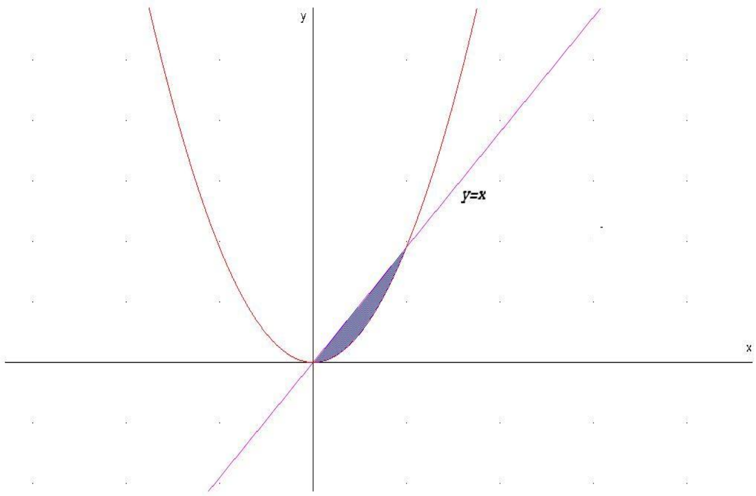
Como piden el punto del primer cuadrante la solución negativa no vale y el punto será $(2, 2)$.

2. La recta que une el origen de coordenadas y el punto $(2, 2)$ es $y = x$. Los puntos de corte son

$$x = \frac{x^2}{2} \Longrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 0, \quad x = 2$$

$$S = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - x\right) dx = \left.\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$$

$$\acute{A}rea = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}\, u^2$$



Problema 6.1.3 *(3 puntos)*

1. (2 punto) Discutir según los valores del parámetro λ el sistema

$$\begin{cases} 2\lambda x+ & 2y+ & \lambda z = & 1 \\ x+ & \lambda y- & z = & 1 \\ 4x+ & 3y+ & z = & 2\lambda \end{cases}$$

2. (1 punto) Resolver el sistema anterior en los casos en que sea compatible.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2\lambda & 2 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2\lambda \end{array} \right), \quad |A| = -2\lambda^2+9\lambda-10 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2, \quad \lambda = \frac{5}{2}$$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq \frac{5}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $\lambda = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Por otro lado

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso Rango$(\overline{A}) \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

Si $\lambda = \dfrac{5}{2}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 5/2 & 1 \\ 1 & 5/2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 23 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Por otro lado

$$\begin{vmatrix} 5 & 5/2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -\frac{55}{2} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso Rango$(\overline{A}) \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

2. El sistema sólo es compatible cuando $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq \frac{5}{2}$ y $|A| = -2\lambda^2 + 9\lambda - 10$. Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2\lambda & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = \frac{2a^3 - 1}{2a^2 - 9a + 10}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2\lambda & 1 \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = -\frac{6a^2 - 2a - 5}{2a^2 - 9a + 10}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 4 & 3 & 2\lambda \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = -\frac{4a^3 - 14a + 11}{2a^2 - 9a + 10}$$

Problema 6.1.4 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(-1,1,1)$, $B(1,-3,-1)$ y $C(1,0,3)$, hallar las coordenadas de un punto D perteneciente a la recta:

$$r: x - 1 = \frac{y-1}{-1} = z - 1$$

de manera que el tetraedro $ABCD$ tenga un volumen igual a 2.

Solución:

La ecuación paramétrica de la recta es

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

$$D(1+\lambda, 1-\lambda, 1+\lambda)$$

$$\overrightarrow{AB} = (2,-4,-2), \quad \overrightarrow{AC} = (2,-1,2), \quad \overrightarrow{AD} = (2+\lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}]| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 2+\lambda & -\lambda & \lambda \\ 2 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}| = 4|\lambda - 5| = 2$$

$$|\lambda - 5| = \frac{1}{2}$$

$$\lambda - 5 = \frac{1}{2} \Longrightarrow \lambda = \frac{11}{2} \Longrightarrow D\left(\frac{13}{2}, -\frac{9}{2}, \frac{13}{2}\right)$$

$$\lambda - 5 = \frac{9}{2} \Longrightarrow \lambda = \frac{9}{2} \Longrightarrow D\left(\frac{11}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$$

6.2. Modelo 2005 - Opción B

Problema 6.2.1 *(2 puntos)* Considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que a es un parámetro real:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -ax+ & 4y+ & az = & -a \\ 4x+ & ay- & az = & a \\ -x- & y+ & z = & 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

1. (1 punto) Discutir el sistema
2. (1 punto) Resolver el sistema para $a = 1$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -a & 4 & a & -a \\ 4 & a & -a & a \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad |A| = a^2 - 16 = 0 \Longrightarrow a = \pm 4$$

Si $a \neq \pm 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = \text{Rango}(\overline{A}) = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $a = 4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -4 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como el menor $\left|\begin{array}{rr} -4 & 4 \\ 4 & 4 \end{array}\right| = -32 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$. Como el menor

$$\left|\begin{array}{rrr} -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right| = -64 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overrightarrow{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

Si $a = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como el menor $\left|\begin{array}{rr} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{array}\right| = -32 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$. Como el menor

$$\left|\begin{array}{rrr} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right| = 64 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overrightarrow{A}) = 3$$

Como Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

2. Cuando $a = 1$:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -x+ & 4y+ & z = & -1 \\ 4x+ & y- & z = & 1 \\ -x- & y+ & z = & 1 \end{array}\right. \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad |A| = -15$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\left|\begin{array}{rrr} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right|}{-15} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{\left|\begin{array}{rrr} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right|}{-15} = -\frac{2}{5}$$

$$z = \frac{\left|\begin{array}{rrr} -1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right|}{-15} = \frac{19}{5}$$

Problema 6.2.2 *(2 puntos)* Sea la matriz:

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

1. (1 punto) Comprobar que

$$A^3 - 2A^2 = 0$$

2. (1 punto) Hallar A^n.

Solución:

1.

$$A^1 = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$$A^2 = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{array}\right) =$$

$$2^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2A$$

$$A^3 = 2^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$2^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 4A$$

$$A^3 - 2A^2 = 4A - 4A = 0$$

2. $A^n = 2^{n-1}A$

Problema 6.2.3 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \ln(1 + x^2)$, donde ln significa *Logaritmo Neperiano.*

1. (1 punto) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad.

2. (1 punto) Dibujar la gráfica de f.

3. (1 punto). Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

Solución:

1.

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

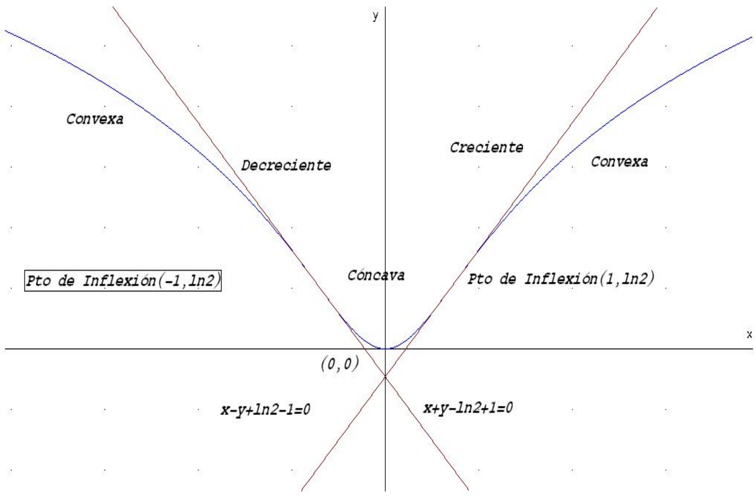
Luego en el punto $(0, 0)$ tenemos un Mínimo.

$$f''(x) = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)} = 0 \Longrightarrow x = -1, \quad x = 1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa	cóncava	convexa

Luego en los puntos $(-1, \ln 2)$ y $(1, \ln 2)$ hay dos puntos de Inflexión.

2. Representación gráfica



3. La tangente en el punto $(-1, \ln 2)$ es:

$$m = f'(-1) = -1 \Longrightarrow y - \ln 2 = -x + 1 \Longrightarrow x + y - \ln 2 + 1 = 0$$

La tangente en el punto $(1, \ln 2)$ es:

$$m = f'(1) = 1 \Longrightarrow y - \ln 2 = x - 1 \Longrightarrow x - y + \ln 2 - 1 = 0$$

Problema 6.2.4 *(3 puntos)* Se considera la recta: $r : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-5}{2}$ y la familia de rectas dependientes del parámetro m:

$$s : \left\{ \begin{array}{l} 3x - y = 8 - 12m \\ y - 3z = 7 - 3m \end{array} \right.$$

1. (2 puntos) Determinar el valor de m para el que las dos rectas r y s se cortan.
2. (1 punto) Para el caso de $m = 0$, hallar la distancia entre las dos rectas.

Solución:

1.

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 3, 2) \\ P_r(0, 4, 5) \end{array} \right. \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, 3, 1) \\ P_s(5 - 5m, 7 - 3m, 0) \end{array} \right. \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (5-5m, 3-3m, -5)$$

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc} 5 - 5m & 3 - 3m & -5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \right| = 15(m - 2) = 0 \Longrightarrow m = 2$$

Cuando $m = 2$ el Rango$(A) = 2$, y además el Rango$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \right) = 2 \Longrightarrow$ las dos rectas se cortan.

2. Si $m = 0$ las dos rectas se cortan, ya que $|A| \neq 0$ y tenemos que

$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, 3, 1) \\ P_s(5, 7, 0) \end{cases}$$

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-30|}{\sqrt{18}} = 5\sqrt{2}$$

6.3. Junio 2005 - Opción A

Problema 6.3.1 *(2 puntos)* Sea $f(x)$ una función derivable en $(0, 1)$ y continua en $[0, 1]$, tal que $f(1) = 0$ y $\displaystyle\int_0^1 2xf'(x)dx = 1$. Utilizar la fórmula de integración por partes para hallar $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

Solución:

Hacemos $u = 2x$ y $dv = f'(x)dx \Longrightarrow du = 2dx$ y $v = f(x)$. Aplicando la fórmula de integración por partes

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int_0^1 xf'(x)dx = 2xf(x)]_0^1 - 2\int_0^1 f(x)dx = 1 \Longrightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)dx = -\left.\frac{1 - 2xf(x)}{2}\right]_0^1 = -\frac{1 - 2f(1)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Problema 6.3.2 *(2 puntos)* Calcular un polinomio de tercer grado $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que verifica:

- tiene un máximo relativo en $x = 1$
- tiene un punto de inflexión en el punto de coordenadas $(0, 1)$.
- se verifica que
$$\int_0^1 p(x)dx = \frac{5}{4}$$

Solución:

- $$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Longrightarrow p'(1) = 3a + 2b + c = 0$$
- $$p''(x) = 6ax + 2b \Longrightarrow p''(0) = 2b = 0 \Longrightarrow b = 0$$
$$p(0) = d = 1$$

- $$\int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 (ax^3+bx^2+cx+d)dx = \left.\frac{ax^4}{4}+\frac{bx^3}{3}+\frac{cx^2}{2}+dx\right]_0^1 = \frac{5}{4}$$

$$\Longrightarrow \frac{a}{4}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+d = \frac{5}{4}$$

En conclusión, tenemos

$$\frac{a}{4}+\frac{c}{2}+1 = \frac{5}{4} \Longrightarrow a+2c = 1, \quad \text{y} \quad 3a+c = 0 \Longrightarrow$$

$$a = -\frac{1}{5}, \quad c = \frac{3}{5} \Longrightarrow p(x) = -\frac{1}{5}x^3+\frac{3}{5}x+1$$

Problema 6.3.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} (m-1)x+ & y+ & z = & 3 \\ mx+ & (m-1)y+ & 3z = & 2m-1 \\ x+ & 2y+ & (m-2)z = & 4 \end{array}\right.$$

1. (1,5 punto) Discutirlo según los distintos valores de m.
2. (1,5 puntos) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

1. Sea la matriz

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} m-1 & 1 & 1 & 3 \\ m & m-1 & 3 & 2m-1 \\ 1 & 2 & m-2 & 4 \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |A| = (m-2)(m+1)(m-4) = 0 \Longrightarrow m = 2, \; m = -1, \; m = 4$$

Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ y $m \neq 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =$Rango$\overline{A}$ =nº incógnitas luego en este caso el sistema sería compatible determinado.

Si $m = -1$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right), \quad \left|\begin{array}{rr} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{array}\right| = 5 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, para ello cogemos el determinate

$$\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{array}\right| = 5 \neq 0$$

Luego en este caso Rango$A$ $\neq$Rango$\overline{A}$ $\Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $m = 2$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right| = -1 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, para ello cogemos el determinate

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{array} \right| = -4 \neq 0$$

Luego en este caso Rango$A$ $\neq$Rango$\overline{A}$ $\Longrightarrow$ el sistema es incompatible.

Si $m = 4$ tenemos

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{array} \right| = 5 \neq 0$$

Luego tenemos que Rango$(A) = 2$. Ahora calculamos el rango de $\overline{A}$, que está claro que es dos, ya que la última fila es la resta de las dos anteriores.

Luego en este caso Rango$A$ =Rango$\overline{A} = 2 <$n$^{\text{o}}$ incógnitas$\Longrightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

2. Resolvemos este último caso. Por el menor que hemos escogido podemos despreciar la tercera ecuación.

$$\left\{ \begin{array}{rrl} 3x+ & y+ & z = 3 \\ 4x+ & 3y+ & 3z = 7 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrr} 3x+ & y = & 3- & z \\ 4x+ & 3y = & 7- & 3z \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{2}{5} \\ \\ y = \dfrac{9}{5} - \lambda \\ \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 6.3.4 *(3 puntos)* Dado el punto $P(1, 3, -1)$, se pide:

1. (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a P sea igual a 3.

2. (2 puntos) Calcular los puntos de la recta

$$\left\{\begin{array}{lrr} x = & & 3\lambda \\ y = & 1+ & \lambda \\ z = & 1- & 4\lambda \end{array}\right.$$

cuya distancia a P es igual 3.

Solución:

1. Se trata de la ecuación de una esfera

$$(x-1)^2+(y-3)^2+(z+1)^2 = 9 \Longrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-6y+2z+2 = 0$$

2. Sustituimos un punto genérico de la recta en la esfera y obtenemos

$$(3\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(1-4\lambda)^2-2(3\lambda)-6(1+\lambda)+2(1-4\lambda)+2 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 26\lambda(\lambda-1) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1, \ \ \lambda = 0$$

Sustituyendo en la recta estos valores tendremos los puntos buscados:

Para $\lambda = 0 \Longrightarrow (0,1,1)$ y para $\lambda = 1 \Longrightarrow (3,2,-3)$.

6.4. Junio 2005 - Opción B

Problema 6.4.1 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y+ & 3z = 1 \\ 2x+ & y- & z = 2 \end{array}\right.$$

2. (1 punto) Hallar dos constantes α y β de manera que al añadir al sistema anterior una tercera ecuación: $5x + y + \alpha z = \beta$, el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Solución:

1.

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & 2y+ & 3z = 1 \\ 2x+ & y- & z = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y & = 1- & 3z \\ 2x+ & y & = 2+ & z \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1+\dfrac{5}{3}t \\ \\ y = -\dfrac{7}{3}t \\ \\ z = t \end{array}\right.$$

2. Para que el sistema siga siendo compatible indeterminado esta última ecuación tiene que ser combinación lineal de las dos anteriores, es decir, si ponemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & \alpha & \beta \end{array}\right)$$

sería $a(1,2,3,1) + b(2,1,-1,2) = (5,1,\alpha,\beta) \Longrightarrow \begin{cases} a + 2b = 5 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \Longrightarrow$ $a = -1,\ b = 3 \Longrightarrow \alpha = -6,\ \beta = 5$

Problema 6.4.2 *(2 puntos)*Hallar una matriz X tal que:

$$A^{-1}XA = B$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

Primero resolvemos la ecuación matricial:

$$A^{-1}XA = B \Longrightarrow XA = AB \Longrightarrow X = ABA^{-1}$$

Ahora calculamos A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{(Adjt(A))^T}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Efectuamos el producto

$$X = ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

Problema 6.4.3 *(3 puntos)* Calcular los siguientes límites

1. (1,5 puntos)
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}\right)$$

2. (1,5 puntos)
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} x\left[\arctan\left(e^x\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

Solución:

1.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=[\infty-\infty]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}+\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}}=\frac{2}{2}=1$$

2.

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}x\left[\arctan\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}\right]=[0\cdot\infty]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\arctan\left(e^x\right)-\frac{\pi}{2}}{1/x}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^{2x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-x^2e^x}{1+e^{2x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2xe^x-x^2e^x}{2e^{2x}}=$$

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2x-x^2}{2e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2-2x}{2e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{-2}{2e^x}=0$$

Problema 6.4.4 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-1}{4}\quad s:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{2}$$

1. (1,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta t que corta a las dos y es perpendicular a ambas.
2. (1,5 puntos) Calcular la mínima distancia entre r y s.

Solución:

1.

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(2,3,4)\\ P_r(1,1,1)\end{array}\right.\qquad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(1,-1,2)\\ P_s(-1,2,0)\end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{u_t}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{rrr}i&j&k\\2&3&4\\1&-1&2\end{array}\right|=(10,0,-5)$$

Para la construcción de la recta podemos poner $\overrightarrow{u_t}=(2,0,-1)$, ya que el módulo de este vector no influye.

Construimos la recta como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (2,0,-1) \\ \overrightarrow{u_r} = (2,3,4) \\ P_r(1,1,1) \end{cases} \qquad \pi_1 : \begin{cases} \overrightarrow{u_t} = (2,0,-1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1,-1,2) \\ P_s(-1,2,0) \end{cases}$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} 2 & 2 & x-1 \\ 3 & 0 & y-1 \\ 4 & -1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 3x - 10y + 6z + 1 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} 1 & 2 & x+1 \\ -1 & 0 & y-2 \\ 2 & -1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow x + 5y + 2z - 9 = 0$$

$$t : \begin{cases} 3x- & 10y+ & 6z+1=0 \\ x+ & 5y+ & 2z-9=0 \end{cases}$$

2.

$$\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}\right]\right| = |\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}| = |-15|$$

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}\right]\right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-15|}{\sqrt{10^2+5^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} = (-1,2,0) - (1,1,1) = (-2,1,-1)$$

6.5. Septiembre 2005 - Opción A

Problema 6.5.1 *(2 puntos)* Discutir según los valores del parámetro real λ la posición relativa de los planos

$$\begin{aligned} &\pi_1 : x + z = \lambda \\ &\pi_2 : 4x + (\lambda-2)y + (\lambda+2)z = \lambda+2 \\ &\pi_3 : 2(\lambda+1)x - (\lambda+6)z = -\lambda \end{aligned}$$

Solución:

$$\begin{cases} x+ & & z = & \lambda \\ 4x+ & (\lambda-2)y+ & (\lambda+2)z = & \lambda+2 \\ 2(\lambda+1)x- & & (\lambda+6)z = & -\lambda \end{cases}$$

La matriz asociada a este sistema será

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \lambda \\ 4 & \lambda-2 & \lambda+2 & \lambda+2 \\ 2(\lambda+1) & 0 & -(\lambda+6) & -\lambda \end{array} \right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & \lambda-2 & \lambda+2 \\ 2(\lambda+1) & 0 & -(\lambda+6) \end{vmatrix}=(2-\lambda)(3\lambda+8)=0\Longrightarrow \lambda=2,\ \ \lambda=-\frac{8}{3}$$

Si $\lambda\neq 2$ y $\lambda\neq -\frac{8}{3}\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ el sistema es compatible determinado, el sistema tiene, por tanto, solución única y los tres planos se cortan en un punto.

Si $\lambda=2$ tenemos

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ 6 & 0 & -8 & -2 \end{array}\right)\Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & -8 & -2 \end{vmatrix}=-56$$

El sistema es incompatible, y si comparamos plano a plano tenemos

$$\begin{array}{l} \frac{1}{4}=\frac{1}{4}\neq\frac{2}{4}\Longrightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ paralelos} \\ \frac{1}{6}\neq\frac{1}{-8}\Longrightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan} \\ \frac{4}{6}\neq\frac{4}{-8}\Longrightarrow \pi_2 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan} \end{array}$$

Si $\lambda=-\frac{8}{3}$ el sistema es incompatible, ya que Rango$(\overline{A})=3$, ahora vamos a comparar plano a plano en el sistema de la matriz asociada

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -8/3 \\ 4 & -14/3 & -2/3 & -2/3 \\ -10/3 & 0 & -10/3 & 8/3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{4}\neq\frac{0}{-14/3}\Longrightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ se cortan} \\ \frac{1}{-10/3}=\frac{1}{-10/3}\neq\frac{-8/3}{8/3}\Longrightarrow \pi_1 \text{ y } \pi_3 \text{ son paralelos} \\ \frac{4}{-10/3}\neq\frac{-14/3}{0}\Longrightarrow \pi_2 \text{ y } \pi_3 \text{ se cortan} \end{array}$$

Problema 6.5.2 *(2 puntos)* Se consideran las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{rrr} x- & y & =3 \\ x+ & y & -z=0 \end{array}\right.,\quad s:\left\{\begin{array}{rrr} x- & & z=4 \\ 2x- & y & =7 \end{array}\right.$$

1. (1 punto) Hallar la recta t, perpendicular a r y a s, que pasa por el origen.
2. (1 punto) Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta s con la recta t obtenida en el apartado anterior.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,1,2) \\ P_r(0,-3,-3) \end{array}\right.,\quad s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(-1,-2,-1) \\ P_s(0,-7,-4) \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{u_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(1,1,2),\quad \overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=(-1,-2,-1)$$

1.

$$\overrightarrow{u_t} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (3, -1, -1)$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (3, -1, -1) \\ P_t(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{array} \right.$$

2. Sustituimos t en s y tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\lambda + \lambda = 4 \\ 6\lambda + \lambda = 7 \end{array} \right. \Longrightarrow \lambda = 1$$

El punto de corte será $(3, -1, -1)$.

Problema 6.5.3 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Hallar dos constantes α y β tales que $A^2 = \alpha A + \beta I$.
2. (1 punto) Calcular A^5 utilizando la expresión obtenida en el apartado anterior.
3. (1 punto) Hallar todas las matrices X que satisfacen $(A-X)(A+X) = A^2 - X^2$.

Solución:

1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha A + \beta I = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & 2\alpha \\ 0 & \alpha + \beta \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha = 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \alpha = 2, \;\; \beta = -1$$

2.

$$A^5 = A^2 A^2 A = (2A-I)^2 A = (4A^2+I^2-4AI)A = (4A^2-4A+I)A =$$

$$4(2A - I)A - 4A^2 + A = 8A^2 - 4IA - 4(2A - I) + A =$$

$$8(2A-I)-4A-8A+4I+A = 5A-4I = 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $$(A-X)(A+X)=A^2-X^2 \Longrightarrow A^2+AX-XA+X^2=A^2-X^2$$
$$\Longrightarrow AX-XA=0 \Longrightarrow AX=XA$$

Serán todas aquellas matrices X que cumplan $AX=XA$.

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a+2c=a \Longrightarrow c=0 \\ b+2d=2a+b \Longrightarrow a=d \\ c=c \\ d=d \end{array}\right.$$

Serán las matrices A de la forma
$$A=\left(\begin{array}{cc} a & b \\ 0 & a \end{array}\right)$$

Problema 6.5.4 *(3 puntos)* Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ se pide:

1. (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto $(a, f(a))$ para $a>0$
2. (1 punto) Hallar los puntos de corte de las recta tangente hallada en el apartado anterior con los ejes coordenados.
3. (1 punto) Hallar el valor de $a>0$ que hace que las distancias entre los dos puntos hallados en el apartado anterior sea mínima.

Solución:

1. $$f(a)=\frac{1}{a},\ \ m=f'(a)=-\frac{1}{a^2}$$
La recta tangente es
$$y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a)$$

2. Haciendo $y=0 \Longrightarrow A(2a,0)$ y haciendo $x=0 \Longrightarrow B\left(0,\frac{2}{a}\right)$.

3. $$d(a)=\sqrt{(2a)^2+\left(\frac{2}{a}\right)^2}=\frac{2}{a}\sqrt{a^4+1}$$
$$d'(a)=\frac{2a^4-2}{a^2\sqrt{a^4+1}}=0 \Longrightarrow \ a=1,\ \ a=-1$$
Como $a>0 \Longrightarrow a=1$ En el intervalo $(-1,1)$ la d' es negativa y en el $(1,+\infty)$ es positiva, luego pasa de decrecer a crecer en $a=1$ y, por tanto, es un mínimo.

6.6. Septiembre 2005 - Opción B

Problema 6.6.1 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{x-1}$ donde ln significa *logaritmo neperiano*, definida para $x > 1$, hallar un punto $(a, f(a))$ tal que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en ese punto sea paralela al eje OX.

Solución:

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x(x-1)} = 0 \Longrightarrow x = 2$$

$$f(2) = \ln \frac{4}{1} = \ln 4 = 2\ln 2 \Longrightarrow (4, 2\ln 2)$$

Problema 6.6.2 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

1. (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales de la función $f(x)$.
2. (1 punto) Determinar el valor del parámetro a tal que:

$$\int_0^a f(x)dx = \frac{1}{4}$$

Solución:

1.

$$f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

En el intervalo $(-\infty, 0) \Longrightarrow f'(x) > 0 \Longrightarrow$ la función es creciente en este intervalo.

En el intervalo $(0, +\infty) \Longrightarrow f'(x) < 0 \Longrightarrow$ la función es decreciente en este intervalo.

Luego en el punto $(0, f(0)) = (0, 1/4)$ la función presenta un máximo.

2.

$$\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \frac{1}{4}$$

$$\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = \int \frac{1}{t^2}dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{1+e^x} + C$$

$$\int_0^a \frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx = -\frac{1}{1+e^x}\bigg]_0^a = -\frac{1}{1+e^a} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{1+e^a} = \frac{1}{4} \Longrightarrow 1 + e^a = 4 \Longrightarrow e^a = 3 \Longrightarrow a = \ln 3$$

Problema 6.6.3 *(3 puntos)* Se considera la familia de planos:

$$mx + (m-2)y + 3(m+1)z + (m+1) = 0$$

siendo m un parámetro real.

Se pide:

1. (1 punto) Determinar la recta común a todos los planos de la familia.
2. (1 punto) Determinar el plano de esta familia que pasa por el punto $P(1,1,0)$.
3. (1 punto) Determinar el plano de esta familia que es paralelo a la recta:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x- & & 2z+ & 1=0 \\ - & y+ & z+ & 1=0 \end{array}\right.$$

Solución:

1. basta dar dos valores a m que sean distintos:

$$\left\{\begin{array}{rrrrr} m=0 \Longrightarrow & - & 2y & +3z+1= & 0 \\ m=-1 \Longrightarrow & -x- & 3y & = & 0 \end{array}\right.$$

La intersección de estos dos planos sería la recta pedida, que en forma parámetrica

$$\overrightarrow{u_r} = \left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{array}\right| = (9,-3,-2), \quad P_r(-6,2,1) \Longrightarrow r : \left\{\begin{array}{l} x = -6 + 9\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{array}\right.$$

2. Sustituyendo este punto en la familia tenemos

$$m + (m-2) + m + 1 = 0 \Longrightarrow m = \frac{1}{3}$$

El plano buscado será

$$\frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3} - 2\right)y + 3\left(\frac{1}{3} + 1\right)z + \left(\frac{1}{3} + 1\right) = 0 \Longrightarrow x - 5y + 12z + 4 = 0$$

3.

$$r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = \left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right| = (-2,-1,-1) \\ \\ P_r(1,2,1) \end{array}\right.$$

Los vectores $(m, m-2, 3m+3)$ y $(-2, -1, -1)$ tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar tiene que ser cero

$$-2m - m + 2 - 3m - 3 = 0 \Longrightarrow m = -\frac{1}{6}$$

Sustituyendo

$$-\frac{1}{6}x + \left(-\frac{1}{6} - 2\right) y + 3\left(-\frac{1}{6} + 1\right) z + \left(-\frac{1}{6} + 1\right) = 0 \Longrightarrow x + 13y - 15z - 5 = 0$$

Problema 6.6.4 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & k & t \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Hallar A^{10}.
2. (1 puntos) Hallar la matriz inversa de B.
3. (1 punto) En el caso particular de $k = 0$, hallar B^{10}.

Solución:

1.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & k^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k & t \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = A^3 \cdot A^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -k & k^2 - t \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$B \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nt \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Capítulo 7

Año 2006

7.1. Modelo 2006 - Opción A

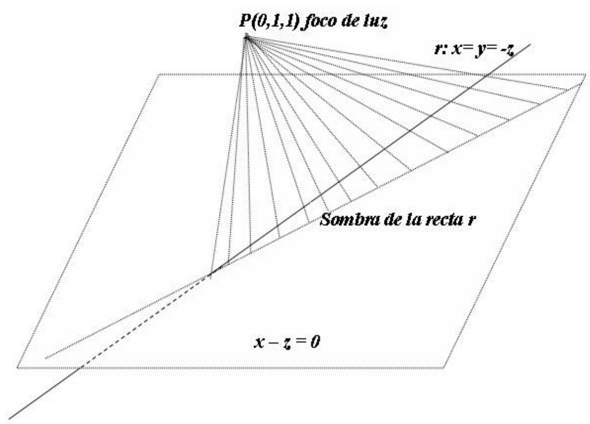
Problema 7.1.1 *(2 puntos)* Un punto de luz situado en $P(0,1,1)$ proyecta la sombra de la recta:

$$x = y = -z$$

sobre el plano $\pi : x - z = 0$.

Calcular las coordenadas del punto de esta proyección que pertenece al plano $z = 1$.

Solución:



$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1,1,-1) \\ P_r(0,0,0) \end{cases}$$

El plano que contiene a P y a r será:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -1) \\ \overrightarrow{P_rP} = (0, 1, 1) \\ P_r(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi_1 : \left| \begin{array}{rrr} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \pi_1 : 2x - y + z = 0$$

La proyección de r será la intersección de los planos π_1 y π:

$$s : \left\{ \begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow s : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

El corte con el plano $z = 1$ será $z = \lambda = 1 \Longrightarrow x = 1,\ \ y = 3 \Longrightarrow (1, 3, 1)$

Problema 7.1.2 *(2 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y - 6}{1} = \frac{z - 5}{2} \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + \lambda \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = 0 \end{array} \right.$$

Hallar la ecuación de la recta que contiene al punto $P(2, -1, 1)$ y cuyo vector director es perpendicular a lo vectores directores de las dos rectas anteriores.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1, 1, 2) \\ P_r(0, 6, 5) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, 3, 0) \\ P_s(3, -4, 0) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{array} \right| = (-6, 2, 2) = 2(-3, 1, 1)$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (-3, 1, 1) \\ P_t(2, -1, 1) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$$

Problema 7.1.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2x+ & 3y- & z = & k \\ x+ & 2y+ & 3z = & 2 \\ kx+ & ky- & 4z = & -1 \end{array} \right.$$

1. (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

2. (1 punto) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & k \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ k & k & -4 & -1 \end{array} \right), \quad |A| = 4k - 4 = 0 \Longrightarrow k = 1$$

Si $k \neq 1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array} \right)$$

Como el menor $\left| \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \right| = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Por otro lado se observa que la cuarta fila es la diferencia entre la primera y la segunda, luego el Rango$(\overline{A}) = 2$, en conclusión: Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ nº de incógnitas y en este caso el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

2.

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} 2x+ & 3y- & z = & 1 \\ x+ & 2y+ & 3z = & 2 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -4 + 11\lambda \\ y = 3 - 7\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 7.1.4 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \frac{-4x}{(1 + x^2)^2}$$

1. (2 puntos) Hallar sus máximos y mínimos locales y/o globales.

2. (1 punto) Determinar el valor del parámetro $a > 0$ para el cual es:

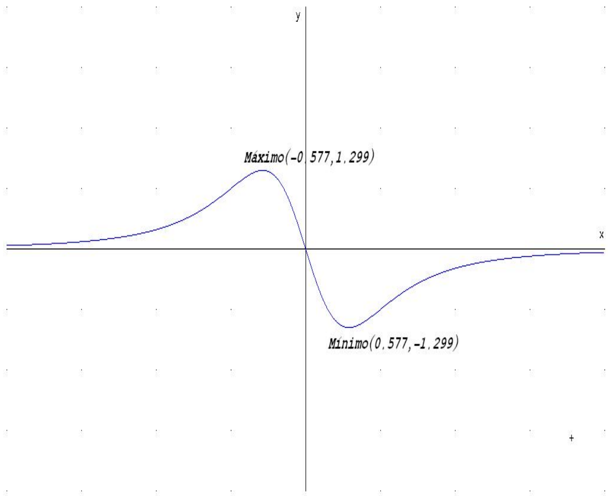
$$\int_0^a f(x)\, dx = -1$$

Solución:

1.

$$f'(x) = \frac{4(3x^2 - 1)}{(1 + x^2)^3} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

	$(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$	$(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$	$(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	creciente	decreciente	creciente



Luego en el punto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ tenemos un Máximo y en el punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$ tenemos un Mínimo.

2.

$$\int_0^a \frac{-4x}{(1+x^2)^2}\,dx = -2\int_0^a 2x(1+x^2)^{-2}\,dx = -2\frac{(1+x^2)^{-1}}{-1}\bigg]_0^a =$$

$$\frac{2}{1+x^2}\bigg]_0^a = \frac{2}{1+a^2} - 2 = -1 \Longrightarrow a = \pm 1, \text{ como } a > 0 \Longrightarrow a = 1$$

7.2. Modelo 2006 - Opción B

Problema 7.2.1 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Hallar el punto P en el que se cortan las gráficas de las funciones:
$$f(x) = \frac{2}{x} \qquad g(x) = +\sqrt{x^2-3}$$

2. (1 punto) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto P a cada una de las curvas anteriores y demostrar que son perpendiculares.

Solución:

1.

$$f(x) = g(x) \Longrightarrow \frac{2}{x} = \sqrt{x^2-3} \Longrightarrow x = \pm 2$$

La solución negativa no vale, luego $x = 2$ es el único punto común.

2. Tangente a $f(x)$:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} \Longrightarrow m = f'(2) = -\frac{1}{2}, \text{ y } f(2) = 1 \Longrightarrow y-1 = -\frac{1}{2}(x-2)$$

Tangente a $g(x)$:

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} \Longrightarrow m' = g'(2) = -2, \text{ y } g(2) = 1 \Longrightarrow y-1 = 2(x-2)$$

Como $m = -\frac{1}{m'} \Longrightarrow$ las dos rectas son perpendiculares.

Problema 7.2.2 *(2 puntos)* Se considera la función:

$$f(x) = \frac{1}{2+\sin x - \cos x}$$

Se pide:

1. (1 punto) Calcular los extremos locales y/o globales en el intervalo $[-\pi, \pi]$
2. (1 punto) Comprobar la existencia de, al menos, un punto $c \in [-\pi, \pi]$ tal que $f''(c) = 0$. (Sugerencia: utilizar el teorema de Rolle). Demostrar que en c hay un punto de inflexión.

Solución:

1.

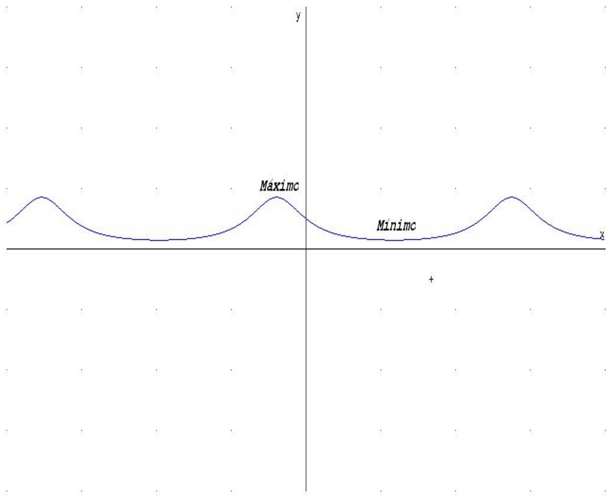
$$f'(x) = -\frac{\cos x + \sin x}{(2+\sin x - \cos x)^2} = 0 \Longrightarrow \cos x + \sin x = 0 \Longrightarrow \sin x = -\cos x$$

$$\Longrightarrow \tan x = -1 \Longrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

El denominador de $f'(x)$ es siempre positivo y no se anula nunca.

	$(0, \frac{3\pi}{4})$	$(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$	$(\frac{7\pi}{4}, 0)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	decreciente	creciente	decreciente

Luego en el punto $x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ tenemos un Mínimo y en el punto $x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$ tenemos un Máximo.



2. Como $f''(x)$ es una función continua y derivable en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y además $f'(\pi) = f'(-\pi) = 1/9$ por el teorema de Rolle existe un punto $c \in [-\pi, \pi]$ en el que $f''(c) = 0$.

   Como el punto c anula la segunda derivada y en él la función es continua tiene que tratarse de un punto de inflexión.

Problema 7.2.3 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{1} \quad s: \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

1. (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

2. (1,5 puntos) Calcular la distancia de s al plano anterior.

Solución:

1.

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3, 1, 1) \\ P_r(-1, -2, -3) \end{array} \right. \qquad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (-1, 1, -2) \\ P_s(0, -1, 2) \end{array} \right.$$

$$\pi: \left| \begin{array}{ccc} 3 & -1 & x+1 \\ 1 & 1 & y+2 \\ 1 & 2 & z+3 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 3x - 5y - 4z - 19 = 0$$

2.

$$d(P_s, \pi) = \frac{|3 \cdot 0 - 5 \cdot (-1) - 4 \cdot 2 - 19|}{\sqrt{9+25+16}} = \frac{11\sqrt{2}}{5}$$

Problema 7.2.4 *(3 puntos)* Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. (1,5 punto) Hallar $(A-I)^2$.
2. (1,5 punto) Calcular A^4 haciendo uso del apartado anterior.

Solución:

1.

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $(A-I)^2 = A^2 - 2A + I = 0 \Longrightarrow A^2 = 2A - I$

$$A^4 = (A^2)^2 = 4A^2 - 4A + I = 4(2A-I) - 4A + I = 4A - 3I$$

$$A^4 = 4\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ -4 & -7 & 4 \\ -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

7.3. Junio 2006 - Opción A

Problema 7.3.1 *(2 puntos)* Dado el sistema homogeneo

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & ky & -z = 0 \\ kx- & y & +z = 0 \\ (k+1)x+ & y & = 0 \end{array}\right.$$

averiguar para qué valores de k tiene soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resolverlo en tales casos.

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ (k+1) & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = k^2 - k - 2 = 0 \Longrightarrow k = -1,\ k = 2$$

Si $k \neq -1$ y $k \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0$ el sistema es compatible determinado $x = y = z = 0$.

Si $k = 2 \Longrightarrow$ SCI

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y - z = 0 \\ 3x + y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{5}\lambda \\ y = \frac{3}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Si $k = -1 \Longrightarrow$ SCI

$$\left\{ \begin{array}{c} x - y - z = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 7.3.2 *(2 puntos)* Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar todas las matrices

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tales que $AP = PA$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a + b \\ c & 2c + d \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + 2c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b + 2d = 2a + b \Longrightarrow a = d \\ c = c \\ d = 2c + d \Longrightarrow c = 0 \end{array} \right.$$

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 7.3.3 *(3 puntos)* Se pide:

1. (1 punto) Dibujar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$ indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

2. (1 punto) Demostrar que la función $a_n = \dfrac{2n}{n+1}$ es monótona creciente.

3. (1 punto) Calcular $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} n^2(a_{n+1} - a_n)$

Solución:

1.
   - $Dom f = R - \{-1\}$.

- Asíntotas:

  a) Verticales: $x = -1$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} \frac{2x}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow -1^+} \frac{2x}{x+1} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$$

  b) Horizontales: $y = 2$

$$\lim_{x\longrightarrow \infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

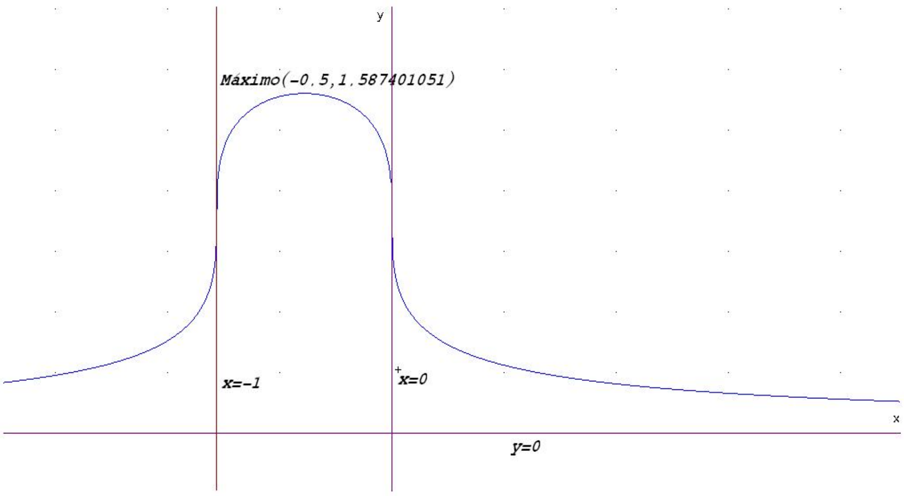
  c) Oblicuas: No hay al haber horizontales.

- Monotonía:

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2} > 0 \Longrightarrow \text{siempre creciente}$$

  Luego no hay ni máximos ni mínimos.

- Representación gráfica:



2. Si tenemos en cuenta que una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales excluido el cero, y si tenemos en cuenta que la función $a_n = f(n) = \dfrac{2n}{n+1}$ hemos demostrado en el apartado anterior que es creciente en $R - \{-1\}$, con mayor razón lo es en el conjunto $N - \{0\}$.

   Otra manera de demostrarlo:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$$

   luego la sucesión es creciente.

3.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} n^2(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2n^2}{n^2+3n+2}=2$$

Problema 7.3.4 *(3 puntos)* Sean las rectas:

$$r:\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{-4}\qquad\qquad \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{1}$$

1. (1,5 punto) Hallar la ecuación de la recta t que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.

2. (1,5 puntos) Hallar la recta perpendicular común a las rectas r y s.

Solución:

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(-2,2,-4)\\ P_r(-1,2,0)\end{array}\right.\qquad\qquad s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=(3,1,1)\\ P_s(2,-1,-2)\end{array}\right.$$

1. $\overrightarrow{OP_r}=(-1,2,0)$, $\overrightarrow{OP_s}=(2,-1,-2)$

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{OP_r}\\ \overrightarrow{u_r}\\ P_r\end{array}\right.\qquad \pi_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{OP_s}\\ \overrightarrow{u_s}\\ P_s\end{array}\right.\qquad t:\left\{\begin{array}{l}\pi_1\\ \pi_2\end{array}\right.$$

$$\pi_1:\left|\begin{array}{rrc}-1&-2&x+1\\ 2&2&y-2\\ 0&-4&z\end{array}\right|=0,\quad \pi_2:\left|\begin{array}{rrc}2&3&x-2\\ -1&1&y+1\\ -2&1&z+2\end{array}\right|=0$$

$$t:\left\{\begin{array}{l}4x+2y-z=0\\ x-8y+5z=0\end{array}\right.$$

2.

$$\overrightarrow{u_h}=\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{rrr}i&j&k\\ -2&2&-4\\ 3&1&1\end{array}\right|=2(3,-5,-4)$$

$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_h}\\ \overrightarrow{u_r}\\ P_r\end{array}\right.\qquad \pi_2:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_h}\\ \overrightarrow{u_s}\\ P_s\end{array}\right.\qquad t:\left\{\begin{array}{l}\pi_1\\ \pi_2\end{array}\right.$$

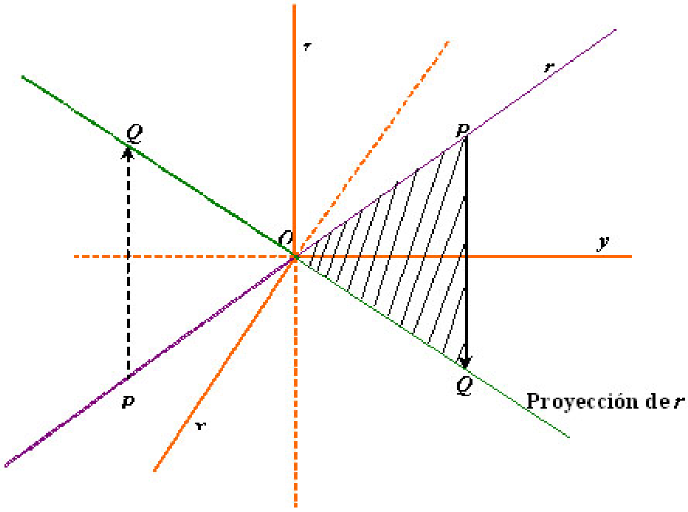
$$\pi_1:\left|\begin{array}{rrc}3&-2&x+1\\ -5&2&y-2\\ -4&-4&z\end{array}\right|=0,\quad \pi_2:\left|\begin{array}{rrc}3&3&x-2\\ -5&1&y+1\\ -4&1&z+2\end{array}\right|=0$$

$$h:\left\{\begin{array}{l}7x+5y-z-3=0\\ x+15y-18z-23=0\end{array}\right.$$

7.4. Junio 2006 - Opción B

Problema 7.4.1 *(2 puntos)* Sea r la recta que pasa por el origen de coordenadas O y tiene como vector director $\overrightarrow{v} = (4, 3, 1)$. Hallar un punto P contenido en dicha recta, tal que si se llama Q a su proyección sobre el plano $\pi : z = 0$, el triángulo OPQ tenga área 1.

Solución:



$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (4, 3, 1) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto de esta recta será: $P(4\lambda, 3\lambda, \lambda)$, y su proyección sobre el plano $z = 0$ será el punto $P(4\lambda, 3\lambda, 0)$.

Los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ forman el triángulo OPQ, para calcular el área calculamos el producto vectorial de estos dos vectores

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4\lambda & 3\lambda & \lambda \\ 4\lambda & 3\lambda & 0 \end{vmatrix} = (-3\lambda^2, 4\lambda^2, 0)$$

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = \frac{1}{2}\sqrt{9\lambda^4 + 16\lambda^4} = \frac{5\lambda^2}{2} = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Si $\lambda = \sqrt{\frac{2}{5}} \Longrightarrow P\left(4\sqrt{\frac{2}{5}}, 3\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

Si $\lambda = -\sqrt{\frac{2}{5}} \Longrightarrow P\left(-4\sqrt{\frac{2}{5}}, -3\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

Problema 7.4.2 *(2 puntos)* Determinar la posición relativa de las rectas:

$$r : \frac{x+4}{-3} = \frac{y-7}{4} = \frac{z}{1} \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 5z - 5 = 0 \\ 2x + y + 2z - 4 = 0 \end{array} \right.$$

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-3, 4, 1) \\ P_r(-4, 7, 0) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (3, -4, -1) \\ P_s(1, 2, 0) \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{P_rP_s} = (5, -5, 0)$$

$$|A| = \left| \begin{array}{rrr} 5 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

$$\text{Rango} \left(\begin{array}{rrr} 5 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{array} \right) = 2$$

Luego las rectas son paralelas.

Problema 7.4.3 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$M = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{array} \right)$$

1. (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro a.
2. (1,5 punto) Determinar para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcular dicha matriz inversa para $a = 2$.

Solución:

1.

$$|M| = -2a(a^2 - 1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \;\; a = 1, \;\; a = -1$$

Si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$ entonces $|M| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 3$.

Si $a = 0$

$$M = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{rr} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{array} \right| = 2 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$$

Si $a = 1$

$$M = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad \left| \begin{array}{rr} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{array} \right| = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$$

Si $a = -1$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(M) = 2$$

2. M es inversible para cualquier valor de a distinto de 0, 1 y -1.

   Si $a = 2$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Problema 7.4.4 *(3 puntos)* Se pide:

1. (1,5 punto) Estudiar y representar gráficamente la función:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

2. (1,5 puntos) Hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y = 1$, $x = 5/2$.

Solución:

1. *a)*
   - $Domf = R - \{2\}$, Punto de corte en $(0, 1/2)$.
   - Asíntotas:

     1) Verticales: $x = 2$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty$$

     2) Horizontales: $y = 2$

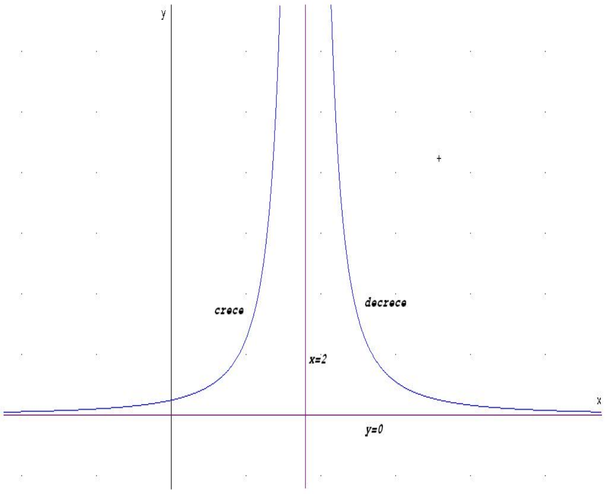
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0$$

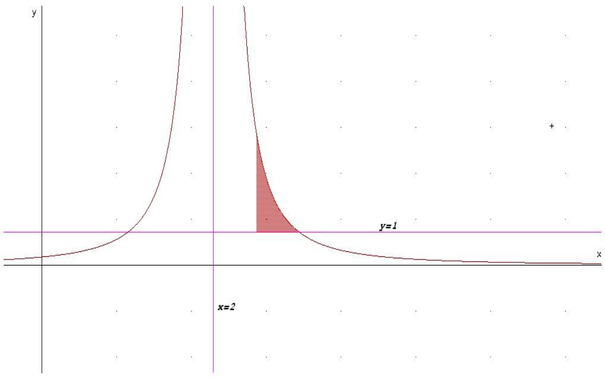
     3) Oblicuas: No hay al haber horizontales.
   - Monotonía:

$$f'(x) = \frac{2}{(x-2)^3} \neq 0$$

     Luego no hay ni máximos ni mínimos.

	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decrece	crece





2.

$$\frac{1}{(x-2)^2} = 1 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = 3$$

Como la recta $x = 5/2$ corta a las gráficas entre estos dos puntos, los límites de integración serán desde $x = 1$ a $x = 5/2$

3.

$$\frac{1}{(x-2)^2} = 1 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = 3$$

Como la recta $x = 5/2$ corta a las gráficas entre estos dos puntos, los límites de integración serán desde $x = 1$ a $x = 5/2$

$$S = \int_{5/2}^{3} \left(\frac{1}{(x-2)^2} - 1 \right) dx = -\frac{1}{x-2} - x \Big]_{5/2}^{3} = \frac{1}{2}$$

7.5. Septiembre 2006 - Opción A

Problema 7.5.1 *(2 puntos)* Calcular $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x}$

Solución:

$$\frac{1}{x^2+2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+Bx}{x^2+2x}$$

$$\begin{array}{ll} & 1 = A(x+2)+Bx \\ \text{si } x=0 & 1 = 2A \Longrightarrow A = 1/2 \\ \text{si } x=-2 & 1 = -2B \Longrightarrow B = -1/2 \end{array}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2} = \ln\sqrt{\frac{x}{x+2}}$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^2+2x} = \ln\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Problema 7.5.2 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Calcular los valores de a y b para que la función

   $$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 3x+2 & \text{si} & x<0 \\ x^2+2a\cos x & \text{si} & 0 \le x < \pi \\ ax^2+b & \text{si} & x \ge \pi \end{array} \right.$$

   sea continua en todo valor de x.

2. (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $f(x)$ para todos los valores a y b obtenidos en el apartado anterior.

Solución:

1. Continua en $x = 0$

   $$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0}(3x+2) = 2 \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0}(x^2+2a\cos x) = 2a \end{array}\right\} \Longrightarrow a = 1$$

   Continua en $x = \pi$

   $$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\longrightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \pi}(x^2+2a\cos x) = \pi^2 - 2a = \pi^2 - 2 \\ \\ \displaystyle\lim_{x\longrightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow \pi}(ax^2+b) = a\pi^2 + b = \pi^2 + b \end{array}\right\} \Longrightarrow b = -2$$

   $$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} 3x+2 & \text{si} & x<0 \\ x^2+2\cos x & \text{si} & 0 \le x < \pi \\ x^2-2 & \text{si} & x \ge \pi \end{array} \right.$$

2.
$$f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x - 2\sin x & \text{si} \quad 0 \le x < \pi \\ 2x & \text{si} \quad x \ge \pi \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 3 \\ \\ f'(0^+) = 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow \text{No es derivable en } x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(\pi^-) = 2\pi \\ \\ f'(\pi^+) = 2\pi \end{array} \right\} \Longrightarrow \text{Es derivable en } x = \pi$$

Problema 7.5.3 *(3 puntos)* Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. (1 punto) Comprobar que $|A^2| = |A|^2$, y que $|A + I| = |A| + |I|$
2. (0,5 puntos) Sea M una matriz cuadrada de orden 2. ¿Se puede asegurar que se cumple $|M^2| = |M|^2$?. Razonar la respuesta.
3. (1,5 puntos) Encontrar todas las matrices cuadradas M, de orden 2, tales que:
$$|M + I| = |M| + |I|$$

Solución:

1.
$$|A^2| = \left| \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$
$$|A|^2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-1) = 1$$
Luego $|A^2| = |A|^2$.
$$|A + I| = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -2 \end{vmatrix} = 0$$
$$|A| + |I| = -1 + 1 = 0 \Longrightarrow |A + I| = |A| + |I|$$

2. Si podemos asegurar que $|M^2| = |M|^2$:
$$|M^2| = |M \cdot M| = |M| \cdot |M| = |M|^2$$

3. $$M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb, \quad |I| = 1$$

$$|M + I| = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix} = (a+1)(d+1) - cd$$

$$(a+1)(d+1) - cd = ad - cb \Longrightarrow a = -d$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

Problema 7.5.4 *(3 puntos)* Se consideran los puntos $A(0,1,0)$ y $B(1,0,1)$. Se pide:

1. (1 punto) Escribir la ecuación que deben verificar los puntos $X(x,y,z)$ que equidistan de A y B.
2. (0,5 puntos) Determinar la ecuación que verifican los puntos $X(x,y,z)$ cuya distancia a A es igual a la distancia de A a B.
3. (1,5 puntos) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x,y,z)$ del plano $x+y+z=3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A.

Solución:

1. $d(A,X) = d(B,X)$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2}$$

$$2x - 2y + 2z - 1 = 0$$

Se trata de un plano que se llama mediador.

2. $d(A,B) = d(A,X)$

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = \sqrt{3}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2 = 0$$

Se trata de una esfera

3. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ como C es un punto del plano $x+y+z=3$ tendrá de coordenadas $C(3-\mu-\lambda, \mu, \lambda)$. Luego:

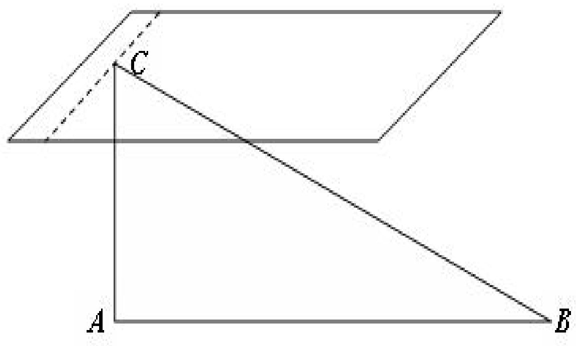
$$\overrightarrow{AC} = (3-\mu-\lambda, \mu, \lambda) - (0,1,0) = (3-\mu-\lambda, \mu-1, \lambda)$$

$$(3-\mu-\lambda, \mu-1, \lambda) \cdot (1,-1,1) = 3 - \mu - \lambda - \mu + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow \mu = 2$$

Luego los puntos de ese plano con la condición de perpendicularidad con el vector $\overrightarrow{AB}$ serán:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Se trata de una recta.



7.6. Septiembre 2006 - Opción B

Problema 7.6.1 *(2 puntos)*

1. (1 punto). Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y- & 3z = 0 \\ 2x+ & 3y- & z = 5 \end{array}\right.$$

2. (1 punto). Hallar la solución del sistema anterior tal que la suma de los valores correspondientes a cada una de las tres incógnitas sea igual a 4.

Solución:

1.

$$\left\{\begin{array}{rrr} x+ & y- & 3z = 0 \\ 2x+ & 3y- & z = 5 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -5 + 8\lambda \\ y = 5 - 5\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

2. $-5 + 8\lambda + 5 - 5\lambda + \lambda = 4 \Longrightarrow \lambda = 1$.

$$x = 3, \quad y = 0, \quad z = 1$$

Problema 7.6.2 *(2 puntos)*

1. (1 punto) Hallar todas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ distintas de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tales que $A^2 = A$

2. (1 punto)Para cualquiera de las matrices A obtenidas en el apartado a), calcular
$$M = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10}$$

Solución:

1.
$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 + ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 = a \\ a^2 + ab = a \\ b^2 = b \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a(a-1) = 0 \Longrightarrow a = 0, \ a = 1 \\ a(a+b-1) = 0 \\ b(b-1) = 0 \Longrightarrow b = 0, \ b = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow$$
$$\left\{ \begin{array}{l} a = 0, \ b = 1 \\ a = 1, \ b = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $A^2 = A$; $A^3 = A^2A = AA = A$; $A^4 = A^3A = AA = A \cdots A^{10} = A$ Luego:
$$M = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{10} = 10A = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 7.6.3 *(3 puntos)* Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide:

1. (1,5 puntos) Dibujar su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

2. (1,5 puntos) Calcular el área comprendida entre el eje OX y la gráfica de $f(x)$ entre $-1 \leq x \leq 1$.

Solución:

1. $Dom(f) = R$

Asíntotas:

- Verticales: No hay
- Horizontales:
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} xe^{2x} = \infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} xe^{2x} = \lim_{t \longrightarrow \infty} (-te^{-2t}) = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{t \longrightarrow \infty} \frac{-1}{-2e^{2t}} = 0$$
Luego cuando la $x \longrightarrow -\infty$ hay una asíntota $y = 0$
- Oblicuas: No hay por haber horizontales.

Monotonía:

$$f'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} = e^{2x}(1 + 2x) = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decrece	crece

La función es creciente en el intervalo: $(-1/2, \infty)$

La función es decreciente en el intervalo: $(-\infty, -1/2)$

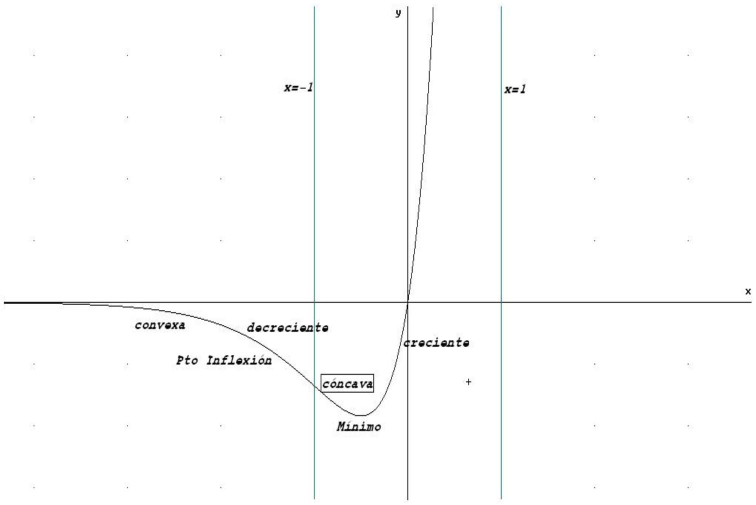
Como en el punto $(-1/2, -1/(2e))$ la función pasa de decrecer a crecer estamos ante un mínimo.

Curvatura:
$$f''(x) = 4e^{2x}(x + 1) = 0 \Longrightarrow x = -1$$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	convexa	cóncava

Como en el punto $(-1, -1/(e^2))$ la función pasa de convexa a cóncava estamos ante un punto de inflexión.

2.
$$\acute{A}rea = \left|\int_{-1}^{0} xe^{2x}\, dx\right| + \left|\int_{0}^{1} xe^{2x}\, dx\right|$$



La integral $\int xe^{2x}\,dx$ se resuelve por partes, llamamos:

$u = x \Longrightarrow du = dx$ y $dv = e^{2x}dx \Longrightarrow v = \dfrac{1}{2}e^{2x}$.

$$\int xe^{2x}\,dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = e^{2x}\left(\frac{2x-1}{4}\right) = F(x)$$

$$\acute{A}rea = |F(0)-F(-1)|+|F(1)-F(0)| = \left|\frac{3e^{-2}-1}{4}\right| + \left|\frac{e^2+1}{4}\right| = 2{,}245762562$$

Problema 7.6.4 *(3 puntos)* Un plano π corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,\lambda,0)$ y $C(0,0,4)$. Se pide:

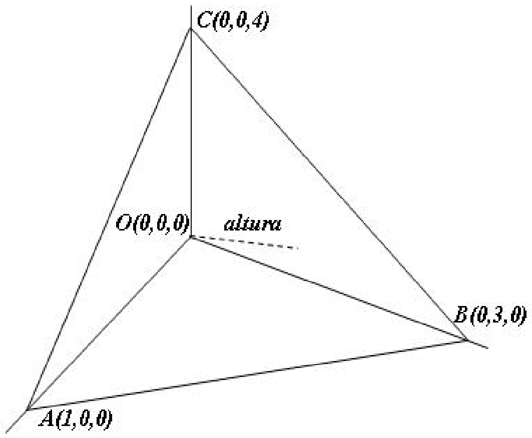
1. (1,5 puntos) Hallar el valor de $\lambda > 0$ de manera que el volumen del tetraedro $OABC$ (donde O es el origen), sea 2.
2. (1,5 puntos) Para el valor de λ obtenido en el apartado a), calcular la longitud de la altura del tetraedro $OABC$ correspondiente al vértice O.

Solución:

1.

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = (1,0,0) \\ \overrightarrow{OB} = (0,\lambda,0) \\ \overrightarrow{OC} = (0,0,4) \end{array}\right. \Longrightarrow V = \frac{1}{6}|\left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 4 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right|| = \frac{1}{6}|-4\lambda| = 2 \Longrightarrow$$

$$\frac{4\lambda}{6} = 2 \Longrightarrow \lambda = 3$$



2.

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (-1,0,4) \\ \overrightarrow{AB} = (-1,3,0) \\ A(1,0,0) \end{array}\right. \Longrightarrow \pi : \left|\begin{array}{ccc} -1 & -1 & x-1 \\ 0 & 3 & y \\ 4 & 0 & z \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow$$

$$\pi : 12x + 4y + 3z - 12 = 0$$

$$d(O,\pi) = \frac{|0+0+0-12|}{\sqrt{12^2+4^2+3^2}} = \frac{12}{13}\ u$$

Otra forma de resolver el problema sería:

$$S_{\text{base}} = \frac{1}{2}|\left|\begin{array}{ccc} i & j & k \\ -1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \end{array}\right|| = \frac{|(-12,-4,-3)|}{2} = \frac{13}{2}$$

$$V = \frac{1}{3}S_{\text{base}} \cdot h \Longrightarrow 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{13}{2} \cdot h \Longrightarrow h = \frac{12}{13}\ u$$

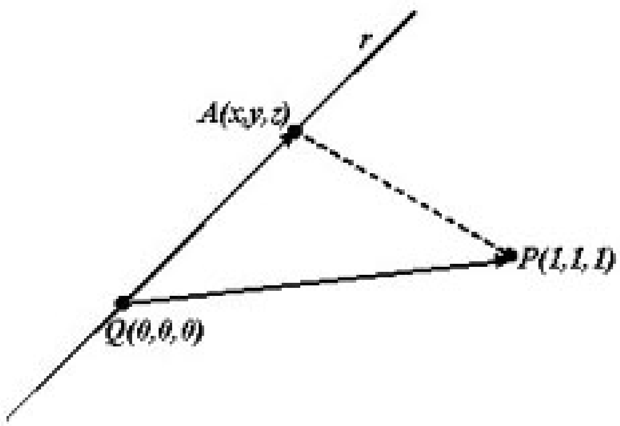
Capítulo 8

Año 2007

8.1. Modelo 2007 - Opción A

Problema 8.1.1 *(2 puntos)* Se considera la recta $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$ y el punto $P(1,1,1)$. Dado el punto $Q(0,0,0)$ de r, hallar todos los puntos A contenidos en r tales que el triángulo de vértices A, P y Q tenga área 1.

Solución:



Un punto $A(x,y,z)$ de la recta sería

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \Longrightarrow A(\lambda, \lambda, -\lambda)$$

$$\overrightarrow{QA} = (\lambda, \lambda, -\lambda), \quad \overrightarrow{QP} = (1,1,1)$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} i & j & k\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}|(2\lambda,-2\lambda,0)|=\sqrt{2\lambda^2}=1$$

Luego: $\lambda=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Problema 8.1.2 *(2 puntos)*

1. (1,5 puntos) Calcula la ecuación general de un plano π_1 que contiene a la recta
$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda\\ y=-1+2\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$
y es perpendicular al plano $\pi_2: 2x+y-z=2$.

2. (0,5 puntos) Determinar la ecuaciones paramétricas de la recta intersección de los planos π_1 y π_2.

Solución:

1.
$$r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,1)\\ P_r(1,-1,0)\end{array}\right. \qquad \overrightarrow{u_{\pi_2}}=(2,1,-1)$$
$$\pi_1:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,1)\\ \overrightarrow{u_{\pi_2}}=(2,1,-1)\\ P_r(1,-1,0)\end{array}\right. \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1\\ 2 & 1 & y+1\\ 1 & -1 & z\end{vmatrix}=0\Longrightarrow x-y+z-2=0$$

2.
$$\left\{\begin{array}{l} x-y+z-2=0\\ 2x+y-z-2=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{4}{3}\\ y=-\frac{2}{3}+\lambda\\ z=\lambda\end{array}\right.$$

Problema 8.1.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:
$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & ky+ & k^2z= & 1\\ x+ & ky- & kz= & k^2\\ -x+ & ky- & k^2z= & k^2\end{array}\right.$$

1. (2 punto) Discutirlo según los distintos valores de k.

2. (1 punto) Resolverlo para $k=-1$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & k & k^2 & 1 \\ 1 & k & -k & k^2 \\ -1 & k & -k^2 & k^2 \end{array} \right), \quad |A| = 2k^2(k+1) = 0 \Longrightarrow k = 0, \quad k = -1$$

Si $k \neq 0$ y $k \neq -1 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $k = 0$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El Rango$(A) = 1$, dado que las tres filas son iguales. Sin embargo el menor $\left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| = -1 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(\overline{A}) = 2$. Por tanto, Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene Solución).
Si $k = -1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

La matriz tiene dos primeras filas iguales, luego Rango(A) =Rango$(\overline{A}) <$ n$^{\text{o}}$ incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado (Infinitas Soluciones).

2.

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x- & y+ & z = & 1 \\ -x- & y- & z = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = -1 \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Problema 8.1.4 *(3 puntos)*

1. (1 puntos) Si f es una función continua, obtener $F'(x)$ siendo

$$F(x) = \int_0^x (f(t) + t^2 + t^3)\, dt$$

2. (2 punto) Si $f(1) = 1$ y además $\int_0^1 f(t)dt = 1$, hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto $(1, F(1))$.

Solución:

1. Por el teorema fundamental del cálculo sabemos que si f es una función continua si
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Longrightarrow F'(x) = f(x)$$
Luego $F'(x) = f(x) + x^2 + x^3$

2. $$m = F'(1) = f(1) + 2 = 3$$
$$F(1) = \int_0^1 (f(t)+t^2+t^3)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 t^3\,dt = 1 + \left.\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4}\right]_0^1 =$$
$$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$$
$$y - \frac{19}{4} = 3(x-1)$$

8.2. Modelo 2007 - Opción B

Problema 8.2.1 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = 6x^2 - x^3$, se pide:

1. (1 punto) Hallar un valor $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ sea paralela a la recta $y = -15x$.
2. (1 punto) Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de f y la parte positiva del eje OX.

Solución:

1. La pendiente de la recta tangente es $m = f'(a) = -15$
$$f'(x) = 12x - 3x^2 \Longrightarrow m = f'(a) = 12a - 3a^2 = -15 \Longrightarrow a = 5,\quad a = -1$$
Como $a > 0 \Longrightarrow$ la solución buscada es $a = 5$ y, por tanto, como $f(5) = 25 \Longrightarrow (5, 25)$ es el punto buscado.

2. Los puntos de corte con el eje OX son
$$6x^2 - x^3 = 0 \Longrightarrow x = 0,\quad x = 6$$
$$S = \int_0^6 (6x^2 - x^3)\,dx = \left. 2x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_0^6 = 108\,u^2$$

Problema 8.2.2 *(2 puntos)* Obtener el valor de k sabiendo que
$$\lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5} = e^2$$

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{kx+5}=[1^\infty]=e^\lambda$$

$$\lambda=\lim_{x\longrightarrow\infty}(kx+5)\left(\frac{x+3}{x}-1\right)=3k$$

Luego $3k=2\Longrightarrow k=\dfrac{2}{3}$.

Problema 8.2.3 *(3 puntos)* Se consideran el punto $P(1,0,1)$ y la recta:

$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$$

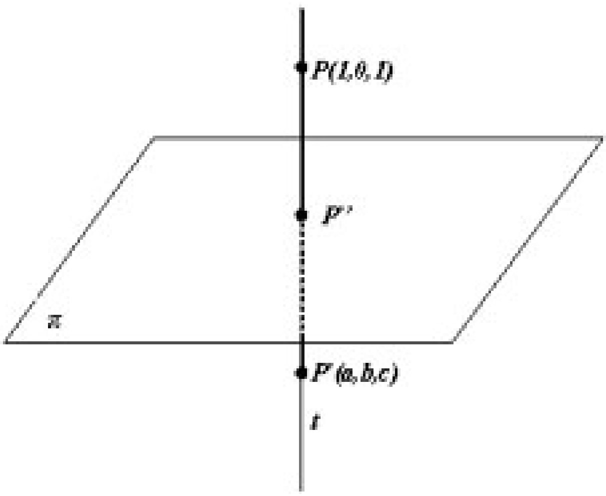
y el plano $\pi: x+y+z=0$. Se pide:

1. (1,5 puntos) Obtener un punto P', simétrico de P respecto del plano π.

2. (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta s que contiene al punto P, corta a la recta r y es paralela al plano π.

Solución:

1. Sería el siguiente dibujo Calculamos primero el punto P'' corte de la



recta t y el plano π, donde t es una recta perpedicular a π y que pasa por P.

$$t:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_t}=(1,1,1)\\P_t(1,0,1)\end{array}\right.\quad t:\left\{\begin{array}{l}x=1+\lambda\\y=\lambda\\z=1+\lambda\end{array}\right.$$

Sustituyendo este punto en el plano obtenemos el corte

$$1+\lambda+\lambda+1+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-\frac{2}{3} \Longrightarrow P''\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$$

P'' es el punto medio entre P y P'

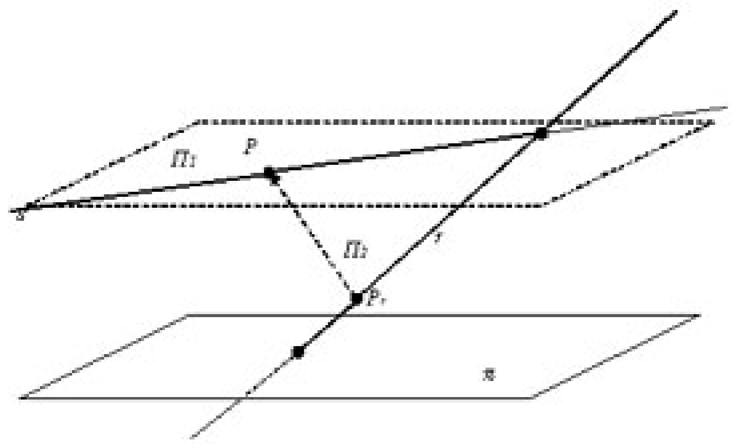
$$\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1+a}{2},\frac{b}{2},\frac{1+c}{2}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-\frac{1}{3} \\ b=-\frac{4}{3} \\ c=-\frac{1}{3} \end{array}\right. \Longrightarrow P'\left(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

2. Encontramos la recta como intersección de dos planos:

   El plano π_1 es paralelo a π y contiene a P

   El plano π_2 contiene a P y a r

   Sería el siguiente dibujo



$\pi_1 : x+y+z+\lambda=0$ y como contiene a $P \Longrightarrow 1+0+1+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-2 \Longrightarrow \pi_1 : x+y+z-2=0$

$$\pi_2 : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,2,-1) \\ \overrightarrow{PP_r}=(0,0,-2) \\ P(1,0,1) \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & x-1 \\ 2 & 0 & y \\ -1 & -2 & z-1 \end{array}\right|=0 \Longrightarrow 2x-y-2=0$$

$$t : \left\{\begin{array}{l} x+y+z-2=0 \\ 2x-y-2=0 \end{array}\right. \Longrightarrow t : \left\{\begin{array}{l} x=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\lambda \\ y=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 8.2.4 *(3 puntos)* Dada la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (1,5 punto) Determinar el rango de M según los valores del parámetro λ.

2. (1,5 punto) Determinar para qué valores de λ existe la matriz inversa de M. Calcular dicha inversa para $\lambda = 0$.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(\lambda^3 - 3\lambda + 2) = 0 \Longrightarrow \lambda = 1 \quad \lambda = -2$$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -2 \Longrightarrow |M| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(M) = 3$.

Si $\lambda = 1$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Las tres filas son iguales y, por tanto, el Rango$(M) = 1$.

Si $\lambda = -2$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(M) = 2$.

2. Si $\lambda = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

8.3. Junio 2007 - Opción A

Problema 8.3.1 *(2 puntos)* Estudiar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro m.

Solución:

$$|A| = m(m-2) = 0 \Longrightarrow m = 0, \quad m = 2$$

Si $m \neq 0$ y $m \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 3$.

Si $m = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{array}\right)$$

Luego en este caso el Rango$(A) = 2$.

Si $m = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}\right| \neq 0 \text{ (dos filas iguales)}$$

Luego en este caso el Rango$(A) = 2$.

Problema 8.3.2 *(2 puntos)* Sean las matrices

$$A = \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{cc} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{array}\right)$$

Hallar una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$

Solución:

$$XAX^{-1} = B \Longrightarrow XA = BX$$

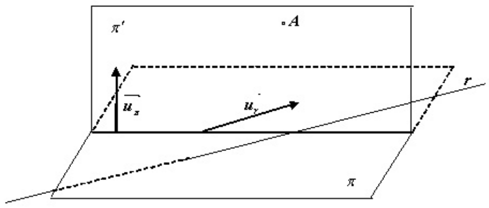
$$\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right) \Longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cc} 2a & -b \\ 2c & -d \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 8a-9c & 9b-9d \\ 6a-9c & b-d \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 6a-9c = 0 \\ b-d = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} b = d \\ c = 2/3a \end{array}\right.$$

$$X = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ 2/3a & b \end{array}\right), \quad \text{p.e } X = \left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{array}\right)$$

Problema 8.3.3 *(3 puntos)* Dados el punto $A(1, -2, -3)$, la recta $r : \left\{\begin{array}{l} x+y+1 = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$ y el plano $\pi : x - 2y - 3z + 1 = 0$, se pide:

1. (1,5 puntos) Ecuación del plano que pasa por A, es paralelo a r y perpendicular a π.



2. (1,5 puntos) Ecuación de la recta que pasa por A, corta a r y es paralela a π.

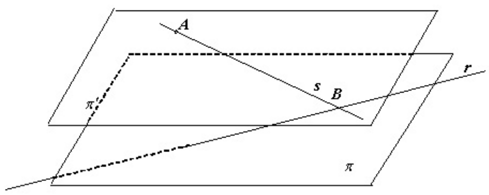
Solución:

1.

$$r:\left\{\begin{array}{l} x+y+1=0\\ z=0\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1-\lambda\\ y=\lambda\\ z=0\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(-1,1,0)\\ P_r(-1,0,0)\end{array}\right.$$

$$\pi: x-2y-3z+1=0 \Longrightarrow \overrightarrow{u_\pi}=(1,-2,-3)$$

$$\pi':\left|\begin{array}{ccc} -1 & 1 & x-1\\ 1 & -2 & y+2\\ 0 & -3 & z+3\end{array}\right|=0 \Longrightarrow \pi': 3x+3y-z=0$$



2. Construyo un plano π' paralelo a π que contenga a A:

$$x-2y-3z+\lambda=0 \Longrightarrow 1+4+9+\lambda=0 \Longrightarrow \lambda=-14$$

$$\pi': x-2y-3z-14=0$$

Corto con este plano a la recta r y obtengo el punto B:

$$-1-\lambda-2\lambda-14=0 \Longrightarrow \lambda=-5 \Longrightarrow B\,(4,-5,0)$$

La recta que buscamos pasa por A y B:

$$\overrightarrow{AB}=(3,-3,3)=3(1,-1,1)$$

$$s:\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s}=(1,-1,1)\\ P_s(1,-2,-3)\end{array}\right. \Longrightarrow s:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda\\ y=-2-\lambda\\ z=-3+\lambda\end{array}\right.$$

Problema 8.3.4 *(3 puntos)* Se considera la función $f(x) = x^2 + m$, donde $m > 0$ es una constante.

1. (1,5 puntos) Para cada valor de m hallar el valor de $a > 0$ tal que la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$ pase por el origen de coordenadas.

2. (1,5 puntos) Hallar el valor de m para que la recta $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x)$.

Solución:

1. $(a, f(a)) = (a, a^2 + m)$, $f'(x) = 2x \Longrightarrow f'(a) = 2a$. Luego la recta tangente sería: $y - a^2 - m = 2a(x - a)$. Si imponemos que pase por el punto $(0, 0) \Longrightarrow -a^2 - m = -2a^2 \Longrightarrow a = \sqrt{m}$ (la solución negativa no vale).

2. La recta $y = x$ tiene de pendiente $1 \Longrightarrow f'(a) = 2a = 1 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{2}$, luego el punto de tangencia es el $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, es decir, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + m = \frac{1}{2} \Longrightarrow m = \frac{1}{4}$$

8.4. Junio 2007 - Opción B

Problema 8.4.1 *(2 puntos)* Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 12}{x^2 + 4}$ calcular el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje OX.

Solución:

$$\frac{x^2 - 12}{x^2 + 4} = 0 \Longrightarrow x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$$

$$S = \left| \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4}\, dx \right|$$

$$F(x) = \int \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4}\, dx = \int \left(1 - 16\frac{1}{x^2 + 4}\right) dx = x - 16 \int \frac{1}{x^2 + 4}\, dx =$$

$$x - 16 \int \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} \right) dx = x - 4 \int \frac{2}{t^2 + 1}\, dt = x - 8 \arctan t = x - 8 \arctan \frac{x}{2}$$

$$S = |F(2\sqrt{3}) - F(-2\sqrt{3})| = \left| \frac{4(3\sqrt{3} - 4\pi)}{3} \right| = |-9,8269| = 9,8269\ u^2$$

Problema 8.4.2 *(2 puntos)* Dibujar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x}$$

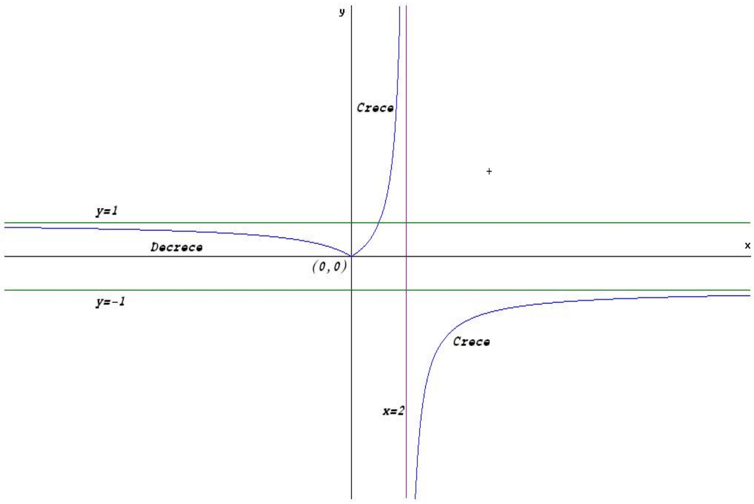
indicando su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento y asíntotas.

Solución:

$$f(x) = \frac{|x|}{2-x} = \begin{cases} -\dfrac{x}{2-x} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x}{2-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{(2-x)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{2}{(2-x)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Dominio: $\text{Dom}(f) = R - \{2\}$

Monotonía: La función es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y es creciente



en el intevalo $(0, 2) \cup (2, \infty)$. Asíntotas:

- Verticales:
  Si $x < 0$ no hay
  Si $x \geq 0 \Longrightarrow x = 2$:

$$\lim_{x \longrightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^-} \frac{x}{2-x} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x \longrightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 2^+} \frac{x}{2-x} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

- Horizontales:
  Si $x < 0 \Longrightarrow y = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{-x}{2-x} = 1$$

Si $x \geq 0 \Longrightarrow y = -1$:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x}{2-x} = -1$$

- Oblicuas: No hay al haber horizontales

Problema 8.4.3 *(3 puntos)* Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. (1,5 puntos) Encontrar las condiciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique $AB = BA$.
2. (1,5 puntos) Para $a = b = c = 1$, calcular B^{10}.

Solución:

1. $$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a-c=0 \\ b-c=0 \end{array} \right.$$
Las condición que debería de cumplir sería $a = b = c$

2. $$B^1 = \begin{pmatrix} 2^0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 2^1 & 2^1 & 0 \\ 2^1 & 2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$B^3 = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 & 0 \\ 2^2 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^4 = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3 & 0 \\ 2^3 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Luego:
$$A^{10} = \begin{pmatrix} 2^9 & 2^9 & 0 \\ 2^9 & 2^9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 8.4.4 *(3 puntos)* Sean los puntos

$$A(\lambda, 2, \lambda), \quad B(2, -\lambda, 0), \quad C(\lambda, 0, \lambda + 2)$$

1. (1 punto) ¿Existe algún valor de λ para el que los puntos A, B y C están alineados?
2. (1 punto) Comprobar que si A, B y C no están alineados el triángulo que forman es isósceles.
3. (1 punto) Calcular la ecuación del plano que contiene al triángulo ABC para el valor $\lambda = 0$ y hallar la distancia de este plano al origen coordenadas.

Solución:

1.

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & \lambda \\ 2 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = -2(\lambda^2+2\lambda+4) \neq 0 \text{ Siempre} \Longrightarrow \text{No están alineados}$$

2.

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2-\lambda, -\lambda-2, -\lambda) \\ \overrightarrow{AC} = (0, -2, 2) \\ \overrightarrow{BC} = (\lambda-2, \lambda, \lambda+2) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3\lambda^2+8} \\ |\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2} \\ |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3\lambda^2+8} \end{array}\right.$$

El triángulo que forman los puntos tiene dos lados iguales y otro desigual, se trata, por tanto, de un triángulo isósceles.

3.

$$\pi : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2, -2, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (0, -2, 2) \\ A(0, 2, 0) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (1, -1, 0) \\ \overrightarrow{v} = (0, -1, 1) \\ P(0, 2, 0) \end{array}\right.$$

$$\pi : \begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ -1 & -1 & y-2 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow \pi : x+y+z-2 = 0$$

$$d(O, \pi) = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ u^2$$

8.5. Septiembre 2007 - Opción A

Problema 8.5.1 *(2 puntos)* Hallar los puntos de la recta $r : \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z+1}{1}$ cuya distancia al plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ es igual a 1.

Solución:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 3+\lambda \\ y = 5+\lambda \\ z = -1+\lambda \end{array}\right. \quad \text{un punto de } r \;\; P(3+\lambda, 5+\lambda, z = -1+\lambda)$$

$$d(P,\pi)=\frac{|2(3+\lambda)-(5+\lambda)+2(-1+\lambda)+1|}{\sqrt{4+1+4}}=|\lambda|=1\Longrightarrow\lambda=\pm 1$$

Los puntos buscados son:

$$P_1(4,6,0),\quad P_2(2,4,-2)$$

Problema 8.5.2 *(2 puntos)* Sea consideran las rectas:

$$r:\left\{\begin{array}{c} x-y=3\\ x+y-z=0 \end{array}\right.\qquad s:\left\{\begin{array}{c} x-z=4\\ 2x-y=7 \end{array}\right.$$

Hallar la ecuación continua de la recta que contiene al punto $P(2,-1,2)$ y cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas anteriores.

Solución:

$$\overrightarrow{u_r}=\left|\begin{array}{rrr} i & j & k\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right|=(1,1,2),\quad \overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{rrr} i & j & k\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right|=-(1,2,1)$$

$$\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{rrr} i & j & k\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right|=(-3,1,1)\quad t:\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{1}=\frac{y-2}{1}$$

Problema 8.5.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & (k+1)y+ & 2z= & -1\\ kx+ & y+ & z= & k\\ (k-1)x- & 2y- & z= & k+1 \end{array}\right.$$

se pide:

1. (2 puntos) Discutirlo según los distintos valores de k.
2. (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & (k+1) & 2 & -1\\ k & 1 & 1 & k\\ (k-1) & -2 & -1 & k+1 \end{array}\right)$$

$$|A|=2k^2-5k+2=0\Longrightarrow k=\frac{1}{2},\;\; k=2$$

- Si $k\neq\frac{1}{2}$ y $k\neq 2\Longrightarrow|A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=$Rango$(\overline{A})=3=$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

- $k=\frac{1}{2}$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 2 & -1\\ 1/2 & 1 & 1 & 1/2\\ -1/2 & -2 & -1 & 3/2 \end{array}\right)$$

Como $|A|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 3/2\\ 1/2 & 1 \end{vmatrix}=-1/2 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2$. Por otra parte

$$\begin{vmatrix} 3/2 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1/2\\ -2 & -1 & 3/2 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

Como Rango$(A)\neq$Rango$(\overline{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

- $k=2$:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Observamos que la tercera fila es la diferencia de la segunda menos la primera, y como $\begin{vmatrix} 1 & 3\\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-5\neq 0 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

2.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 3y+ & 2z= & -1\\ 2x+ & y+ & z= & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7/5-1/5\lambda\\ y=-4/5-3/5\lambda\\ z=\lambda \end{array}\right.$$

Problema 8.5.4 *(3 puntos)*

1. (1,5 puntos) Hallar los máximos y los mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x)=\frac{3x^2+x+3}{x^2+1}$$

2. (1,5 puntos) Determinar una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$ y además $F(0)=4$.

Solución:

1.

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0 \Longrightarrow x=1,\ \ x=-1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	Decrece $\searrow$	Crece $\nearrow$	Decrece $\searrow$

Luego la función tiene un mínimo en el punto $(-1, 5/2)$ y un máximo en el $(1, 7/2)$.

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0 \Longrightarrow x = 0, \;\; x = \pm\sqrt{3}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, 0)$	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$

Como la función en estos tres puntos cambia de curvatura y hay continuidad, los tres son puntos de inflexión:

$$(0, 3), \;\; \left(\sqrt{3}, \frac{5\sqrt{3}}{4}\right), \;\; \left(-\sqrt{3}, \frac{11\sqrt{3}}{4}\right)$$

2.

$$F(x) = \int \frac{3x^2+x+3}{x^2+1}\,dx = 3x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

$$F(0) = 4 \Longrightarrow C = 4 \Longrightarrow F(x) = 3x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 4$$

8.6. Septiembre 2007 - Opción B

Problema 8.6.1 *(2 puntos)* Calcular una matriz cuadrada X sabiendo que verifica

$$XA^2 + BA = A^2$$

siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$XA^2 + BA = A^2 \Longrightarrow XA^2 = A^2 - BA \Longrightarrow X = (A^2 - BA)(A^2)^{-1}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$(A^2)^{-1} = I_3$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$$

Luego:

$$X = (A^2 - BA)(A^2)^{-1} = (I_3 - 2I_3)I_3 = -I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema 8.6.2 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z= & 3\\ 2x+ & 3y+ & z= & 5\end{array}\right.$$

se pide:

1. (1 punto) Calcular a y b de manera que al añadir una tercera ecuación de la forma $ax + y + bz = 1$ el sistema resultante tenga las mismas soluciones que el sistema original.

2. (1 punto) Calcular las soluciones del sistema dado tales que la suma de los valores de las incógnitas sea igual a 4.

Solución:

1. Para que las soluciones del sistema resultante sean las mismas que las del sistema del enunciado necesariamente la ecuación $ax + y + bz = 1$ tiene que ser combinación lineal de las otras dos de esa manera el sistema

   $$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z= & 3\\ 2x+ & 3y+ & z= & 5\\ ax+ & y+ & bz= & 1\end{array}\right. \quad \text{es Sistema Compatible Indeterminado}$$

   Si multiplicamos la primera ecuación por k y la segunda por l su suma será la ecuación $ax + y + bz = 1$, es decir $F_3 = kF_1 + lF_2$:

   $$\left\{\begin{array}{l} a = k + 2l\\ 2k + 3l = 1\\ -3k + l = b\\ 3k + 5l = 1\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} k = 2\\ l = -1\\ a = 0\\ b = -7\end{array}\right.$$

   La ecuación sería $y - 7z = 1$

2. $$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & 3z= & 3\\ 2x+ & 3y+ & z= & 5\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - 11\lambda\\ y = 1 + 7\lambda\\ z = \lambda\end{array}\right.$$

   Luego $(1-11\lambda)+(1+7\lambda)+\lambda = 4 \Longrightarrow \lambda = -\dfrac{2}{3}$ y sustituyendo tenemos:

   $$x = \frac{25}{3},\ \ y = -\frac{11}{3},\ \ z = \frac{2}{3}$$

Problema 8.6.3 *(3 puntos)* Sean las rectas

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}, \quad s: \left\{\begin{array}{l} x - 3y - 5 = 0\\ x - 3z - 8 = 0\end{array}\right.$$

1. (1,5 puntos) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

2. (1,5 puntos) Calcular la distancia entre el plano π y la recta s.

Solución:

1.
$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(1,-1,2)\\ \overrightarrow{u_s}=(3,1,0)\\ P_r(0,1,2)\end{array}\right. \quad \overrightarrow{u_s}=\left|\begin{array}{ccc} i & j & k\\ 1 & -3 & -5\\ 1 & -3 & -8\end{array}\right|=3(3,1,1)$$

$$\pi:\left|\begin{array}{ccc} 1 & 3 & x\\ -1 & 1 & y-1\\ 2 & 1 & z-2\end{array}\right|=-3x+5y+4z-13=0$$

$$\pi: 3x-5y-4z+13=0$$

2. Elejimos un punto de la recta s por ejemplo $P_s(2,-1,-2)$

$$d(P_s,\pi)=\frac{|6+5+8+13|}{\sqrt{9+25+16}}=\frac{32}{\sqrt{50}}=\frac{16\sqrt{2}}{5}\ u$$

Problema 8.6.4 *(3 puntos)* Sea $g(x)$ una función continua y derivable para todo valor real de x, de la que se conoce la siguiente información:

- $g'(x)>0$ para todo $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$, mientras que $g'(x)<0$ para todo $x\in(0,2)$.
- $g''(x)>0$ para todo $x\in(1,3)$ y $g''(x)<0$ para todo $x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$.
- $g(-1)=0,\ \ g(0)=2,\ \ g(2)=1.$
- $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} g(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} g(x)=3$

Teniendo en cuenta los datos anteriores, se pide:

1. (1 punto) Analizar razonadamente la posible existencia o no existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas.

2. (1 punto) Dibujar de manera esquemática la gráfica de la función $g(x)$.

3. (1 punto) Si $G(x)=\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$ encontrar un valor x_0 tal que su derivada $G'(x_0)=0$

Solución:

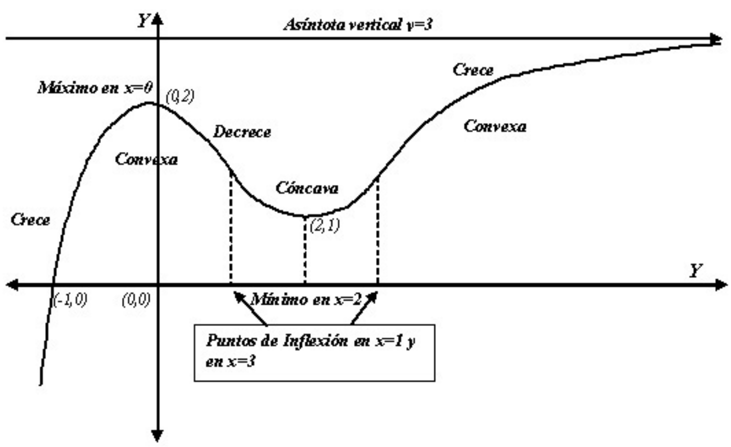
	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$g'(x)$	$+$	$-$	$+$
$g(x)$	Crece $\nearrow$	Decrece $\searrow$	Crece $\nearrow$

Como la función es continua y derivable en todo R, podemos asegurar que la función tiene un máximo en $x = 0$ y un mínimo en $x = 2$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$	Convexa $\cap$

Como la función es continua y derivable en todo R, podemos asegurar que la función tiene dos puntos de inflexión en $x = 1$ y en $x = 3$.

1. Asíntotas:
   - Verticales: No hay, ya que la función es continua y derivable en todo R.
   - Horizontales: en $y = 3$, ya que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = 3$
   - Oblicuas: No hay al haber horizontales
2. Su representación sería:



3. $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$, como $g(x)$ es continua y derivable podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo y tenemos que $G'(x) = g(x) \Longrightarrow G'(x_0) = g(x_0) = 0 \Longrightarrow x_0 = -1$

Capítulo 9

Año 2008

9.1. Modelo 2008 - Opción A

Problema 9.1.1 *(2 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

1. (1 punto) Hallar sus asíntotas y sus extremos locales.
2. (1 punto) Calcular los puntos de inflexión de $f(x)$ y dibujar la gráfica de $f(x)$.

Solución:

1. Asíntotas:
   - Verticales: No hay ya que el denominador no se anula nunca.
   - Horizontales:
   $$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \Longrightarrow y = 0$$
   $$\lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x}{e^x} = -\infty \Longrightarrow \text{No Hay}$$
   - Oblicuas: No hay al haber horizontales

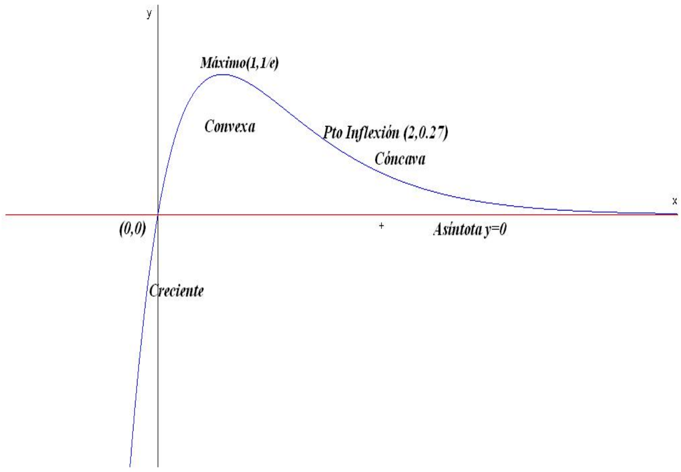
2. Representación gráfica

$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 1$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Creciente	Decreciente

Luego hay un máximo en el punto $(1, e^{-1})$

$$f''(x) = \frac{x-2}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 2$$



	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa	Cóncava

Problema 9.1.2 *(2 puntos)* Calcular:

1. (1 punto) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}$

2. (1 punto) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\dfrac{\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}}{n+5}$

Solución:

1.
$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{2+n}{1+n}\right)^{1-5n}=[1^\infty]=e^\lambda=e^{-5}$$
$$\lambda=\lim_{n\longrightarrow\infty}(1-5n)\cdot\left(\frac{2+n}{1+n}-1\right)=-5$$

2.
$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n}}{n+5}=$$
$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{(\sqrt{n^4+2n^3-3}-\sqrt{n^4-n})(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n})}{(n+5)(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n})}=$$
$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2n^3+n-3}{(n+5)(\sqrt{n^4+2n^3-3}+\sqrt{n^4-n})}=$$
$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{2+1/n^2-3/n^3}{(1+5/n)(\sqrt{1+2/n-3/n^4}+\sqrt{1-1/n^3})}=1$$

Problema 9.1.3 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y+ & mz = & m+2 \\ 2x+ & (m+1)y+ & (m+1)z = & -m \\ (m+2)x+ & 3y+ & (2m+1)z = & 3m+4 \end{array}\right.$$

1. (2 punto) Discutirlo según los valores del parámetro real m.
2. (1 punto) Resolverlo cuando tenga infinitas soluciones.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & m & m+2 \\ 2 & m+1 & m+1 & -m \\ m+2 & 3 & 2m+1 & 3m+4 \end{array}\right)$$

$$|A| = -(m+2)(m-1)^2 = 0 \Longrightarrow m = 1, \quad m = -2$$

Si $m \neq 1$ y $m \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ n^o de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $m = -2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -2 \end{array}\right), \quad \left|\begin{array}{rr} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}\right| = -3 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

Como $F_3 = 2F_1 - F_2$ podemos decir que Rango$(\overline{A}) = 2$ =Rango$(A) <$ n^o de incógnitas y, por tanto, el sistema es Compatible Indeterminado.

Si $m = 1$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

A la vista de la matriz se ve que el Rango$(A) = 1$ al tener las tres filas iguales, pero Rango$(\overline{A}) = 2 \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible (No tiene Solución).

2.

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & y- & 2z = & 0 \\ 2x- & y- & z = & 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2/3 + \lambda \\ y = -2/3 + \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 9.1.4 *(3 puntos)* Sean los puntos $A(1, 0, 2)$ y $B(1, 1, -4)$.

1. (1 punto) Determinar las coordenadas de los puntos P y Q que divide al segmento AB en tres partes iguales.

2. (1 punto) Si P es el punto del apartado anterior más próximo al punto A, determinar la ecuación del plano π que contiene a P y es perpendicular a la recta AB.

3. (1 punto) Determinar la posición relativa del plano π y la recta

$$r: \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

Solución:

1. $\overrightarrow{AB} = (1,1,-4) - (1,0,2) = (0,1,-6)$.

$$P = (1,0,2) + \frac{1}{3}(0,1,-6) = \left(1, \frac{1}{3}, 0\right)$$

$$Q = (1,0,2) + \frac{2}{3}(0,1,-6) = \left(1, \frac{2}{3}, -2\right)$$

2.

$$\pi : y - 6z + \lambda = 0 \Longrightarrow \frac{1}{3} + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$$

El plano buscado será: $\pi : 3y - 18z - 1 = 0$

3.

$$r : \left\{ \begin{array}{ll} x = & 3 - 2\lambda \\ y = & \lambda \\ z = & -1 + \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow 3\lambda - 18(-1+\lambda) - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{17}{15}$$

Luego el plano y la recta se cortan en el punto:

$$\left(3 - 2\frac{17}{15}, \frac{17}{15}, -1 + \frac{17}{15}\right) = \left(\frac{11}{15}, \frac{17}{15}, \frac{2}{15}\right)$$

9.2. Modelo 2008 - Opción B

Problema 9.2.1 *(2 puntos)* Hallar los puntos de la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} 2x + z = 0 \\ x - y + z = 3 \end{array} \right.$ cuya distancia al plano $\pi : 3x + 4y = 4$ es igual a $\frac{1}{3}$.

Solución:

$$\overrightarrow{u_r} = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array} \right| = (1,-1,-2), \;\; P_r(0,-3,0) \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = -2\lambda \end{array} \right.$$

$$P(\lambda, -3-\lambda, -2\lambda), \quad \pi : 3x + 4y = 4$$

$$d(P, \pi) = \frac{|3\lambda + 4(-3-\lambda) - 4|}{5} = \frac{1}{3} \Longrightarrow |-\lambda - 16| = \frac{5}{3} \Longrightarrow |\lambda + 16| = \frac{5}{3}$$

Tenemos dos soluciones:

$$\lambda + 16 = \frac{5}{3} \Longrightarrow \lambda = -\frac{43}{3} \Longrightarrow P\left(-\frac{43}{3}, -\frac{52}{3}, \frac{86}{3}\right)$$

$$\lambda + 16 = -\frac{5}{3} \Longrightarrow \lambda = -\frac{53}{3} \Longrightarrow P\left(-\frac{53}{3}, -\frac{62}{3}, \frac{106}{3}\right)$$

Problema 9.2.2 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(1, 3, -2)$, $B(2, 2k+1, k)$ y $C(k+1, 4, 3)$, se pide:

1. (1 punto) Determinar para qué valor de k el triángulo BAC es rectángulo, con el ángulo recto en el vértice A.

2. (1 punto) Para el valor $k = 0$ hallar el área del triángulo ABC.

Solución:

1.
$$\overrightarrow{AB} = (2, 2k+1, k) - (1, 3, -2) = (1, 2k-2, k+2)$$
$$\overrightarrow{AC} = (k+1, 4, 3) - (1, 3, -2) = (k, 1, 5)$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Longrightarrow k + 2k - 2 + 5k + 10 = 0 \Longrightarrow k = -1$$

2. Si $k = 0$:
$$\overrightarrow{AB} = (1, -2, 2), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, 5)$$
$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}| = |(-12, -5, 1)| = \frac{\sqrt{170}}{2}\, u^2$$

Problema 9.2.3 *(3 puntos)* Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

1. (1 punto) Hallar una matriz X tal que $AXA^{-1} = B$.

2. (1 punto) Calcular A^{10}.

3. (1 punto) Hallar todas las matrices M que satisfacen

$$(A - M)(A + M) = A^2 - M^2$$

Solución:

1. $AXA^{-1} = B \Longrightarrow X = A^{-1}BA$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow X = A^{-1}BA =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -21 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$$

2.

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$A^2 + AM - MA - M^2 = A^2 - M^2 \Longrightarrow AM = MA$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a+c = a \Longrightarrow c = 0 \\ b+d = a+b \Longrightarrow a = d \\ c = c \\ d = c+d \Longrightarrow c = 0 \end{cases}$$

La matriz buscada es:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

Problema 9.2.4 *(3 puntos)* Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si} \quad |x| < 2 \\ 1/x^2 & \text{si} \quad |x| \geq 2 \end{cases}$$

Se pide:

1. (1,5 punto) Calcular a y b para que f sea continua y derivable en todo R.

2. (1,5 punto) Para los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular el área de la región acotada limitada por la gráfica de f el eje horizontal y las rectas $x = 1$, $x = 3$.

Solución:

1.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+b & \text{si} \quad |x|<2 \\ 1/x^2 & \text{si} \quad |x|\geq 2 \end{cases} \Longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si} & x \leq -2 \\ ax^2+b & \text{si} & -2<x<2 \\ 1/x^2 & \text{si} & x\geq 2 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=-2$:

$$\lim_{x\longrightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\longrightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 2} (ax^2+b) = 4a+b$$

$$4a+b = \frac{1}{4} \Longrightarrow 16a+4b=1$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=2$: (Quedan los mismos resultados de $x=-2$)

La derivada será:

$$f'(x) = \begin{cases} -2/x^3 & \text{si} & x\leq -2 \\ 2ax & \text{si} & -2<x<2 \\ -2/x^3 & \text{si} & x\geq 2 \end{cases}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x=-2$:

$$f'(-2^-) = \frac{1}{4}, \quad f'(-2^+) = -4a$$

$$-4a = \frac{1}{4} \Longrightarrow a = -\frac{1}{16}$$

Para que $f(x)$ sea derivable en $x=2$: (Quedan los mismos resultados de $x=-2$)

$$4a = -\frac{1}{4} \Longrightarrow a = -\frac{1}{16}$$

Si $a = -\dfrac{1}{16} \Longrightarrow b = \dfrac{1}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{si} & x\leq -2 \\ -1/16x^2+1/2 & \text{si} & -2<x<2 \\ 1/x^2 & \text{si} & x\geq 2 \end{cases}$$

2. El signo de la función f en el intervalo $[1,2]$ es siempre positiva, y lo mismo ocurre en el intervalo $[2,3]$

$$-1/16x^2+1/2=0 \Longrightarrow x=\pm\sqrt{8}$$

Los íntervalos de integración serán $(1,2)$ y $(2,3)$

$$S_1=\int_1^2\left(-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}\right)\,dx=\left.\frac{-x^3}{48}+\frac{x}{2}\right]_1^2=\frac{17}{48}$$

$$S_2=\int_2^3\left(-\frac{1}{x^2}\right)\,dx=-\left.\frac{1}{x}\right]_2^3=\frac{1}{6}$$

$$S=S_1+S_2=\frac{17}{48}+\frac{1}{6}=\frac{25}{48}\;u^2$$

9.3. Junio 2008 - Opción A

Problema 9.3.1 *(3 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rrr} x- & ay= & 2\\ ax- & y= & a+1\end{array}\right.$$

se pide:

1. (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro a. Resolverlo cuando la solución sea única.
2. (1 punto) Determinar para qué valor o valores de a el sistema tiene solución en la que $y=2$.

Solución:

1.
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -a & 2\\ a & -1 & a+1\end{array}\right),\quad |A|=-1+a^2=0\Longrightarrow a=\pm 1$$

Si $a\neq\pm 1\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(A)=2=$Rango$(\overline{A}=$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas y el sistema es Compatible Determinado (solución única). Su solución sería, aplicando Cramer:

$$x=\frac{\left|\begin{array}{cc} 2 & -a\\ a+1 & -1\end{array}\right|}{-1+a^2}=\frac{a+2}{a+1},\quad y=\frac{\left|\begin{array}{cc} 1 & 2\\ a & a+1\end{array}\right|}{-1+a^2}=-\frac{1}{a+1}$$

Si $a=-1$
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 0\end{array}\right)$$

En este caso Rango$(A)=1$, mientras que Rango$(\overline{A})=2$ ya que el menor $\left|\begin{array}{cc} 1 & 2\\ -1 & 0\end{array}\right|=2\neq 0$. Como Rango$(A)\neq$Rango$(\overline{A})\Longrightarrow$ Sistema Incompatible (no tiene solución).

Si $a = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Está claro, que las dos filas son iguales y, por tanto, Rango$(A) = 1 =$Rango$(\overline{A}) <$ n^o de incógnitas y el sistema es Compatible Indeterminado (infinitas soluciones). Las soluciones, en este caso y aunque no las pida el problema son:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \end{array}\right.$$

2. $$2 = -\frac{1}{a+1} \Longrightarrow a = -\frac{3}{2}$$

Cuando $a = 1$ e $y = 2 \Longrightarrow x = 4$, luego las soluciones de a pedidas son $a = 1$ y $a = -\dfrac{3}{2}$.

Problema 9.3.2 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \left\{\begin{array}{l} x - ay = 2 \\ ay + z = 1 \end{array}\right. \qquad s : \left\{\begin{array}{l} x - z = 1 \\ y + z = 3 \end{array}\right.$$

se pide:

1. (1,5 puntos) Discutir la posición relativa de las dos rectas r, s según los valores del parámetro a.
2. (1,5 puntos) Si $a = 1$, calcular la distancia mínima entre las dos rectas r y s.

Solución:

$$r : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-a, -1, a) \\ P_r(2, 0, 1) \end{array}\right. \qquad s : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 1) \\ P_s(1, 3, 0) \end{array}\right.$$

1. $\overrightarrow{P_rP_s} = (-1, 3, -1)$

$$|A| = \left|\begin{array}{rrr} -a & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{array}\right| = 4a = 0 \Longrightarrow a = 0$$

Si $a \neq 0 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Se cruzan.

Si $a = 0$:

$$(A) = \left(\begin{array}{rrr} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

como $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Longrightarrow$ se cortan.

2. Si $a = 1$:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (-1, -1, 1) \\ P_r(2, 0, 1) \end{cases} \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (1, -1, 1) \\ P_s(1, 3, 0) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (-1, 3, -1)$$

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\, u$$

$$|\overrightarrow{P_rP_s}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = |\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}| = |(0, 2, 2)| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Problema 9.3.3 *(2 puntos)* Estudiar los siguientes límites:

1. (1 punto) $\lim_{x \longrightarrow +\infty} (e^x - x^2)$
2. (1 punto) $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x}$

Solución:

1.

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (e^x - x^2) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} e^x = \infty$$

ya que:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

2.

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{4^x + 5^x}{3^x + 6^x} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{5^x \left(\left(\frac{4}{5}\right)^x + 1\right)}{6^x \left(\left(\frac{3}{6}\right)^x + 1\right)} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^x + 1}{\left(\frac{3}{6}\right)^x + 1} = 0$$

Problema 9.3.4 *(2 puntos)* Obtener los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = x(\ln(x))^2$$

siendo $\ln(x)$ el logaritmo neperiano de x.

Solución:

$$f'(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = e^{-2}$$

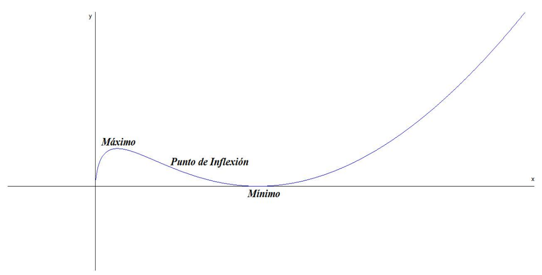
	$(0, e^{-2})$	$(e^{-2}, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función presenta un máximo en el punto $(e^{-2}, 4e^{-2})$ y un mínimo en $(1, 0)$.

$$f''(x) = \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{2}{x} = 0 \Longrightarrow x = e^{-1}$$

	$(0, e^{-1})$	(e^{-1}, ∞)
$f''(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$

La función presenta un punto de Inflexión en el (e^{-1}, e^{-1})



9.4. Junio 2008 - Opción B

Problema 9.4.1 *(3 puntos)* Dada la siguiente matriz de orden n:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_2.
2. (0,5 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_3.
3. (2 puntos) Calcular el determinante de la matriz A_5.

Solución:

1.
$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 10$$

2.
$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 10^2 = 100$$

3.
$$A_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 9 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 9 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 9 \end{vmatrix} = 10^4 = 10000$$

Problema 9.4.2 *(3 puntos)*

1. (1,5 puntos) Para cada valor de $c > 0$, calcular el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función:
$$f(x) = cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1$$
el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 1$.

2. (1,5 puntos) Hallar el valor de c para el cual el área obtenida en el apartado anterior es mínima.

Solución:

1.
$$cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow c^2x^4 + x^2 + c = 0$$
Esta ecuación no tiene soluciones para $0 < c < 10$, ya que el discriminate $1 - 4c^2 < 0$, ésto quiere decir que, la función no corta el eje OX en el intervalo $[0, 1]$ y, por tanto, los límites de integración del área buscada serán desde $x = 0$ hasta $x = 1$.
$$S = \left| \int_0^1 \left(cx^4 + \frac{1}{c}x^2 + 1 \right) \, dx \right| = \left| \frac{cx^5}{5} + \frac{x^3}{3c} + x \right]_0^1 \Bigg| = \frac{c}{5} + \frac{1}{3c} + 1$$
$$S(c) = \frac{3c^2 + 15c + 5}{15c}$$

2.
$$S'(c)=\frac{3c^2-5}{15c^2}=0\Longrightarrow c=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

	$(0,-\sqrt{5}/3)$	$(-\sqrt{5}/3,\sqrt{5}/3)$	$(\sqrt{5}/3,\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

La función presenta un máximo en $c=-\sqrt{5}/3$ y un mínimo en $c=\sqrt{5}/3$, que es el valor buscado.

Problema 9.4.3 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$, se pide:

1. (0,5 puntos) Demostrar que los cuatro puntos no son coplanarios.
2. (1 punto) Hallar la ecuación del plano π determinado por los puntos A, B y C.
3. (0,5 puntos) Hallar la distancia del punto D al plano π.

Solución:

1. Construimos los vectores:
$$\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,0,-2)\\ \overrightarrow{AC}=(0,1,-3)\\ \overrightarrow{AD}=(1,2,-1)\end{array}\right.\Longrightarrow\left|\begin{array}{ccc}1&0&-2\\0&1&-3\\1&2&-1\end{array}\right|=7\neq 0\Longrightarrow$$
Los cuatro puntos no son coplanarios.

2.
$$\pi:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,0,-2)\\ \overrightarrow{AC}=(0,1,-3)\\ A(0,0,1)\end{array}\right.\Longrightarrow\pi:\left|\begin{array}{ccc}1&0&x\\0&1&y\\-2&-3&z-1\end{array}\right|=0\Longrightarrow$$
$$\pi:2x+3y+z-1=0$$

3.
$$d(D,\pi)=\frac{|2+6-1|}{\sqrt{14}}=\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

Problema 9.4.4 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi:3x+2y-z+10=0$ y el punto $P(1,2,3)$, se pide:

1. (0,5 puntos) Hallar la ecuación de la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto P.
2. (0,5 puntos) Hallar el punto Q intersección de π con r.

3. (0,5 puntos) Hallar el punto R intersección de π con el eje OY.

4. (0,5 puntos) Hallar el área del triángulo PQR

Solución:

1. $$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=(3,2,-1)\\ P_r(1,2,3)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+3\lambda\\ y=2+2\lambda\\ z=3-\lambda\end{array}\right.$$

2. $$3(1+3\lambda)+2(2+2\lambda)-(3-\lambda)+10=0\Longrightarrow \lambda=-1$$

   Luego el punto buscado es el $Q(-2,0,4)$ (Sustituyendo el valor de λ en la recta r.

3. Cuando el plano π corta al eje OY tendremos que $x=0$ y $z=0$, luego $2y+10=0\Longrightarrow y=-5$. El punto buscado es $R(0,-5,0)$.

4. Construyo los vectores $\overrightarrow{RQ}=(-2,5,4)$ y $\overrightarrow{RP}=(1,7,3)$

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{RQ}\times\overrightarrow{RP}|=|\left|\begin{array}{ccc}i&j&k\\-2&5&4\\1&7&3\end{array}\right||=\frac{1}{2}|(-13,10,-19)|=\frac{3\sqrt{70}}{2}$$

9.5. Septiembre 2008 - Opción A

Problema 9.5.1 *(3 puntos)* Dada la función;

$$f(x)=e^{-x}(x^2+1)$$

se pide:

1. (2 puntos) Dibujar la gráfica de f, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.

2. (1 punto) Calcular:
$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

Solución:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$$

1. - Asíntotas:

     a) Verticales: No Hay

b) Horizontales:

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \infty$$

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal cuando $x \longrightarrow \infty$, pero no lo es cuando $x \longrightarrow -\infty$.

c) Oblicuas: No hay al haber horizontales

- Monotonía:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 1}{e^x} = -\frac{(x-1)^2}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 1$$

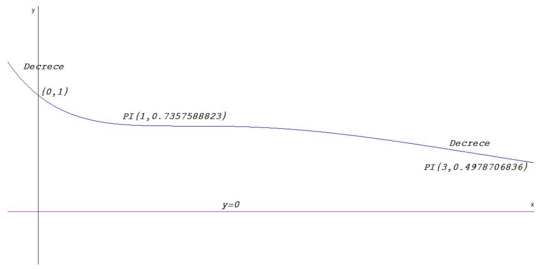
Además, $f'(x) \leq 0$ siempre y, por tanto, la función es siempre decreciente. Esto quiere decir que, la función no tiene ni máximos ni mínimos.

- Curvatura:

$$f''(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{e^x} = 0 \Longrightarrow x = 1, \;\; x = 3$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Cóncava $\cup$	Convexa $\cap$	Cóncava $\cup$

- Representación:



2. Se trata de una integral por partes donde $u = x^2 + 1 \Longrightarrow du = 2xdx$ y $dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x}$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x^2+1}{e^{-x}}\,dx = -e^{-x}(x^2+1) + 2\int xe^{-x}dx =$$

(Volviendo a resolver por partes $u = x \Longrightarrow du = dx$ y $dv = e^{-x}dx \Longrightarrow v = -e^{-x}$)

$$= -e^{-x}(x^2+1) + 2\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}\right] = -e^{-x}(x^2+1) - 2xe^{-x} - 2e^{-x} =$$

$$= -e^{-x}(x^2+2x+3) = -\frac{x^2+2x+3}{e^x}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^2+1}{e^x}\,dx = -\frac{x^2+2x+3}{e^x}\Big]_0^1 = 3 - \frac{6}{e}$$

Problema 9.5.2 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

se pide:

1. (1,5 puntos) Determinar el rango de A según los valores del parámetro a.
2. (1,5 puntos) Decir cuándo la matriz A es invertible. Calcular la inversa para $a = 1$.

Solución:

1. $$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = -2(a+1)(a^2+a-1) = 0 \Longrightarrow a = -1,\ a = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

   En los tres casos el Rango$(A) = 2$

2. Si $a \neq -1$ y $a \neq \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ la matriz A es invertible.

   Si $a = -1$ o $a = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$ la matriz A no es invertible.

   Cuando $a = 1$:

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema 9.5.3 *(2 puntos)* Dados los puntos $P(1,1,3)$ y $Q(0,1,0)$, se pide:

1. (1 punto) Hallar todos los puntos R tales que la distancia entre P y R sea igual a la distancia entre Q y R. Describir dicho conjunto de puntos.
2. (1 punto) Hallar todos los puntos S contenidos en la recta que pasa por P y Q que verifican dist$(P,S) = 2$dist(Q,S), donde "dist" significa distancia.

Solución:

1. Sea $R(x,y,z)$:

$$|\overrightarrow{PR}| = |\overrightarrow{QR}| \Longrightarrow |(x-1, y-1, z-3)| = |(x, y-1, z)| \Longrightarrow$$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} \Longrightarrow x+3z-5 = 0$$

Se trata, por tanto, de un plano.

2. La recta

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{QP} = (1,0,3) \\ Q(0,1,0) \end{array} \right. \Longrightarrow r : \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 3\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow S(\lambda, 1, 3\lambda)$$

$$|\overrightarrow{PS}| = 2|\overrightarrow{QS}| \Longrightarrow |(\lambda-1, 0, 3\lambda-3)| = 2|(\lambda, 0, 3\lambda)|$$

$$\sqrt{(\lambda-1)^2 + (3\lambda-3)^2} = 2\sqrt{\lambda^2 + (3\lambda)^2} \Longrightarrow (\lambda-1)^2 + (3\lambda-3)^2 = 4(\lambda^2 + (3\lambda)^2)$$

$$3\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1, \quad \lambda = \frac{1}{3}$$

Los puntos buscados serán:

$$S_1(-1,1,-1) \text{ y } S_2\left(\frac{1}{3}, 1, 1\right)$$

Problema 9.5.4 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}, \quad s : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4}$$

hallar la ecuación de la recta t perpendicular común a ambas.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (1,2,3) \\ P_r(-1,2,0) \end{array} \right. , \quad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,3,4) \\ P_s(0,1,0) \end{array} \right.$$

$$u_t = \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{array} \right| = (-1, 2, -1)$$

Obtengo la recta t como intersección de dos planos:

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (-1,2,-1) \\ \overrightarrow{u_r} = (1,2,3) \\ P_r(-1,2,0) \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (-1,2,-1) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,3,4) \\ P_s(0,1,0) \end{array} \right.$$

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} -1 & 1 & x+1 \\ 2 & 2 & y-2 \\ -1 & 3 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 4x + y - 2z + 2 = 0$$

$$\pi_2 : \begin{vmatrix} -1 & 2 & x \\ 2 & 3 & y-1 \\ -1 & 4 & z \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow 11x + 2y - 7z - 2 = 0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 4x + y - 2z + 2 = 0 \\ 11x + 2y - 7z - 2 = 0 \end{array} \right.$$

9.6. Septiembre 2008 - Opción B

Problema 9.6.1 *(3 puntos)*

1. (1,5 puntos) Calcular:
$$\int x^3 \ln(x)\, dx$$
donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de x.

2. (1,5 puntos) Utilizar el cambio de variable
$$x = e^t - e^{-t}$$
para calcular:
$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$$
<u>*Indicación*</u> : Para deshacer el cambio de variable utilizar:
$$t = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}\right)$$

Solución:

1. Se trata de una integral por partes, donde hacemos: $u = \ln x \Longrightarrow du = \dfrac{dx}{x}$ y $dv = x^3 dx \Longrightarrow v = \dfrac{x^4}{4}$
$$\int x^3 \ln(x)\, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4}\int x^3\, dx = \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4} = \frac{4x^4 \ln x - x^4}{16} + C$$

2. $x = e^t - e^{-t} \Longrightarrow dx = (e^t + e^{-t})dt$
$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx = \int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{4 + (e^t - e^{-t})^2}}\, dt = \int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}}}\, dt =$$
$$\int \frac{e^t + e^{-t}}{\sqrt{(e^t + e^{-t})^2}}\, dt = \int \frac{e^t + e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\, dt = \int dt = t = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}\right) + C$$

Problema 9.6.2 *(3 puntos)* Dados el plano:

$$\pi_1 : x + y + z = 1$$

y la recta:

$$r : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$$

se pide:

1. (1 punto) Hallar el punto P determinado por la intersección de r con π_1.

2. (2 puntos) Hallar el plano π_2 paralelo a π_1 y tal que el segmento de la recta r comprendido entre los planos π_1, π_2 tenga longitud $\sqrt{29}$ unidades.

Solución:

1. Ponemos la ecuación paramétrica de la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = -4\lambda \end{array} \right.$$

Sustituimos en el plano: $1 + 2\lambda - 1 + 3\lambda - 4\lambda = 1 \Longrightarrow \lambda = 1$, luego el punto buscado es: $P(3, 2, -4)$.

2. Calculamos un punto $Q(1 + 2\lambda, -1 + 3\lambda, -4\lambda)$ de la recta r que dista $\sqrt{29}$ unidades del punto P calculado anteriormente:

$$|\overrightarrow{PQ}| = |(-2+2\lambda, -3+3\lambda, 4-4\lambda)| = \sqrt{4(\lambda - 1)^2 + 9(\lambda - 1)^2 + 16(1 - \lambda)^2} =$$

$$\sqrt{29}(\lambda - 1) = \sqrt{29} \Longrightarrow \lambda = 2$$

Luego $Q(5, 5, -8)$ que, estará contenido en el plano que buscamos π_2 cuya ecuación será: $x + y + z = \mu$ por ser paralelo a π_1. Para calcular μ sustituimos el punto Q en el plano π_2 y tenemos

$$\mu = 5 + 5 - 8 = 2 \Longrightarrow \pi_2 : x + y + z = 2$$

La otra solución sería:

$$\sqrt{29}(1 - \lambda) = \sqrt{29} \Longrightarrow \lambda = 0$$

Luego $Q(1, -1, -4)$ que, estará contenido en el plano que buscamos π_2 cuya ecuación será: $x + y + z = \mu$ por ser paralelo a π_1. Para calcular μ sustituimos el punto Q en el plano π_2 y tenemos

$$\mu = 1 - 1 - 4 = -4 \Longrightarrow \pi_2 : x + y + z = -4$$

Problema 9.6.3 *(2 puntos)* Resolver el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x & -2y & +\ z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & +\ z & +3v & = & 4 \\ 2x & -4y & +2z & -6v & = & -8 \\ 2x & & +2z & & = & 0 \end{array}\right.$$

Solución:

$$A = \left(\begin{array}{rrrrr} 1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & 2 & -6 & -8 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Observando la matriz vemos que, la 1^{a} columna es igual a la 3^{a}, y la segunda es igual a la 4^{a} multiplicada por dos, luego el Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 < 4$ n^{o} de incógnitas y se trata de un Sistema Compatible Indeterminado con $4 - 2 = 2$ grados de libertad. Es decir, necesitaremos dos parámetros para su solución.

Como las dos primeras filas son linealmente independientes el sitema a resolver será:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrr} x & -2y & +z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & +z & +3v & = & 4 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\lambda \\ \\ y = \dfrac{4-3\mu}{2} \\ \\ z = \lambda \\ v = \mu \end{array}\right.$$

Problema 9.6.4 *(2 puntos)* El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.

Solución:

x: n^{o} de billetes de 50 euros

y: n^{o} de billetes de 20 euros

z: n$^{\text{o}}$ de billetes de 10 euros

$$\left\{\begin{array}{c} 50x + 20y + 10z = 7000 \\ x + y + z = 225 \\ x + z = 2y \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 100 \\ y = 75 \\ z = 50 \end{array}\right.$$

Capítulo 10

Año 2009

10.1. Modelo 2009 - Opción A

Problema 10.1.1 *(3 puntos)* Dados el plano $\pi : x + 2y - z = 2$, la recta:

$$r : \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-5}{4}$$

y el punto $P(-2, 3, 2)$, perteneciente al plano π, se pide:

1. (0,5 puntos) Determinar la posición relativa de π y r.

2. (1 punto) Calcular la ecuación de la recta t contenida en π, que pasa por el punto P y que corta perpendicularmente a r.

3. (1,5 puntos) Sea Q el punto intersección de r y t. Si s es la recta perpendicular al plano π y que contiene a P, y R es un punto cualquiera de s, probar que la recta determinada por R y Q es perpendicular a r.

Solución:

1. De dos formas difrentes:

   - La ecuación de la recta en paramétricas es $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{array} \right.$, y si sustituimos en el plano π tenemos:

     $$(3 + 2\lambda) + 2(2 + \lambda) - (5 + 4\lambda) = 2 \Longrightarrow 2 = 2$$

     expresión que se cumple para cualquier punto de la recta independientemente del valor de λ y, por tanto, la recta r está contenida en el plano π.

- Ponemos la recta r como intersección de dos planos:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{z-5}{4} \Longrightarrow 2x - z = 1$$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} \Longrightarrow x - 2y = -1$$

  Ahora estudiamos el sistema formado por estos dos planos y el plano π

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & 2y- & z = & 2 \\ x- & 2y & = & -1 \\ 2x & - & z = & 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

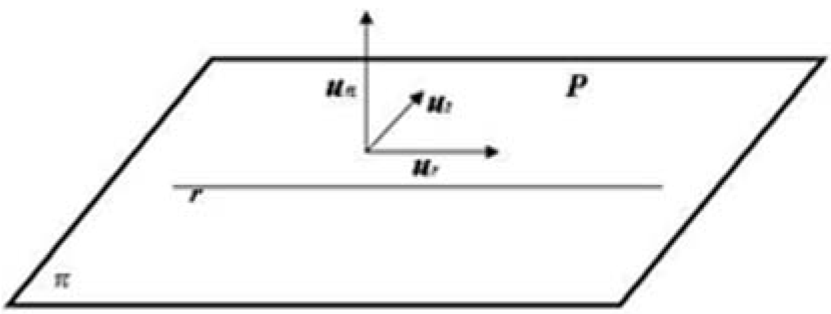
$$\left.\begin{array}{c} |A| = 0 \text{ y } \left|\begin{array}{rr} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{array}\right| = -4 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2 \\ \\ F_3 = F_1 + F_2 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

  Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 2 <$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado.

  El plano π y la recta r tienen infinitos puntos comunes y, por tanto, la recta está contenida en el plano.

2. Para que el enuciado tenga sentido es necesario que el punto P esté en el plano π, basta sustituir el punto en el plano para comprobarlo.

   El vector $\overrightarrow{u_t}$ de la recta t que buscamos tiene que ser perpendicular



   al vector característico del plano $\overrightarrow{u_\pi} = (1, 2, -1)$ y al vector director $\overrightarrow{u_r} = (2, 1, 4)$ de la recta r. Luego:

$$\overrightarrow{u_t} = \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{u_r} = \left|\begin{array}{rrr} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right| = 3(3, -2, -1)$$

$$t:\begin{cases}\overrightarrow{u_t}=(3,-2,-1)\\ P(-2,3,2)\end{cases}\Longrightarrow t:\frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$$

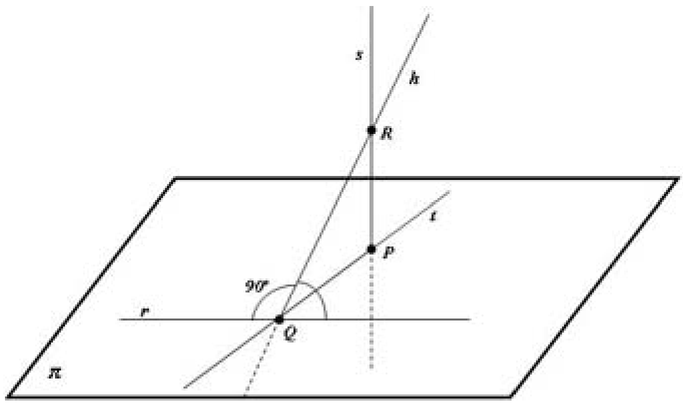
Evidentemente esta recta tiene que estar contenida en el plano π.

3. La situación geométrica es la siguiente:

   Tenemos que encontrar una recta s perpendicular al plano π y que pase por el punto P

$$s:\begin{cases}\overrightarrow{u_\pi}=(1,2,-1)\\ P(-2,3,2)\end{cases}\Longrightarrow s:\begin{cases}x=-2+\lambda\\ y=3+2\lambda\\ z=2-\lambda\end{cases}$$

   Un punto cualquiera R de la recta s es $R(-2+\lambda,3+2\lambda,2-\lambda)$.



   Ahora buscamos el punto de corte Q entre las rectas t y r

$$r:\begin{cases}x=3+2\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=5+4\lambda\end{cases},\quad t:\begin{cases}x=-2+3\mu\\ y=3-2\mu\\ z=2-\mu\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}3+2\lambda=-2+3\mu\\ 2+\lambda=3-2\mu\\ 5+4\lambda=2-\mu\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}\lambda=-1\\ \mu=1\end{cases}\Longrightarrow Q(1,1,1)$$

   Sólo nos queda por comprobar que los vectores $\overrightarrow{QR}=(-3+\lambda,2+2\lambda,1-\lambda)$ y $\overrightarrow{u_r}=(2,1,4)$ son siempre perpendiculares. Para ello calculamos su producto escalar y debe de ser cero independientemente del valor del parámetro λ

$$\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{u_r}=(-3+\lambda,2+2\lambda,1-\lambda)\cdot(2,1,4)=-6+2\lambda+2+2\lambda+4-4\lambda=0$$

   Luego la recta h que pasa por los puntos Q y R es siempre perpendicular a la recta r sea cual sea el punto R que tomemos de la recta s.

Problema 10.1.2 *(3 puntos)* Sea:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\ \\ \dfrac{7}{12}\left(1 - (x-2)^2\right) & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

1. (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $f(x)$.
2. (1 punto) Hallar los máximos y mínimos locales de $f(x)$
3. (1 punto) Dibujar la gráfica de $f(x)$.

Solución:

1. (1 punto) Continuidad:

$$\lim_{x \longrightarrow (3/2)^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow (3/2)} \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{7}{16}$$

$$\lim_{x \longrightarrow (3/2)^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow (3/2)^+} \frac{7}{12}\left(1 - (x-2)^2\right) = \frac{7}{16}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{16}$$

Luego:

$$\lim_{x \longrightarrow (3/2)^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow (3/2)^+} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{16} \Longrightarrow$$

f es continua en $x = \dfrac{3}{2}$

Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\ \\ \dfrac{-7(x-2)}{6} & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'\left(\frac{3}{2}^-\right) = -\frac{3}{4} \\ f'\left(\frac{3}{2}^+\right) = \frac{7}{12} \end{cases}$$

Luego:

$$f'\left(\frac{3}{2}^-\right) \neq f'\left(\frac{3}{2}^+\right)$$

La función no es derivable en $x = 3/2$

2. Estudiamos su representación gráfica

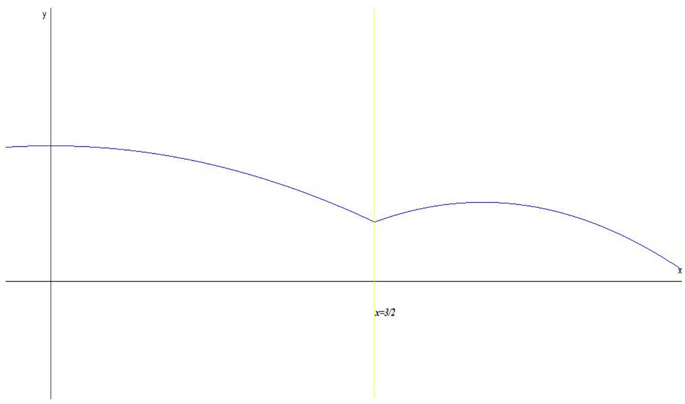
   Primero los extremos

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{2} = 0 & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{-7(x-2)}{6} = 0 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\ x = 2 & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

   Recurrimos a la segunda derivada para ver de que tipo son

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow \text{Máximo} & \text{si} \quad x < \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{-7}{6} \Longrightarrow \text{Máximo} & \text{si} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

x	$f(x)$
0	1
3/2	7/16
2	7/12



Problema 10.1.3 *(2 puntos)* Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x- & y = & 3 \\ 2x- & 3y = & 2k \\ 3x- & 5y = & k \end{cases}$$

1. (1 punto) Discutirlo según los distintos valores del parámetro k.

2. (1 punto) Resolverlo en los casos en que sea posible.

Solución:

1.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 3\\ 2 & -3 & 2k\\ 3 & -5 & k \end{array}\right)$$

$$|\overline{A}|=3(k-1)=0\Longrightarrow k=1$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-1\neq 0\Longrightarrow$ el Rango$(A)=2$ independientemente del valor de k.

Si $k\neq 1\Longrightarrow |\overline{A}|\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})=3\neq$Rango$(A)=2=$ nº de incógnitas y el sistema es Incompatible, es decir, no tiene solución.

Si $k=1$:

$\overline{A}=\left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 3\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & -5 & 1 \end{array}\right)$, $|\overline{A}|=0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-1\neq 0\Longrightarrow$ Rango$(\overline{A})=2$

Luego en este caso Rango$(A)=$Rango$(\overline{A})=2=$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado, es decir, tiene solución única.

2.

$$\left\{\begin{array}{rrl} x- & y= & 3\\ 2x- & 3y= & 2 \end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=7\\ y=4 \end{array}\right.$$

Problema 10.1.4 *(2 puntos)* Resolver la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2\\ x-1 & x+1 & x+1\\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix}=0$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 2(x^2-1) & x+1 & (x+1)^2\\ x-1 & x+1 & x+1\\ (x-1)^2 & x-1 & x^2-1 \end{vmatrix}=(x+1)(x-1)\begin{vmatrix} 2(x-1) & 1 & x+1\\ x-1 & x+1 & x+1\\ x-1 & 1 & x+1 \end{vmatrix}=$$

$$(x+1)^2(x-1)\begin{vmatrix} 2(x-1) & 1 & 1\\ x-1 & x+1 & 1\\ x-1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{bmatrix} F_1\\ F_2-F_1\\ F_3-F_1 \end{bmatrix}=(x+1)^2(x-1)\begin{vmatrix} 2(x-1) & 1 & 1\\ -(x-1) & x & 0\\ -(x-1) & 0 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$(x+1)^2(x-1)^2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1\\ -1 & x & 0\\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-(x^2-1)^2\begin{vmatrix} 1 & 1\\ x & 0 \end{vmatrix}=x(x^2-1)^2=0\Longrightarrow x=\pm 1$$

10.2. Modelo 2009 - Opción B

Problema 10.2.1 *(3 puntos)* Dados el punto $P(1,-1,2)$ y el plano π : $2x-y+z=11$, se pide:

1. (1,5 puntos) Determinar el punto Q de intersección del plano π con la recta perpendicular a π que pasa por P. Hallar el punto simétrico del punto P respecto del plano π.

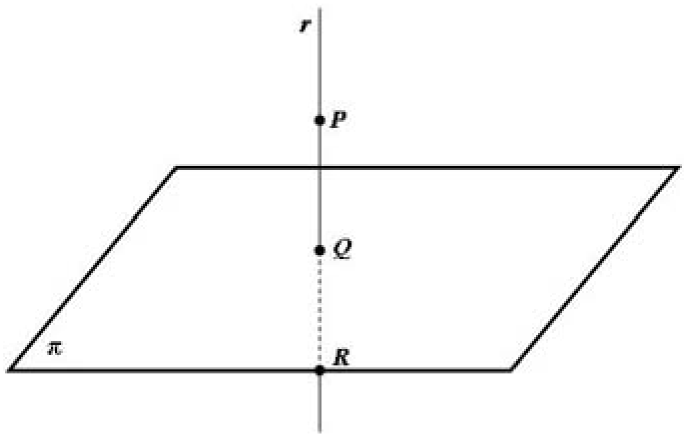
2. (1,5 puntos) Obtener la ecuación del plano paralelo al plano π que contiene al punto H que se encuentra a $5\sqrt{6}$ unidades del punto P en el sentido del vector $\overrightarrow{PQ}$.

Solución:

1. Tenemos

$$r:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u_r}=\overrightarrow{u_\pi}=(2,-1,1)\\ P_r=P(1,-1,2)\end{array}\right. \Longrightarrow r:\left\{\begin{array}{l}x=1+2\lambda\\ y=-1-\lambda\\ z=2+\lambda\end{array}\right.$$

Sustituyendo en el plano tenemos



$$2(1+2\lambda)-(-1-\lambda)+(2+\lambda)-11=0 \Longrightarrow \lambda=1$$

Sustituyendo este valor en r tenemos $Q(3,-2,3)$.

El punto Q es el punto medio entre P y el punto R que buscamos

$$Q=\frac{P+R}{2}\Longrightarrow R=2Q-P=2(3,-2,3)-(1,-1,2)=(5,-3,4)$$

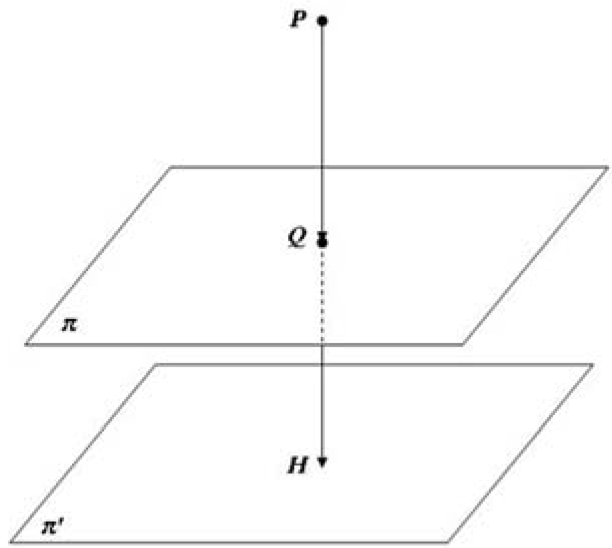
Luego $R(5,-3,4)$ es el punto simétrico de P respecto del plano π.

2. El vector $\overrightarrow{PQ} = (2, -1, 1) = \overrightarrow{u_\pi}$ y es perpedicular al plano π. Tenemos

$$H = P + \lambda \cdot \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow \overrightarrow{PH} = -\lambda \cdot \overrightarrow{u_\pi} \Longrightarrow$$

$$|\overrightarrow{PH}| = \lambda|\overrightarrow{u_\pi}| = \lambda\sqrt{6} = 5\sqrt{6} \Longrightarrow \lambda = 5$$

Luego el punto $H = (1, -1, 2) + 5(2, -1, 1) = (11, -6, 7)$. El plano π' que buscamos contiene a este punto y tiene el mismo vector característico que π



$$\pi' : 2x - y + z = \lambda \Longrightarrow 22 + 6 + 7 = \lambda \Longrightarrow \lambda = 35 \Longrightarrow 2x - y + z = 35$$

Nota: Podemos comprobar si $d(P, \pi') = 5\sqrt{6}$:

$$d(P, \pi') = \frac{|2 + 1 + 2 - 35|}{\sqrt{6}} = \frac{30}{\sqrt{6}} = 5\sqrt{6}$$

y también podemos comprobar que

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6} \text{ y } |\overrightarrow{QH}| = \sqrt{64 + 16 + 16} = 4\sqrt{6}$$

La suma de ambos módulos nos vuelve a dar $5\sqrt{6}$.

Problema 10.2.2 *(3 puntos)* Si $A = (C_1, C_2, C_3)$ es una matriz cuadrada de orden 3 con columnas C_1, C_2, C_3, y se sabe que $det(A) = 4$, se pide:

1. (1 punto) Calcular $det(A^3)$ y $det(3A)$.

2. (2 puntos) Calcular $det(B)$ y $det(B^{-1})$, siendo $B = (2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)$ la matriz cuyas columnas son:

$$2C_3, C_1 - C_2, 5C_1$$

Solución:

1.
   - $|A^3| = |A| \cdot |A| \cdot |A| = 4^3 = 64$
   - $|3A| = |(3C_1, 3C_2, 3C_3)| = 3^3|A| = 27 \cdot 4 = 108$

2.
   - $|B| = |(2C_3, C_1 - C_2, 5C_1)| = -10|(C_1, C_1 - C_2, C_3)| =$

     $= -10\,[(C_1, C_1, C_3) - (C_1, C_2, C_3)] = 10|A| = 40$
   - Si $|B \cdot B^{-1}| = 1 \Longrightarrow |B| \cdot |B^{-1}| = 1 \Longrightarrow |B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|} = \dfrac{1}{40}$

Problema 10.2.3 *(2 puntos)* Sea:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$$

1. (1 punto) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f en $x = 0$.

2. (1 punto) Estudiar cuándo se verifica que $f'(x) = 0$. Puesto que $f(1) = f(-1)$, ¿existe contradicción con el teorema de Rolle en el intervalo $[-1, 1]$?

Solución:

$$f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1} = \begin{cases} -\frac{x}{x^2+1} & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{x}{x^2+1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

1. Continuidad:

$$\lim_{x \longrightarrow 0)^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0} \left(-\frac{x}{x^2 + 1} \right) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right) = 0$$

$$f\,(0) = 0$$

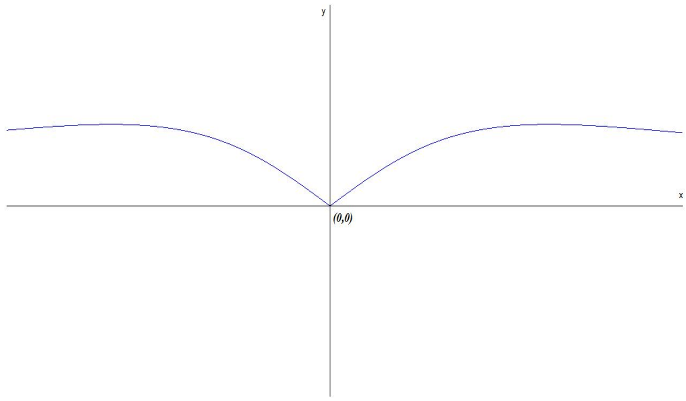
Luego:

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = f\,(0) = 0 \Longrightarrow$$

f es continua en $x = 0$

Derivabilidad:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'\,(0^-) = -1 \\ f'\,(0^+) = 1 \end{cases}$$



Luego:

$$f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

La función no es derivable en $x = 0$

2. Para que se cumplan las hipótesis del teorema de Rolle la función debe ser continua en el intervalo $(-1, 1)$ y derivable en el intervalo $[-1, 1]$, lo cual no es cierto según el apartado anterior.

Problema 10.2.4 *(3 puntos)* Sea

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ \ln x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

donde $\ln x$ significa logaritmo neperiano de x. Hallar el área de la región acotada limitada por la gráfica de $f(x)$, y por la recta $y = 1$.

Solución:

- Comprobamos si hay continuidad en el punto $x = 1$

$$\lim_{x \longrightarrow 1)^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} \left((x-1)^2 \right) = 0$$

$$\lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} (\ln x) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Luego:

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0 \Longrightarrow$$

f es continua en $x = 1$

- Calculamos los puntos de corte de $f(x)$ con $y = 1$

$$\left\{\begin{array}{lll} (x-1)^2 = 1 & \text{si} & x \le 1 \\ \ln x = 1 & \text{si} & x > 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x = 0 & \text{si} & x \le 1 \\ x = e & \text{si} & x > 1 \end{array}\right.$$

- Calculamos el área:

$$S = |S_1| + |S_2|$$

Resolvemos las integrales por separado

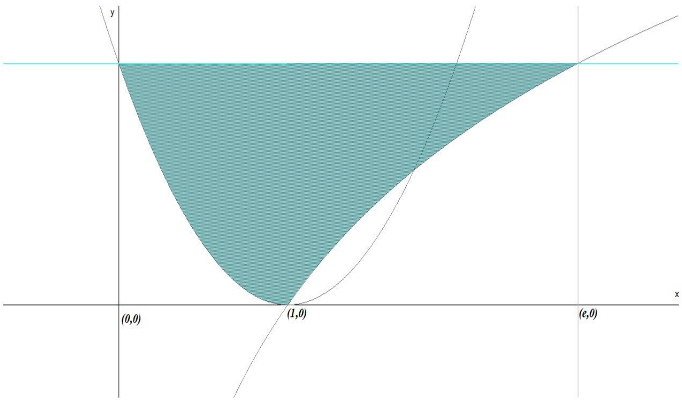
$$S_1 = \int_0^1 (1 - (x-1)^2)dx = -\frac{x^3}{3} + x^2\Big]_0^1 = \frac{2}{3} \Longrightarrow |S_1| = \frac{2}{3}$$

La siguiente integral se resuelve por partes $u = \ln x \Longrightarrow u' = dx/x$ y $dv = dx \Longrightarrow v = x$

$$\int (1 - \ln x)dx = x - \left(x \ln x - \int dx\right) = 2x - x \ln x$$

$$S_2 = \int_1^e (1 - \ln x)dx = 2x - x \ln x]_1^e = e - 2 \Longrightarrow |S_2| = e - 2$$

$$S = \frac{2}{3} + e - 2 = e - \frac{4}{3}\, u^2$$



10.3. Junio 2009 - Opción A

Problema 10.3.1 *(3 puntos)* Dado el plano $\pi : x + 3y + z = 4$, se pide:

1. (1 punto) Calcular el punto simétrico P del punto $O(0, 0, 0)$ respecto del plano π.

2. (1 punto) Calcular el coseno del ángulo α que forman el plano π y el plano $z = 0$.

3. (1 punto) Calcular el volumen del tetraedro T determinado por el plano π, y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Solución:

1. Tres pasos:

   - Calculo $r \perp \pi$ que pasa por $O(0, 0, 0)$:

   $$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 3, 1) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

   - Calculo el punto de corte Q de π con r:

   $$\lambda + 3(3\lambda) + \lambda = 4 \Longrightarrow \lambda = \frac{4}{11} \Longrightarrow Q\left(\frac{4}{11}, \frac{12}{11}, \frac{4}{11}\right)$$

   - P es el punto simétrico de O respecto de Q:

   $$\frac{P + O}{2} = Q \Longrightarrow P = 2Q - O = \left(\frac{8}{11}, \frac{24}{11}, \frac{8}{11}\right)$$

2. $$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

3. Si $y = 0$, $z = 0 \Longrightarrow A(4, 0, 0)$
   Si $x = 0$, $z = 0 \Longrightarrow B(0, 4/3, 0)$
   Si $x = 0$, $y = 0 \Longrightarrow C(0, 0, 4)$

$$\overrightarrow{OA} = (4, 0, 0),\ \ \overrightarrow{OB} = (0, 4/3, 0),\ \ \overrightarrow{OC} = (0, 0, 4)$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right| = \frac{32}{9}\ u^2$$

Problema 10.3.2 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\begin{cases} 4x+ & 4\lambda y+ & 2z = & 2\lambda \\ \lambda x+ & y- & \lambda z = & \lambda \\ 4\lambda x+ & 4\lambda y+ & \lambda z = & 9 \end{cases},$$

Se pide:

1. (2 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ.

2. (1 punto) Resolver el sistema para $\lambda = -1$.

Solución:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 4\lambda & 2 & 2\lambda\\ \lambda & 1 & -\lambda & \lambda\\ 4\lambda & 4\lambda & \lambda & 9 \end{array}\right) \quad |A|=-4\lambda(5\lambda^2-6\lambda+1)=0 \Longrightarrow \lambda=0 \;\; \lambda=1 \;\; \lambda=\frac{1}{5}$$

- Si $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq 1$ y $k\neq 1/5 \Longrightarrow |A|\neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A})$ = 3 =n^o de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $\lambda=0$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{array}\right)$$

  Como$|A|=0$ y $\left|\begin{array}{cc} 4 & 0\\ 0 & 1 \end{array}\right|=4\neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A)=2$.

  Como

$$\left|\begin{array}{ccc} 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 9 \end{array}\right|=-18\neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A})=3$$

  Luego el sistema es incompatible.

- Si $\lambda=1$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 4 & 2 & 2\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 4 & 4 & 1 & 9 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A})=3\\ \text{Rango}(A)=2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

  Sistema es Incompatible.

- Si $\lambda=1/5$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 4/5 & 2 & 2/5\\ 1/5 & 1 & -1/5 & 1/5\\ 4/5 & 4/5 & 1/5 & 9 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A})=3\\ \text{Rango}(A)=2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

  Sistema es Incompatible.

Si $\lambda = -1$

$$\left\{\begin{array}{rrrr} 4x- & 4y+ & 2z= & -2 \\ -x+ & y+ & z= & -1 \\ -4x- & 4y- & z= & 9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-1 \\ z=-1 \end{array}\right.$$

Problema 10.3.3 *(2 puntos)* Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(x+1)}$$

según los valores del parámetro α

Solución:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(x+1)} = [1^\infty] = e^\lambda$$

$$\lambda = \lim_{x\longrightarrow +\infty}(x+1)\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}-1\right) = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(\frac{x+1}{\alpha x^2+4x+8}\right)$$

Si $\alpha = 0 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow$:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1+\frac{1}{4x+8}\right)^{(x+1)} = e^{1/4}$$

Si $\alpha \neq 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow$:

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha x^2+4x+8}\right)^{(x+1)} = e^0 = 1$$

Problema 10.3.4 *(2 puntos)* Calcular la integral:

$$F(x) = \int_0^x t^2\, e^{-t}\, dt$$

Solución:

Se trata de una integral que se resuelve por partes:

$$\left(u = t^2 \Longrightarrow du = 2tdt;\quad dv = e^{-t}\, dt \Longrightarrow v = -e^{-t}\right)$$

$$\int t^2\, e^{-t}\, dt = -t^2e^{-t} + 2\int te^{-t}\, dt =$$

$$\left(u = t \Longrightarrow du = dt;\quad dv = e^{-t}\, dt \Longrightarrow v = -e^{-t}\right)$$

$$= -t^2e^{-t}+2\left[-te^{-t}+\int e^{-t}\, dt\right] = -t^2e^{-t}+2\left[-te^{-t}-e^{-t}\right] = -e^{-t}\left(t^2+2t+2\right)$$

$$F(x) = \int_0^x t^2\, e^{-t}\, dt = -e^{-t}\left(t^2+2t+2\right)\Big]_0^x = -e^{-x}(x^2+2x+2)+2$$

10.4. Junio 2009 - Opción B

Problema 10.4.1 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{1}, \quad s: \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1},$$

se pide:

1. (1 punto) Hallar la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.
2. (1 punto) Determinar la distancia entre las rectas r y s.
3. (1 punto) Estudiar si la recta t paralela a r y que pasa por $O(0,0,0)$ corta a la recta s.

Solución:

1.

$$r: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,3,1) \\ P_r(1,2,0) \end{array} \right. , \quad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,1,1) \\ P_s(-2,0,2) \end{array} \right. \Longrightarrow \pi: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,3,1) \\ \overrightarrow{u_s} = (2,1,1) \\ P_r(1,2,0) \end{array} \right.$$

$$\pi: \left| \begin{array}{ccc} 2 & 2 & x-1 \\ 3 & 1 & y-2 \\ 1 & 1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow x - 2z - 1 = 0$$

2. $\overrightarrow{P_rP_s} = (-3,-2,2)$:

$$\left| \left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s} \right] \right| = | \left| \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \end{array} \right| | = |-14| = 14$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = | \left| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right| | = |(2,0,-4)| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$d(r,s) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s} \right] \right|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{14}{2\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} \ u$$

3.

$$t: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (2,3,1) \\ P_t(0,0,0) \end{array} \right. \quad s: \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (2,1,1) \\ P_s(-2,0,2) \end{array} \right. \Longrightarrow \overrightarrow{P_tP_s} = (-2,0,2)$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{array} \right| = -12 \Longrightarrow \text{Se cruzan}$$

Problema 10.4.2 *(3 puntos)* Si la derivada de la función $f(x)$ es:

$$f'(x) = (x-1)^3(x-5)$$

Obtener:

1. (1 punto) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
2. (1 punto) Los valores de x en los cuales f tiene máximos relativos, mínimos relativos, o puntos de inflexión.
3. (1 punto) La función f sabiendo que $f(0) = 0$

Solución:

1.

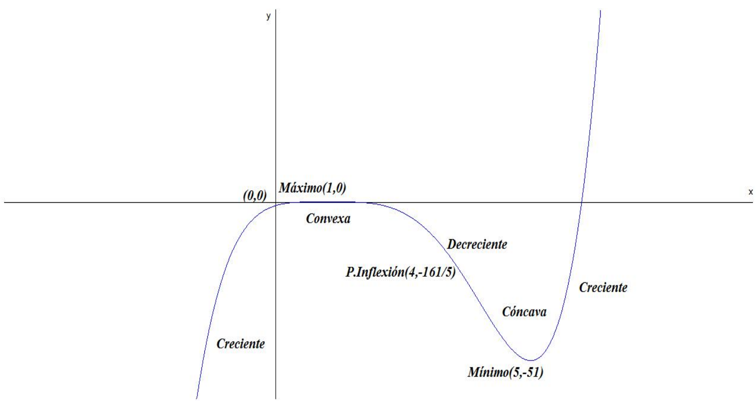
	$(-\infty, 1)$	$(1, 5)$	$(5, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente $\nearrow$	Decreciente $\searrow$	Creciente $\nearrow$

2. En $x = 1$ hay un máximo y en $x = 5$ hay un mínimo. Para calcular los puntos de inflexión calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = 4(x-4)(x-1)^2$$

$f''(x) = 0 \Longrightarrow x = 4$ y $x = 1$. El único posible punto de inflexión es $x = 4$ ya que en $x = 1$ hay un máximo:

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa$\cap$	Convexa$\cap$	Cóncava$\cup$



3.

$$f(x) = \int \left[x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5\right] dx = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x + C$$

$$f(0) = 0 + C = 0 \Longrightarrow C = 0$$

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 5x$$

Problema 10.4.3 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = \lambda \\ \lambda x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

1. (1,5 puntos) Discutir el sistema según los valores del parámetro λ
2. (0,5 punto) Resolver el sistema cuando sea posible

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & \lambda \\ \lambda & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \quad |\overline{A}| = -(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0 \Longrightarrow \lambda = 2 \;\; \lambda = 6$$

- Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq 6 \Longrightarrow |\overline{A}| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) \neq$Rango$(\overline{A})$ luego en este caso el sistema será Incompatible.

- Si $\lambda = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

Sistema es Compatible Determinado.

- Si $\lambda = 6$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 6 \\ 6 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \Longrightarrow \begin{cases} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{cases} \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Determinado.

2. Cuando $\lambda = 2$:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

Cuando $\lambda = 6$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y = 6 \\ 6x - 2y = 4 \\ 3x - y = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -4 \\ y = -14 \end{array}\right.$$

Problema 10.4.4 *(2 puntos)* Dada la matriz:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{array}\right)$$

se pide:

1. (1 punto) Estudiar el rango de A según los distintos valores del parámetro a.

2. (1 punto) Obtener la matriz inversa de A para $a = -1$

Solución:

1. $A = a^3 - 3a + 2 = 0 \Longrightarrow a = 1, \;\; a = -2$

   Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 3$.

   Si $a = 1$:
   $$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 1$$

   Si $a = -2$:
   $$A = \left(\begin{array}{rrr} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$$

2. Si $a = -1$:
   $$A = \left(\begin{array}{rrr} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{rrr} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{array}\right)$$

10.5. Septiembre 2009 - Opción A

Problema 10.5.1 *(3 puntos)* Dada la matriz:

$$M = \left(\begin{array}{ccr} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right);$$

1. (1,25 puntos). Determinar los valores del prámetro m para los cuales la matriz M es invertible.

2. (0,5 puntos). Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.

3. (1,25 puntos). Para $m = -1$ calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de M.

Solución:

1. $|M| = 2m(m-1) = 0 \Longrightarrow m = 0, \ \ m = 1.$

   Si $m \neq 0$ y $m \neq 1 \Longrightarrow$ existe M^{-1}.

   Si $m = 0$ o $m = 1 \Longrightarrow$ no existe M^{-1}.

2. M^{25} no es inversible si $|M^{25}| = 0 \Longrightarrow |M|^{25} = 0 \Longrightarrow |M| = 0$. Luego M^{25} es inversible si $m \neq 0$ y $m \neq 1$

3. $$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -3/4 & 1 \\ 1/4 & -1/4 & 1 \\ -1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Problema 10.5.2 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} & \text{si} \quad 1 + ax > 0 \ \text{ y } \ x \neq 0 \\ \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} \qquad\qquad x = 0 \end{cases},$$

Se pide:

1. (1,5 puntos) Hallar los valores de los parámetros a, b para los cuales la función f es continua en $x = 0$.

2. (1,5 puntos). Para $a = b = 1$, estudiar si la función f es derivable en $x = 0$ aplicando la definición de derivada.

Solución:

1. $$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+ax) - bx}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{a - b - abx}{2x + 2ax^2}$$

   Si $a \neq B$ este límite no tiene solución, por tanto continuamoscon la condición de que $a = b$:

   $$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{a - b - abx}{2x + 2ax^2} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{-a^2x}{2x + 2ax^2} = -\frac{a^2}{2} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow a = b = \pm 1$$

2. Si $a = b = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} & \text{si} \quad 1 + x > 0 \ \text{ y } \ x \neq 0 \\ \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} \qquad\qquad x = 0 \\ \end{cases}$$

La definición de derivada en el punto 0 es

$$f'(0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$f(0+h) = \frac{\ln(1+h) - h}{h^2}, \quad f(0) = -\frac{1}{2}$$

$$f'(0) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+h)-h}{h^2} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - h - h^2}{2h^3} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1 - 2h}{6h^2} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{-3 - 2h}{6h + 6h^2} = \left[\frac{-3}{0}\right] = \pm\infty$$

Luego no es derivable en el punto $x = 0$.

Problema 10.5.3 *(2 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}, \quad s : \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1},$$

determinar los valores de los parámetros a, b para los cuales las rectas r, s se cortan perpendicularmente.

Solución:

$$r : \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (1, 2, a) \\ P_r(0, 0, 0) \end{cases}, \quad s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = (b, 1, -1) \\ P_s(3, 0, 3) \end{cases}, \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (3, 0, 3)$$

Si r y s son perpendiculares:

$\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_s} \Longrightarrow \overrightarrow{u_r} \cdot \overrightarrow{u_s} = 0 \Longrightarrow -a + b = -2$

Si r y s se cortan:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ b & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow a + 2b = -1$$

$$\begin{cases} -a + b = -2 \\ a + 2b = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ ab + 2b = -1 \end{cases}$$

Problema 10.5.4 *(2 puntos)* Dado el plano $\pi : 2x - y + 2z + 1 = 0$ hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π.

Solución:

La ecuación de un plano paralelo a π es $\pi' : 2x - y + 2z + \lambda = 0$ y un plano del plano π puede ser $P(0,1,0)$ y tendremos que $d(P, \pi') = 3$:

$$d(P, \pi') = \frac{|0 - 1 + 0 + \lambda|}{3} = \frac{|\lambda - 1|}{3} = 3 \Longrightarrow |\lambda - 1| = 9$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\lambda + 1 = 9 \Longrightarrow \lambda = -8 \Longrightarrow \pi' : 2x - y + 2z - 8 = 0 \\ \lambda - 1 = 9 \Longrightarrow \lambda = 10 \Longrightarrow \pi' : 2x - y + 2z10 = 0 \end{array} \right.$$

10.6. Septiembre 2009 - Opción B

Problema 10.6.1 *(3 puntos)*

1. (1 punto). Dada la función:

   $$f(x) = \frac{x}{1 - x^2},$$

   hallar el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.

2. (0,5 puntos). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$.

3. (1,5 puntos). Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demostrar que existe al menos un punto c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $g'(c) = 1$.

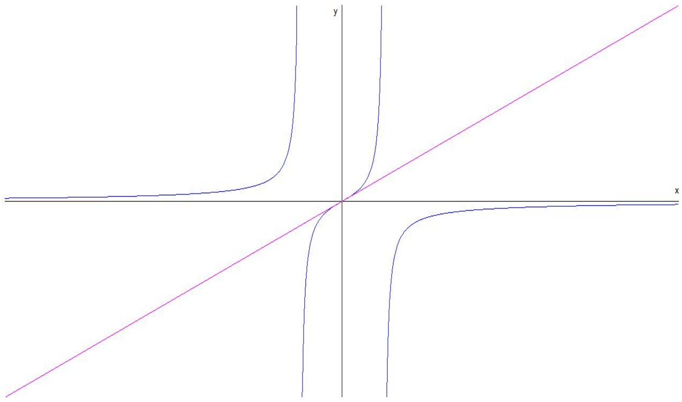
Solución:

1. La pendiente de la recta tangente es $m = 1$:

   $$f'(x) = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2} = 1 \Longrightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{array} \right.$$

   Los puntos serán: $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, -\sqrt{3}/8)$ y $(-\sqrt{3}, \sqrt{3}/8)$

2. En $x = 0$ la recta tangente es $y = x$



3. Se cumplen las condiciones del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[0,2]$ y por tanto $\exists c \in [0,2]$ que cumple

$$g'(c) = \frac{g(2) - g(0)}{2 - 0} = \frac{1}{1} = 1$$

Problema 10.6.2 *(3 puntos)* Dada la recta:

$$r : \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

y el plano $\pi : x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π.

Solución:

Calculamos el punto de corte de la recta r y el plano π, para ello calculamos la ecuación paramétrica de la recta y sustituimos en el plano:

$$r; \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \Longrightarrow (1+\lambda) - \lambda - 2\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$\lambda = 1 \Longrightarrow P(2, -1, 1)$$

Ahora calculamos el punto simétrico de $P_r(1,0,0)$ respecto al plano π:

- Calculamos una recta t perpendicular π que pase por P_r:

$$t : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_t} = (1,1,-2) \\ P_t(1,0,0) \end{array} \right. \Longrightarrow t : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda \end{array} \right.$$

- Encontramos el punto de corte de t y π:

$$(1+\lambda) + \lambda - 2(-2\lambda) + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{3} \Longrightarrow P''\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

- Calculamos el punto simétrico P' de P_r respecto de P'':

$$\frac{P_r+P'}{2}=P''\Longrightarrow P'=2P''-P_r=$$

$$2\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)-(1,0,0)=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

La recta s simétrica de r respecto de π pasa por los puntos P y P':

$$s:\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{P'P}=(2,-1,1)-\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{5}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}(5,-1,-1)\\ \\ P(2,-1,1)\end{array}\right.\Longrightarrow$$

$$t:\left\{\begin{array}{l}x=2+5\lambda\\ y=-1-\lambda\\ z=1-\lambda\end{array}\right.$$

Problema 10.6.3 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda x+2y+z=0\\ \lambda x-y+2z=0\\ x-\lambda y+2z=0\end{array}\right.,$$

se pide:

1. (1 punto). Obtener los valores de parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de:

$$x=y=z=0$$

2. (1 punto). Resolver el sistema para $\lambda=5$.

Solución:

Se trata de un sistema homogéneo

1.

$$A=\left(\begin{array}{ccc}\lambda&2&1\\ \lambda&-1&2\\ 1&-\lambda&2\end{array}\right)\quad |A|=\lambda^2-6\lambda+5=0\Longrightarrow \lambda=1\ \ \lambda=5$$

- Si $\lambda\neq 1$ y $\lambda\neq 5\Longrightarrow |A|\neq 0\Longrightarrow$Rango$(A)=3=$nº incógnitas luego en este caso el sistema será Compatible Determinado y la única solución es la trivial.

$$x=y=z=0$$

- Si $\lambda = 1$ o $\lambda = 5 \Longrightarrow |A| = 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 2 <$nº incógnitas luego en este caso el sistema será Compatible Indeterminado y tendrá infinitas soluciones.

2. Cuando $\lambda = 5$:

$$\left\{\begin{array}{l} 5x + 2y + z = 0 \\ 5x - y + 2z = 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x + 2y = -\lambda \\ 5x - y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{3}\lambda \\ \\ y = \dfrac{1}{3}\lambda \\ \\ z = \lambda \end{array}\right.$$

Problema 10.6.4 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},$$

obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $AXB = A + B$

Solución:

$$AXB = A + B \Longrightarrow X = A^{-1}(A + B)B^{-1}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ -3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(A + B)B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ -3/2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 \\ -5/3 & -4/3 \end{pmatrix}$$

10.7. Septiembre 2009 - Opción A (Reserva)

Problema 10.7.1 *(3 puntos)* Dadas las rectas:

$$r : \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{3} = \frac{z - 2}{1}, \quad s : \frac{x + 2}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - \lambda}{2}$$

se pide:

1. (1 punto). Determinar para qué valor, o valores, del parámetro λ las rectas r, s se cortan en un punto.
2. (1 punto). Para $\lambda = 23$ calcular las coordenadas del punto P intersección de las rectas r, s.
3. (1 punto). Para $\lambda = 23$ hallar la ecuación general del plano π determinado por las rectas r y s.

Solución:

1.
$$\left\{\begin{array}{rrrr} 1+ & 2\alpha = & -2+ & \mu \\ -2+ & 3\alpha = & 1+ & 2\mu \\ 2+ & \alpha = & \lambda+ & 2\mu \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = -9 \\ \mu = -15 \\ \lambda = 23 \end{array}\right. \Longrightarrow \lambda = 23$$

2. Sustituyendo los valores de λ, α y $\mu \Longrightarrow P(-17, -29, -7)$

3.
$$\pi : \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2, 3, 1) \\ \overrightarrow{u_s} = (1, 2, 2) \\ P_r(1, -2, 2) \end{array}\right. \Longrightarrow \left|\begin{array}{ccc} 2 & 1 & x-1 \\ 3 & 2 & y+2 \\ 1 & 2 & z-2 \end{array}\right| = 0 \Longrightarrow \pi : 4x-3y+z-12 = 0$$

Problema 10.7.2 *(3 puntos)* Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1. (1 punto). $f(x) = (2x)^{3x}$.
2. (1 punto). $g(x) = \cos\dfrac{\pi}{8}$.
3. (1 punto). $h(x) = \displaystyle\int_{5\pi}^{6\pi} e^{\cos t}\, dt$.

Solución:

1. $f'(x) = 3(2x)^{3x}(1 + \ln(2x))$
2. $g'(x) = 0$
3.
$$s(x) = \int_{5\pi}^{x} e^{\cos t}\, dt \Longrightarrow s'(x) = e^{\cos x}$$
$$h(x) = s(6x) \Longrightarrow h'(x) = 6e^{\cos x}$$

Problema 10.7.3 *(2 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y = \sqrt{3} \\ 3x + 2z = 2\sqrt{5} \end{array}\right.$$

se pide:

1. (1 punto). Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible determinado.

2. (1 punto). Añadir, de forma razonada, una tercera ecuación para que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

Solución:

Añadimos una tercera ecuación:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - y = \sqrt{3} \\ 3x + 2z = 2\sqrt{5} \\ ax + by + cz = d \end{array}\right. \Longrightarrow \overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 3 & 0 & 2 & 2\sqrt{5} \\ a & b & c & d \end{array}\right) \Longrightarrow |A| = -2a - 4b + 3c$$

1. Para que sea compatible determinado $|A| \neq 0$ y una solución posible puede ser $a = 2$, $b = 0$ y $c = 0$.

2. Para que sea compatible indeterminado $|A| = 0$, es decir, la fila $F_3 = \alpha F_1 + \beta F_2$:

$$\left\{\begin{array}{l} a = 2\alpha + 3\beta \\ b = -\alpha \\ c = 2\beta \\ d = \alpha\sqrt{3} + \beta 2\sqrt{5} \end{array}\right.$$

   Bastaría tomar cualquier $\alpha \neq 0$ o cualquier $\beta \neq 0$, por ejemplo, si $\alpha \neq 0$ y $\beta = 1$ tenemos:

$$a = 3, b = 0, c = 2 \ \text{ y } \ d = 2\sqrt{5}$$

Problema 10.7.4 *(2 puntos)* Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar una matriz X que verifique la ecuación matricial $XB = A + B$

Solución:

$$XB = A + B \Longrightarrow X = (A + B)B^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 9 \\ -1 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

10.8. Septiembre 2009 - Opción B (Reserva)

Problema 10.8.1 *(3 puntos).* Se pide:

1. (1 punto). Demostrar que si tres vectores v_1, v_2 y v_3 son perpendiculares entre sí entonces se verifica que:

$$|\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3}|^2 = |\overrightarrow{v_1}|^2 + |\overrightarrow{v_2}|^2 + |\overrightarrow{v_3}|^2,$$

   donde $|w|$ denota módulo del vector $\overrightarrow{w}$

2. (1 punto). Dados los vectores $\overrightarrow{v_1}(1,1,-1)$, $\overrightarrow{v_2}=(1,0,1)$ hallar un vector $\overrightarrow{v_3}$ tal que:

$$|\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3}|^2 = |\overrightarrow{v_1}|^2 + |\overrightarrow{v_2}|^2 + |\overrightarrow{v_3}|^2.$$

3. (1 punto). Dado el vector $\overrightarrow{v}(1,2,3)$, hallar los vectores $\overrightarrow{v_1}$ y $\overrightarrow{v_2}$ que cumplan las tres condiciones siguientes:

   a) $\overrightarrow{v_1}$ tiene sus tres coordenadas iguales y no nulas;

   b) $\overrightarrow{v_1}$ es perpendicular a $\overrightarrow{v_2}$;

   c) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$

Solución:

1. $$|\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3}|^2 = (\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3})(\overrightarrow{v_1} + v\overrightarrow{_2} + \overrightarrow{v_3}) =$$

$$\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_2}\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_2}\overrightarrow{v_3}+\overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_3} = |\overrightarrow{v_1}|^2+|\overrightarrow{v_2}|^2+|\overrightarrow{v_3}|^2$$

2. $\overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{v_1} \perp \overrightarrow{v_2}$ y llamamos $\overrightarrow{v_3} = (a,b,c)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_1} = a+b-c=0 \\ \overrightarrow{v_3}\overrightarrow{v_2} = a+c=0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=-2a \\ c=-a \end{array}\right.$$

   $\overrightarrow{v_3} = a(1,-2,-1)$ donde a es cualquier valor real.

3. Sea $\overrightarrow{v_1} = (a,a,a)$ y $\overrightarrow{v_2} = (b,c,d)$:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_1}\overrightarrow{v_2} = a(b+c+d)=0 \Longrightarrow b+c+d=0 \\ \overrightarrow{v} = (1,2,3) = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_1} = (a+b, a+c, a+d) \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} b+c+d=0 \\ a+b=1 \\ a+c=2 \\ a+d=3 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=-1 \\ c=0 \\ d=1 \end{array}\right.$$

   Luego:

$$\overrightarrow{v_1} = (2,2,2) \ \text{ y } \ \overrightarrow{v_2} = (-1,0,1)$$

Problema 10.8.2 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} (m+1)x+ & y+ & z= & 0\\ x+ & (m+1)y+ & z= & m\\ x+ & y+ & (m+1)z= & m^2 \end{array}\right.$$

se pide:

1. (2 puntos). Discutir el sistema según los valores del parámetro m.
2. (1 punto). Resolver el sistema para $m = 0$.

Solución:

1.
$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} (m+1) & 1 & 1 & 0\\ 1 & (m+1) & 1 & m\\ 1 & 1 & (m+1) & m^2 \end{array}\right)$$
$$|A| = m^2(m+3) = 0 \Longrightarrow m = 0 \;\; m = -3$$

   - Si $m \neq 0$ y $\lambda \neq -3 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A) = 3 =n^{\text{o}}$ incógnitas luego en este caso el sistema será Compatible Determinado.
   - Si $m = 0$:
   $$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$
   Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 1 <$ n$^{\text{o}}$ de incógnitas, y el sistema es compatible indeterminado.
   - Si $m = -3$:
   $$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & -3\\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right)$$
   En este caso Rango$(A) = 2 \neq$Rango$(\overline{A}) = 3$, y el sistema es incompatible. Los determinantes:
   $$\left|\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 9 \end{array}\right| = 18 \neq 0, \quad \left|\begin{array}{rr} 1 & 1\\ -2 & 1 \end{array}\right| = 3 \neq 0$$

2. Cuando $m = 0 \Longrightarrow x + y + z = 0$:
$$\left\{\begin{array}{l} x = -\lambda - \mu\\ y = \lambda\\ z = \mu \end{array}\right.$$

Problema 10.8.3 *(2 puntos)* Sabiendo que el volumen de un cubo de lado a es $V(a) = a^3$ centímetros cúbicos, calcular el valor mínimo de $V(x)+V(y)$ si $x + y = 5$.

Solución:

$$f(x) = V(x) + V(y) = x^3 + y^3, \quad y = 5 - x \Longrightarrow f(x) = x^3 + (5 - x)^3 \Longrightarrow$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3(5 - x)^2 = 30x - 75 = 0 \Longrightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$f''(x) = 30 \Longrightarrow f''\left(\frac{5}{2}\right) = 30 > 0 \Longrightarrow \text{Mínimo}$$

Sustituyendo en $f(x)$:

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{4} = 31,25\ cm^3$$

Problema 10.8.4 *(2 puntos)* Calcular las siguientes integrales:

1. (1 punto). $\displaystyle\int (2x+1)^3\,dx, \int x^3e^{x^4}\,dx$
2. (1 punto). $\displaystyle\int 2^x\,dx, \int \frac{1+x+x^4}{x^3}\,dx$

Solución:

1. $\displaystyle\int (2x+1)^3\,dx = \frac{1}{2}\int 2(2x+1)^3\,dx = \frac{(2x+1)^4}{8} + C$

   $\displaystyle\int x^3e^{x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x^3e^{x^4}\,dx = \frac{e^{x^4}}{4} + C$

2. $\displaystyle\int 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}\int \ln 2 \cdot 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

   $\displaystyle\int \frac{1+x+x^4}{x^3}\,dx = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} + C$

Capítulo 11

Año 2010

11.1. Modelo 2010 - Opción A

Problema 11.1.1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = e^x + a\,e^{-x},$$

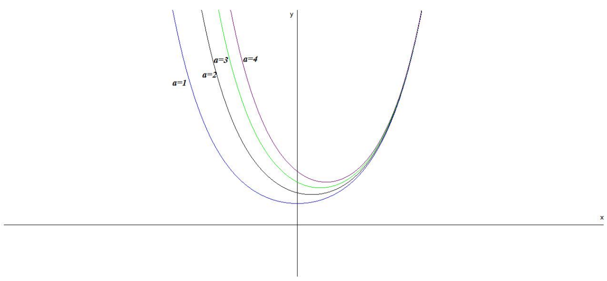
siendo a un número real, estudiar los siguientes apartados en función de a:

1. (1,5 puntos) Hallar los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.
2. (1 punto) Estudiar para que valor , o valores, de a la función f tiene alguna asíntota horizontal.
3. (0,5 puntos) Para $a \geq 0$, hallar el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Solución:

1. $f'(x) = e^x - a\,e^{-x} = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\ln a}{2}$

   - Si $a > 0$:

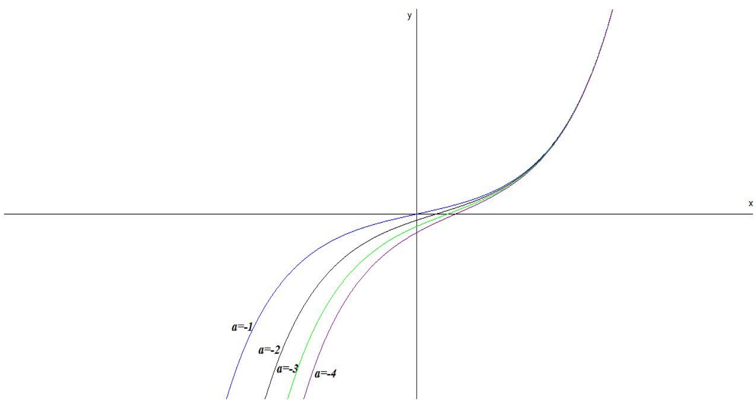


	$(-\infty, \ln a/2)$	$(\ln a, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	Decreciente	Creciente

La función es decreciente en el inetervalo $(-\infty, \ln a/2)$ y creciente en el $(\ln a/2, \infty)$.

La función tiene un mínimo en el punto $\left(\dfrac{\ln a}{2}, 2\sqrt{a}\right)$

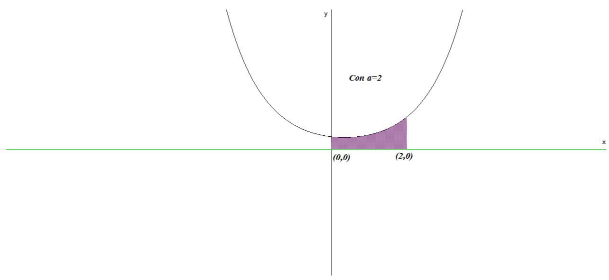
- Si $a \leq 0 \Longrightarrow \ln a$ no existe, luego no hay extremos. Por otro lado $f'(x) > 0, \ \forall x \in R \Longrightarrow$ la función es siempre creciente.



2.
$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{e^{2x} - a}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{2e^{2x}}{e^x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} 2e^x = \infty$$
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - a}{e^x} = \left[\frac{\infty}{0}\right] = \lim_{x \longrightarrow -\infty} (e^x + a\, e^{-x}) = \pm\infty$$

En ninguno de los dos casos hay asíntotas horizontales.

3. Con $a > 0$:
$$S = \int_0^2 (e^x + a\, e^{-x})\, dx = \left. e^x - a\, e^{-x}\right]_0^2 = a(1 - e^(-2)) + e^2 - 1\, u^2$$



Problema 11.1.2 *(3 puntos)* Se consideran las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-2}$$

$$s \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

1. (1,5 puntos) Determinar la ecuación de la recta t que corta a r y s, y que contiene al origen de coordenadas.

2. (1,5 puntos) Determinar la mínima distancia entre las rectas r y s.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -2) \\ P_r(0, 1, 2) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (6, 2, 2) = 2(3, 1, 1) \\ P_s(5, 0, -1) \end{array} \right.$$

1.

$$\pi_1 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (-1, 1, -2) \\ \overrightarrow{OP_r} = (0, 1, 2) \\ O(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{rrr} -1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ -2 & 2 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow 4x + 2y - z = 0$$

$$\pi_2 : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (3, 1, 1) \\ \overrightarrow{OP_s} = (5, 0, -1) \\ O(0, 0, 0) \end{array} \right. \Longrightarrow \left| \begin{array}{lrr} 3 & 5 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{array} \right| = 0 \Longrightarrow -x + 8y - 5z = 0$$

$$t : \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 0 \\ x - 8y + 5z = 0 \end{array} \right.$$

2. $\overrightarrow{P_rP_s} = (5, -1, -3)$

$$|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}]| = | \left| \begin{array}{rrr} -1 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \end{array} \right| | = 64 \Longrightarrow \text{se cruzan}$$

$$|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}| = | \left| \begin{array}{rrr} i & j & k \\ -1 & 1 & -2 \\ 6 & 2 & 2 \end{array} \right| | = |(6, -10, -8)| = 2|(3, -5, -4)| = 10\sqrt{2}$$

$$d(r, s) = \frac{|[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}]|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{64}{10\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{5}\ u$$

Problema 11.1.3 *(2 puntos)* Obtener, para todo número natural n, el valor de:

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right)^n + \left(\begin{array}{rr} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right)^n$$

Solución:

Si $n = 1$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Si $n = 2$
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$
Si $n = 3$
$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$
Si $n = n$
$$\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Problema 11.1.4 *(2 puntos)* Discutir razonadamente, en función del parámetro k, el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrrr} x+ & ky+ & z = & k+2 \\ kx+ & y+ & z = & k \\ x+ & y+ & kz = & -2(k+1) \end{array} \right.$$

Solución:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & k+2 \\ k & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k & -2(k+1) \end{array} \right) \quad |A| = -k^3 + 3k - 2 = 0 \Longrightarrow k = 1 \;\; k = -2$$

- Si $k \neq 1$ y $k \neq -2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3$ =n° de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $k = 1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema es Incompatible.

- Si $k = -2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

Tenemos:

$$F_3 = -(F_1 + F_2) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado.

11.2. Modelo 2010 - Opción B

Problema 11.2.1 *(3 puntos)* Dada la función:

$$f(x) = x^3 - x$$

Se pide:

1. (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, f(-1))$.
2. (1 punto) Determinar los puntos de intersección de la recta hallada en el apartado anterior con la gráfica de f.
3. (1 punto) Calcular el área de la región acotada que está comprendida entre la gráfica de f y la recta obtenida en el apartado anterior.

Solución:

1. $f(-1) = 0$. El punto de tangencia es el $(-1, 0)$. $f'(x) = 3x^2 - 1 \Longrightarrow m = f'(-1) = 2$. Luego la recta tangente es:

$$y = 2(x + 1) \Longrightarrow 2x - y + 2 = 0$$

2. Para encontrar los puntos de intersección lo hacemos por igualación:

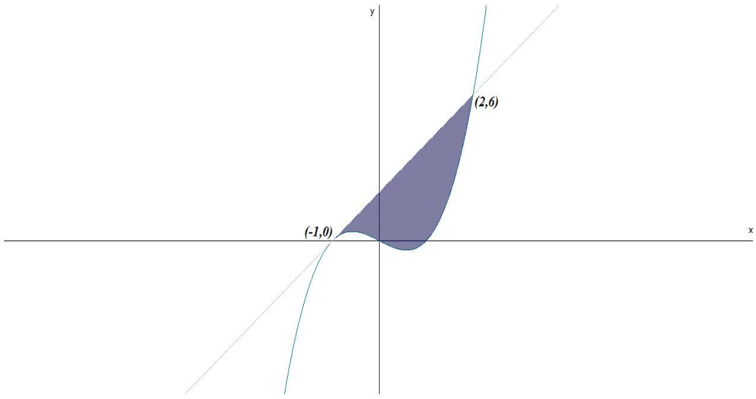
$$x^3 - x = 2x + 2 \Longrightarrow x = -1, \;\; x = 2$$

Los puntos de intersección son: $(-1, 0)$ y $(2, 6)$.

3.

$$S = \int_{-1}^{6} (2x+2-x^3+x)\, dx = \int_{-1}^{6} (-x^3+3x+2)\, dx = -\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2} + 2x \bigg]_{-1}^{6} =$$

$$\frac{27}{4}\; u^2$$



Problema 11.2.2 *(3 puntos)* Dado el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} x+ & & z= & 2 \\ x+ & \lambda y- & z= & 4 \\ -\lambda x- & y- & z= & -5 \end{array}\right.$$

1. (1 punto) Discutirlo para los distintos valores del parámetro λ
2. (1 punto) Resolverlo cuando el sistema sea compatible indeterminado.
3. (1 punto) Resolverlo para $\lambda = -2$.

Solución:

1.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & -1 & 4 \\ -\lambda & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) \quad |A| = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1 \;\; \lambda = 2$$

- Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 2 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$Rango$(A)$ =Rango$(\overline{A}) = 3 =$n$^{\text{o}}$ de incógnitas, luego en este caso el sistema será compatible determinado.

- Si $\lambda = -1$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 3 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

Sistema es Incompatible.

- Si $\lambda = 2$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & -5 \end{array} \right) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Rango}(\overline{A}) = 2 \\ \text{Rango}(A) = 2 \end{array} \right. \Longrightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado.

2. El sistema es compatible indeterminado cuando $\lambda = -1$:

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & & z = & 2 \\ x- & y- & z = & 4 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = -2 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

3.

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} x+ & & z = & 2 \\ x- & 2y- & z = & 4 \\ 2x- & y- & z = & -5 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -3 \\ y = -6 \\ z = 5 \end{array} \right.$$

Problema 11.2.3 *(2 puntos)* Dados los puntos $A(2, 2, 3)$ y $B(0, -2, 1)$, hallar el punto, o los puntos, de la recta:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{2}$$

que equidistan de A y de B.

Solución:

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + 3\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 4 + 2\lambda \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{AP} = (3\lambda, -2-\lambda, 1+2\lambda), \quad \overrightarrow{BP} = (2-3\lambda, 2-\lambda, 3+2\lambda)$$

$$|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}| \Longrightarrow$$

$$\sqrt{(3\lambda)^2 + (-2-\lambda)^2 + (1+2\lambda)^2} = \sqrt{(2-3\lambda)^2 + (2-\lambda)^2 + (3+2\lambda)^2} \Longrightarrow$$

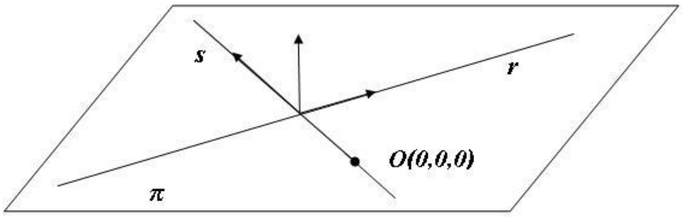
$$\lambda = 1 \Longrightarrow (5, -1, 6)$$

Problema 11.2.4 *(2 puntos)* Dados el plano $\pi \equiv 5x - 4y + z = 0$ y la recta:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$$

contenida en π, obtener la recta s contenida en π que es perpendicular a r, y que pasa por el origen de coordenada $O(0, 0, 0)$.

Solución:



$$s : \begin{cases} \overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{u_r} = (1, 1, -1) \\ O(0, 0, 0) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{u_s} = \overrightarrow{u_\pi} \times \overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 5 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -14(1, 1, -1)$$

$$s : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$$