ANDALUCÍA

Índice

Junio de 2008	8
Septiembre de 2007	13
Junio de 2007	19

Enunciados de las pruebas y criterios extraídos de la página web de la Junta de Andalucía:
http://distritounicoandaluz.cica.es

Criterios generales de corrección:

- Las directrices generales de valoración de un ejercicio serán su planteamiento y el desarrollo matemático de dicho planteamiento; la mera descripción, sin ejecución, de ambas directrices no será tenida en cuenta.
- El orden y la claridad de exposición así como la capacidad de síntesis son factores que serán tenidos en cuenta.
- Los errores de cálculo operativo, no conceptuales, se penalizarán con un máximo del 10 % de la puntuación asignada al ejercicio o al apartado correspondiente.
- En los ejercicios en los que sea necesaria la lectura en sentido inverso, en la tabla de la ley normal, de valores de áreas que no aparezcan en dicha tabla, se darán por buenos cualquiera de los dos procedimientos siguientes:
  a) Interpolación.
  b) Aproximación por el valor más cercano de los que aparezcan en la tabla.

Enunciado de la prueba (Junio de 2008)

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.

b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.

c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.

d) Puede usar una calculadora no programable y no gráfica.

e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

a) **(1,5 puntos).** Calcule los valores de a y b para que $A \cdot B = B \cdot A$.

b) **(1,5 puntos).** Para $a = 1$ y $b = 0$, resuelva la ecuación matricial $X \cdot B - A = I_2$.

EJERCICIO 2

Sea la función definida de la forma $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 - 10x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

a) **(0,5 puntos).** Halle el dominio de f.

b) **(1,25 puntos).** Estudie la derivabilidad de f en $x = 2$.

c) **(1,25 puntos).** Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

EJERCICIO 3

Parte I

a) **(1 punto).** Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(A) = 0{,}5$, que $P(B) = 0{,}4$ y que $P(A \cup B) = 0{,}8$, determine $P(A/B)$.

b) **(1 punto).** Sean C y D dos sucesos de un mismo espacio muestral. Sabiendo que $P(C) = 0{,}3$, que $P(D) = 0{,}8$ y que C y D son independientes, determine $P(C \cup D)$.

Parte II

El número de días de permanencia de los enfermos en un hospital sigue una ley normal de media μ días y desviación típica 3 días.

a) **(1 punto).** Determine un intervalo de confianza para estimar μ, a un nivel del 97 %, con una muestra aleatoria de 100 enfermos cuya media es 8,1 días.

b) **(1 punto).** ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria para poder estimar μ con un error máximo de 1 día y un nivel de confianza del 92 %?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) **(2 puntos).** Represente gráficamente la región determinada por las siguientes restricciones:

$$2x + y \leq 6 \quad 4x + y \leq 10 \quad -x + y \leq 3 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

b) **(1 punto).** Calcule el máximo de la función $f(x, y) = 4x + 2y - 3$ en el recinto anterior e indique dónde se alcanza.

EJERCICIO 2

Sea la función f definida mediante $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 1 \\ L(x) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

a) **(1,5 puntos).** Determine a y b sabiendo que f es continua y tiene un mínimo en $x = -1$.

b) **(1,5 puntos).** Para $a = -1$ y $b = 1$, estudie la derivabilidad de f en $x = -1$ y en $x = 1$.

EJERCICIO 3

Parte I

Se sabe que el 30 % de los individuos de una población tiene estudios superiores; también se sabe que, de ellos, el 95 % tiene empleo. Además, de la parte de la población que no tiene estudios superiores, el 60 % tiene empleo.

a) **(1 punto).** Calcule la probabilidad de que un individuo, elegido al azar, tenga empleo.

b) **(1 punto).** Se ha elegido un individuo aleatoriamente y tiene empleo; calcule la probabilidad de que tenga estudios superiores.

Parte II

Sea la población $\{1, 2, 3, 4\}$.

a) **(1 punto).** Construya todas las muestras posibles de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio simple.

b) **(1 punto).** Calcule la varianza de las medias muestrales.

Resolución de la prueba (Junio de 2008)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 3a & 3b \end{pmatrix}$ $\qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & 2a \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$

Para que $A \cdot B = B \cdot A$ los valores deben ser: $\left.\begin{array}{l} 3a = 3 \\ 12 = 3b \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 4 \end{array}\right.$

b) Como las matrices A, B e I_2 son cuadradas de orden 2, la matriz X también debe serlo.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+6y & y \\ z+6t & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+6y & y-2 \\ z+6t-3 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+6y = 1 \\ y-2 = 0 \\ z+6t-3 = 0 \\ t = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -11 \\ y = 2 \\ z = -3 \\ t = 1 \end{array}\right.$$

Por tanto, tenemos que: $X = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

EJERCICIO 2

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

b) $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{(x-1)^2} & \text{si } x < 2 \\ 4x - 10 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Estudiamos si la función es derivable en $x = 2$:

$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 = -12 \quad \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x}{x-1} = \dfrac{4}{1} = 4 \quad \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x^2 - 10x) = -12$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \rightarrow f(x)$ no continua en $x = 2 \rightarrow f(x)$ no derivable en $x = 2$

c) Para $x = 0$: $f(0) = 0 \quad f'(0) = -2$

La ecuación de la recta tangente es: $y - f(0) = f'(0)\,(x - 0) \rightarrow y - 0 = -2(x - 0) \rightarrow y = -2x$

EJERCICIO 3

Parte I

a) $P(A / B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}5 + 0{,}4 - 0{,}8}{0{,}4} = \dfrac{1}{4}$

b) $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) = P(C) + P(D) - P(C) \cdot P(D) = 0{,}3 + 0{,}8 - 0{,}3 \cdot 0{,}8 = 0{,}86$

Parte II

$\sigma = 3$

a) $n = 100$, $\overline{x} = 8{,}1$

Si $1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}015$

El valor correspondiente a 0,985 de probabilidad es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17$

Por tanto, el intervalo correspondiente es: $\left(8{,}1 - 2{,}17 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{100}};\ 8{,}1 + 2{,}17 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{100}}\right) = (7{,}45;\ 8{,}75)$

b) Si $1-\alpha = 0{,}92 \to \alpha = 0{,}08 \to \frac{\alpha}{2} = 0{,}04$

El valor correspondiente a 0,96 de probabilidad es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}76$

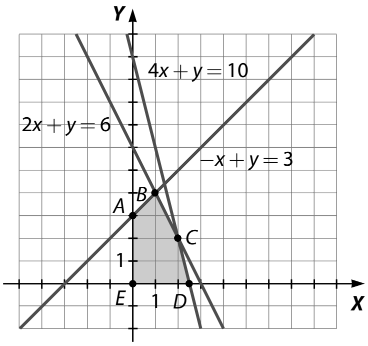
Si se desea un error menor que 1 día: $1{,}76 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} < 1 \to \sqrt{n} > 5{,}28 \to n > 27{,}88$

Por tanto, el tamaño mínimo de la muestra debe ser de $n = 28$ personas.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a)



Vértices de la región factible: $A(0, 3)$, $B(1, 4)$, $C(2, 2)$, $D(2{,}5; 0)$ y $E(0, 0)$

b) Al sustituir las coordenadas de estos puntos en la función objetivo se tiene que:

$$f(0, 3) = 3 \quad f(1, 4) = 9 \quad f(2, 2) = 9 \quad f(2{,}5; 0) = 7 \quad f(0, 0) = -3$$

El máximo de la función se alcanza en todos los puntos del segmento determinado por B y C.

EJERCICIO 2

a) Si la función es continua se verifica que: $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \to 1 + a + b = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Como en $x = -1$ hay un mínimo: $f'(-1) = 0 \to -2 + a = 0 \to a = 2$

Luego resulta que: $1 + 2 + b = 0 \to b = -3$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Estudiamos la continuidad de la función:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2 - x + 1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \ln x = 0 \end{array}\right\} \to \text{No existe } \lim_{x\to 1} f(x) \to f(x) \text{ no es continua en } x = 1,$$

y, por tanto, no es derivable en $x = 1$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función $f(x)$ es derivable en $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$, luego también es derivable en $x = -1$ y $f'(-1) = -3$.

EJERCICIO 3

Parte I

Sean los sucesos:

$S =$ «Tener estudios superiores»

$E =$ «Tener empleo»

Entonces, tenemos que: $P(S) = 0{,}3 \quad P(E\,/\,S) = 0{,}95 \quad P(E\,/\,\overline{S}) = 0{,}6$

a) Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(E) = P(S)P(E\,/\,S) + P(\overline{S})P(E\,/\,\overline{S}) = 0{,}3 \cdot 0{,}95 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}705$$

b) Aplicando el teorema de Bayes:

$$P(S/E) = \frac{P(E \cap S)}{P(E)} = \frac{P(S)P(E/S)}{P(E)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}95}{0{,}705} = 0{,}404$$

Parte II

a) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (2, 3) (2, 4) (3, 4)

b) La distribución de las medias muestrales es:

1,5 2 2,5 2,5 3 3,5

Media: $\overline{x} = \dfrac{1{,}5 + 2 + 2{,}5 \cdot 2 + 3 + 3{,}5}{6} = 2{,}5$

Varianza de las medias muestrales: $\sigma^2 = \dfrac{1{,}5^2 + 2^2 + 2{,}5^2 \cdot 2 + 3^2 + 3{,}5^2}{6} - 1{,}5^2 = 4{,}42$

Criterios específicos de corrección:

OPCIÓN A

EJERCICIO 1: 3 puntos
a) Hasta 1,5 puntos.
b) Hasta 1,5 puntos.

EJERCICIO 2: 3 puntos
a) Hasta 0,5 puntos.
b) Hasta 1,25 puntos.
c) Hasta 1,25 puntos.

EJERCICIO 3
Parte I: 2 puntos
a) Hasta 1 punto.
b) Hasta 1 punto.
Parte II: 2 puntos
a) Hasta 1 punto.
b) Hasta 1 punto.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1: 3 puntos
a) Hasta 2 puntos.
b) Hasta 1 punto.

EJERCICIO 2: 3 puntos
a) Hasta 1,5 puntos.
b) Hasta 1,5 puntos.

EJERCICIO 3
Parte I: 2 puntos
a) Hasta 1 punto.
b) Hasta 1 punto.
Parte II: 2 puntos
a) Hasta 1 punto.
b) Hasta 1 punto.

Enunciado de la prueba (Septiembre de 2007)

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.

b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.

c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.

d) Puede usar una calculadora no programable y no gráfica.

e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

De un problema de programación lineal se deducen las siguientes restricciones:

$$4x + 3y \geq 60 \quad y \leq 30 \quad x \leq \frac{10 + y}{2} \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

a) **(2 puntos).** Represente gráficamente la región factible del problema y calcule sus vértices.

b) **(0,5 puntos).** Maximice en esa región factible la función objetivo $F(x, y) = x + 3y$.

c) **(0,5 puntos).** ¿Pertenece el punto $(11, 10)$ a la región factible?

EJERCICIO 2

Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + mx + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

a) **(1 punto).** Calcule m para que la función sea continua en $x = 1$.

b) **(1 punto).** Para ese valor de m, ¿es derivable la función en $x = 1$?

c) **(1 punto).** Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.

EJERCICIO 3

Parte I

En un espacio muestral se sabe que para dos sucesos A y B se verifica:

$$P(A \cap B) = 0{,}1 \quad P(A^C \cap B^C) = 0{,}6 \quad P(A\,/\,B) = 0{,}5$$

a) **(0,75 puntos).** Calcule $P(B)$.

b) **(0,75 puntos).** Calcule $P(A \cup B)$.

c) **(0,5 puntos).** ¿Son A y B independientes?

Parte II

Se sabe que las puntuaciones de un test siguen una ley normal de media 36 y desviación típica 4,8.

a) **(1 punto).** Si se toma una muestra aleatoria de 16 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que la media de esta muestra sea superior a 35 puntos?

b) **(1 punto).** ¿Qué porcentaje de muestras de tamaño 25 tiene una media muestral comprendida entre 34 y 36?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) **(1,5 puntos).** Halle la matriz A que verifica $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}$.

b) **(1,5 puntos).** Clasifique y resuelva el sistema formado por las tres ecuaciones siguientes:

$$x - 3y + 2z = 0 \qquad -2x + y - z = 0 \qquad x - 8y + 5z = 0$$

EJERCICIO 2

a) **(2 puntos).** Sea la función definida para todo número real x por $f(x) = ax^3 + bx$.
Determine a y b sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1, 1)$
y que en ese punto la pendiente de la recta tangente es -3.

b) **(1 punto).** Si en la función anterior $a = \dfrac{1}{3}$ y $b = -4$, determine sus intervalos de monotonía y sus extremos.

EJERCICIO 3

Parte I

Una urna A contiene tres bolas azules y cuatro rojas y otra urna B contiene dos bolas azules, dos rojas y dos negras. Se extrae, al azar, una bola de una de las urnas.

a) **(1 punto).** Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja.

b) **(1 punto).** Si la bola extraída resulta ser azul, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Parte II

Se sabe que $(45{,}13;\ 51{,}03)$ es un intervalo de confianza, al 95%, para la media de una variable aleatoria que sigue una distribución normal con desviación típica 15.

a) **(0,5 puntos).** ¿Cuál es el error cometido?

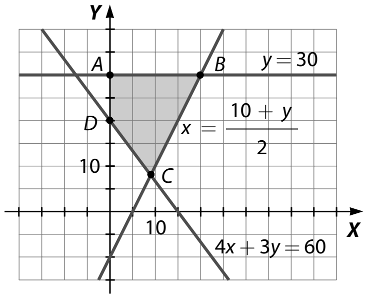
b) **(1,5 puntos).** Calcule, con el mismo nivel de confianza, el tamaño muestral mínimo necesario para que el error no sea superior a 1,8.

Resolución de la prueba (Septiembre de 2007)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a)



Vértices de la región factible:

$A(0, 30)$, $B(20, 30)$, $C(9, 8)$ y $D(0, 20)$

b) $F(0, 30) = 90$ $\quad F(20, 30) = 110$ $\quad F(9, 8) = 33$ $\quad F(0, 20) = 60$

El máximo de la función $F(x, y)$ en la región factible es 110 y se alcanza en el vértice B.

c) Sustituyendo (11, 10) en $x \leq \dfrac{10+y}{2} \to 11 \geq 10$. Entonces (11, 10) no pertenece a la región factible.

EJERCICIO 2

a) Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$ debe cumplirse: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2 + mx + 5) = 1 + m + 5 = m + 6 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} 2^x = 2^1 = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \to m + 6 = 2 \to m = -4$$

b) Para $m = -4$: $f(x) = \begin{cases} 2^x & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^+) = 2 \cdot 1 - 4 = -2 \\ f'(1^-) = 2 \cdot \ln 2 \end{array}\right\} \to f'(1^+) \neq f'(1^-) \to f(x) \text{ no es derivable en } x = 1$$

c) La recta tangente es de la forma $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$.

$$f(0) = 2^0 = 1 \qquad f'(x) = 2^x \ln 2 \to f'(0) = 2^0 \ln 2 = \ln 2$$

Por tanto, la recta tangente es: $y - 1 = \ln 2(x - 0)$

EJERCICIO 3

Parte I

a) $P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A / B)} = \dfrac{0,1}{0,5} = 0,2$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \to P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - 0,6 = 0,4$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$0,4 = P(A) + 0,2 - 0,1$

$P(A) = 0,4 - 0,2 + 0,1 = 0,3$

Comprobamos: $\left.\begin{array}{r} P(A \cap B) = 0,1 \\ P(A) \cdot P(B) = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06 \end{array}\right\} \to$ No son independientes.

Parte II

a) La distribución de la media muestral es:

$$N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(36; \frac{4,8}{\sqrt{16}}\right) = N\left(36; \frac{4,8}{4}\right) = N(36;1,2)$$

$$P(\bar{X} > 35) = 1 - P(\bar{X} \leq 35) = 1 - P\left(Z \leq \frac{35-36}{1,2}\right) = 1 - P(Z \leq -0,83) =$$

$$= 1 - \left[1 - P(Z \leq 0,83)\right] = P(Z \leq 0,83) = 0,7967$$

Por tanto, la probabilidad de que la media de esta muestra sea superior a 35 es, aproximadamente; 0,8.

b) La distribución de la media muestral para muestras de tamaño 25 es:

$$N\left(36; \frac{4,8}{\sqrt{25}}\right) = N(36;0,96)$$

$$P(34 \leq \bar{X} \leq 36) = P\left(\frac{34-36}{0,96} \leq Z \leq \frac{36-36}{0,96}\right) = P(-2,08 \leq Z \leq 0) = P(Z \leq 2,08) - P(Z \leq 0) =$$

$$= 0,9812 - 0,5 = 0,4812$$

Esto representa, aproximadamente, el 48 % de las muestras de tamaño 25.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}$ y llamamos $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 13 \neq 0 \rightarrow$ Tiene inversa y $\text{Adj }(B) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Matriz inversa: $B^{-1} = \dfrac{\text{Adj }(B)^t}{|B|} = \dfrac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{-3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{-3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} \cdot 9 - \frac{3}{13} \cdot 28 \\ \frac{9}{13} + \frac{2}{13} \cdot 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{39}{13} \\ \frac{65}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) El sistema es homogéneo $\rightarrow$ Rango (M) = Rango (M^*). Al ser $|M| = 0$ y al tener la matriz de los coeficientes un menor de orden 2 no nulo, Rango $(M) = 2$.

Por el teorema de Rouché-Frobenius el sistema es compatible, y como Rango $(M) = 2 <$ n.º de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -8 & 5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 + 2F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 3y + z = 0 \\ -5y + 3z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$ Llamando $\lambda = z$, las infinitas soluciones vendrán dadas por:

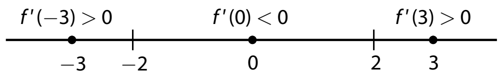
$$z = \lambda, \quad y = \frac{3}{5}\lambda, \quad x = 3y - \lambda = \frac{9}{5}\lambda - \lambda = \frac{4}{5}\lambda, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO 2

a) Como pasa por (1, 1) $\rightarrow a + b = 1$. La pendiente es: $f'(1) = 3a \cdot 1 + b = -3$

$$\begin{array}{r} a + b = 1 \\ 3a + b = -3 \\ \hline -2a \quad\;\; = 4 \end{array} \rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases}$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x$



$f'(x) = x^2 - 4 \qquad f'(x) = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Creciente en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y decreciente en $(-2, 2)$.

Extremos: Mínimo: $\left(2, \dfrac{-16}{3}\right)$ Máximo: $\left(-2, \dfrac{4}{3}\right)$

EJERCICIO 3

Parte I

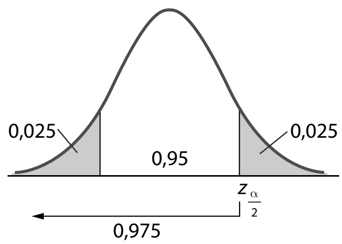
a) $P(\text{roja}) = P\left[(\text{urna}\,A \cap \text{roja}) \cup (\text{urna}\,B \cap \text{roja})\right] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{7} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{6} = \dfrac{2}{7} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{19}{42}$

b) $P(B\,/\,\text{azul}) = \dfrac{P(\text{azul} \cap B)}{P(\text{azul})} = \dfrac{\dfrac{2}{6} \cdot \dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{7} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{6}} = \dfrac{\dfrac{1}{6}}{\dfrac{3}{14} + \dfrac{1}{6}} = \dfrac{\dfrac{1}{6}}{\dfrac{16}{42}} = \dfrac{\dfrac{1}{6}}{\dfrac{8}{21}} = \dfrac{21}{48} = \dfrac{7}{16}$

Parte II

a) El error cometido es el radio del intervalo: radio $= \dfrac{51{,}03 - 45{,}13}{2} = 2{,}95 \rightarrow$ Error $= 2{,}95$

b) El nivel de confianza es $1 - \alpha = 0{,}95$. El valor crítico obtenido en la tabla de distribución normal es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$



El error máximo es:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}} = 1{,}8 \rightarrow n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 15}{1{,}8}\right)^2 = 266{,}77$$

Por tanto, el tamaño muestral mínimo debe ser mayor o igual que 267.

Criterios específicos de corrección:

OPCIÓN A

EJERCICIO 1: 3 puntos

a) Hasta 1 punto por la región, hasta 1 punto por los vértices.

b) Hasta 0,5 puntos.

c) Hasta 0,5 puntos.

EJERCICIO 2: 3 puntos

a) Hasta 1 punto.

b) Hasta 1 punto.

c) 0,25 por el punto de tangencia; 0,25 por la pendiente; 0,5 por la recta.

EJERCICIO 3

Parte I: 2 puntos

a) Hasta 0,75 puntos.

b) Hasta 0,75 puntos.

c) Hasta 0,5 puntos.

Parte II: 2 puntos

a) Hasta 1 punto.

b) Hasta 1 punto.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1: 3 puntos

a) 0,5 puntos por el planteamiento. 1 punto por la resolución.

b) 0,5 puntos por clasificar. 1 punto por resolver.

EJERCICIO 2: 3 puntos

a) Hasta 1 punto por planteamiento de las ecuaciones. Hasta 1 punto por el cálculo de a y b.

b) Hasta 1 punto.

EJERCICIO 3

Parte I: 2 puntos

a) Hasta 1 punto.

b) Hasta 1 punto.

Parte II: 2 puntos

a) Hasta 0,5 puntos.

b) Planteamiento 0,5 puntos. Resolución 1 punto.

Enunciado de la prueba

(Junio de 2007)

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.

b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.

c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.

d) Puede usar una calculadora no programable y no gráfica.

e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin su ayuda. Justifique las respuestas.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} -x \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$.

a) **(1 punto).** Determine la matriz inversa de A.

b) **(2 puntos).** Halle los valores de x, y, z para los que se cumple $A \cdot X = Y$.

EJERCICIO 2

Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida de la forma $f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x$, determine:

a) **(1,5 puntos).** Su monotonía y sus extremos relativos.

b) **(1,5 puntos).** Su curvatura y su punto de inflexión.

EJERCICIO 3

Parte I

La baraja española consta de diez cartas de oros, diez de copas, diez de espadas y diez de bastos. Se extraen dos cartas. Calcule razonadamente la probabilidad de que, al menos, una de las dos cartas sea de espadas en los siguientes supuestos:

a) **(1 punto).** Si se extraen las cartas con reemplazamiento.

b) **(1 punto).** Si se extraen las cartas sin reemplazamiento.

Parte II

En una muestra aleatoria de 256 individuos se ha obtenido una edad media de 17,4 años. Se sabe que la desviación típica de la población normal de la que procede esa muestra es de 2 años.

a) **(1 punto).** Obtenga un intervalo de confianza al 95 % para la edad media de la población.

b) **(1 punto).** ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza, al 90 %, tenga de amplitud a lo sumo 0,5?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Consideramos el recinto del plano limitado por las siguientes inecuaciones:

$$y - x \leq 4 \quad y + 2x \geq 7 \quad -2x - y + 13 \geq 0 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

a) **(2 puntos).** Represente el recinto y calcule sus vértices.

b) **(1 punto).** Halle en qué puntos de ese recinto alcanza los valores máximo y mínimo la función $F(x, y) = 4x + 2y - 1$.

EJERCICIO 2

a) **(2 puntos).** Halle los valores de a y b para que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = ax^2 - b$ en el punto $(1, 5)$ sea la recta $y = 3x + 2$.

b) **(1 punto).** Para $\mathrm{g}(x) = e^{1-x} + \ln(x + 2)$, calcule $\mathrm{g}'(1)$.

EJERCICIO 3

Parte I

En una urna hay cuatro bolas blancas y dos rojas. Se lanza una moneda, si sale cara se extrae una bola de la urna y si sale cruz se extraen, sin reemplazamiento, dos bolas de la urna.

a) **(1 punto).** Calcule la probabilidad de que se hayan extraído dos bolas rojas.

b) **(1 punto).** Halle la probabilidad de que no se haya extraído ninguna bola roja.

Parte II

En una granja avícola se ha tomado una muestra aleatoria de 200 polluelos de pato, entre los cuales se encontraron 120 hembras.

a) **(1,5 puntos).** Halle un intervalo de confianza, con un nivel del 98%, para la proporción de hembras entre estos polluelos.

b) **(0,5 puntos).** Razone, a la vista del intervalo encontrado, si a ese nivel de confianza puede admitirse que la verdadera proporción de hembras de pato en esa granja es 0,5.

Resolución de la prueba (Junio de 2007)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (-1) - 0 - 0 = 1$

Como $|A|$ es distinto de 0, la matriz A tiene inversa: $A^{-1} = \dfrac{\text{Adj }(A)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Planteamos la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 2 \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{aligned} x - 2y - 2 &= -x \\ y &= 2 \\ -x + 3y &= z \end{aligned}\right\}$$

Sustituimos $y = 2$ en las otras dos ecuaciones y se resuelve el sistema formado:

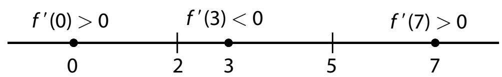
$$\left.\begin{aligned} x - 4 - 2 &= -x \\ -x + 6 &= z \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 2x &= 6 \\ x + z &= 6 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 3 \\ z &= 6 - x \end{aligned}\right\} \rightarrow z = 6 - 3 = 3$$

La solución es $x = 3$, $y = 2$ y $z = 3$.

EJERCICIO 2

a) $f'(x) = 24x^2 - 168x + 240$

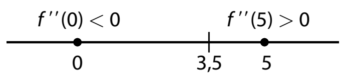
$$24x^2 - 168x + 240 = 0 \rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \end{cases}$$



La función $f(x)$ crece en $(-\infty, 2)$ y $(5, +\infty)$ y decrece en $(2, 5)$. Además, tiene un máximo relativo en $x = 2$ y un mínimo relativo en $x = 5$.

b) $f''(x) = 48x - 168$

$48x - 168 = 0 \rightarrow 48x = 168 \rightarrow x = 3{,}5$



La función $f(x)$ es convexa en $(-\infty; 3{,}5)$ y es cóncava en $(3{,}5; +\infty)$. Además, tiene un punto de inflexión en $x = 3{,}5$.

EJERCICIO 3

Parte I

a) $P(\text{al menos una espada}) = 1 - P(\text{ninguna espada}) = 1 - \left(\dfrac{30}{40} \cdot \dfrac{30}{40}\right) = 1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16}$

b) $P(\text{al menos una espada}) = 1 - P(\text{ninguna espada}) = 1 - \left(\dfrac{30}{40} \cdot \dfrac{29}{39}\right) = 1 - \dfrac{29}{52} = \dfrac{23}{52}$

Parte II

a) El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Para un nivel de confianza del 95 % el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es 1,96.

Sustituyendo todos los datos en el intervalo tenemos que el intervalo de confianza para la media es:

$$\left(17{,}4 - 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{256}}; \ 17{,}4 + 1{,}96 \cdot \frac{2}{\sqrt{256}}\right) = (17{,}155; 17{,}645)$$

b) La relación entre el nivel de confianza, el error admisible y el tamaño de la muestra es:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Como la amplitud tiene que ser 0,5; el error admisible tiene que ser 0,25. Sustituimos los valores y despejamos:

$$0{,}25 = 1{,}645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = \frac{1{,}645 \cdot 2}{0{,}25} \rightarrow n = 13{,}16^2 = 173{,}1856$$

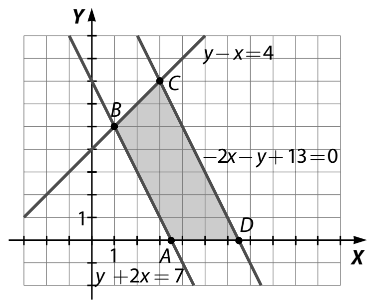
El tamaño mínimo tiene que ser de 174.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

a) Planteamos las inecuaciones y dibujamos la región factible:

$$\left.\begin{array}{l} y - x \leq 4 \\ y + 2x \geq 7 \\ -2x - y + 13 \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$



Vértices de la región: $A\left(\frac{7}{2}, 0\right)$, $B(1, 5)$, $C(3, 7)$ y $D\left(\frac{13}{2}, 0\right)$

b) Calculamos el valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

$$F\left(\frac{7}{2}, 0\right) = 13 \qquad F(1, 5) = 13 \qquad F(3, 7) = 25 \qquad F\left(\frac{13}{2}, 0\right) = 25$$

El máximo se alcanza en cualquier punto del segmento *CD* y el mínimo en cualquier punto del segmento *AB*.

EJERCICIO 2

a) Como la pendiente de la recta $y = 3x + 2$ es igual a 3, entonces la derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = 1$ tiene que ser 3. Luego $f'(x) = 2ax \rightarrow f'(1) = 2a \cdot 1 = 3 \rightarrow a = \frac{3}{2}$

Además, se tiene que la función $f(x)$ pasa por el punto (1, 5), es decir, cuando $x = 1$ resulta que $f(x) = 5$.

$$f(x) = ax^2 - b \rightarrow 5 = \frac{3}{2} \cdot 1^2 - b \rightarrow b = \frac{3}{2} - 5 = -\frac{7}{2}$$

Luego la función buscada es $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}$.

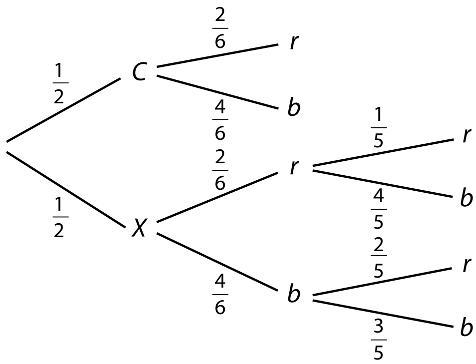
b) $g'(x) = e^{1-x} \cdot (-1) + \dfrac{1}{x+2} = -e^{1-x} + \dfrac{1}{x+2}$

$$g'(1) = -e^{0} + \frac{1}{3} = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

EJERCICIO 3

Parte I

Primero planteamos el diagrama de árbol:



a) Para que hayan salido dos bolas rojas es obligatorio que haya salido cruz en la moneda.

$$P(2 \text{ bolas rojas}) = P(X, r, r) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{30}$$

b) En este caso hay dos posibilidades: puede haber salido cara en la moneda y una sola bola blanca de la urna, o cruz en la moneda y dos bolas blancas de la urna.

$$P(\text{ninguna bola roja}) = P(C, b) + P(X, b, b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{12} + \frac{12}{60} = \frac{8}{15}$$

Parte II

a) El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \, , \, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right)$$

Para un nivel de confianza del 98 % tenemos que buscar en la tabla de la $N(0, 1)$ el valor que acumula una probabilidad de 0,99; que es 2,33. Luego el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza del 98 %, es 2,33.

Calculamos la proporción de hembras, $\hat{p}$, y de machos, $\hat{q}$:

$$\hat{p} = \frac{120}{200} = \frac{3}{5} \qquad \hat{q} = \frac{80}{200} = \frac{2}{5}$$

Sustituyendo los datos en el intervalo de confianza se tiene que el intervalo buscado es:

$$\left(\frac{3}{5} - 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}}{200}} \, ; \, \frac{3}{5} + 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}}{200}} \right) = (0{,}52;\ 0{,}68)$$

b) Como $0{,}5 \notin (0{,}52; 0{,}68)$ no se puede admitir, a un nivel de confianza del 98 %, que la proporción de hembras de pato sea de 0,5.

Criterios específicos de corrección:

OPCIÓN A

EJERCICIO 1: 3 puntos

a) Hasta 1 punto.

b) Hasta 1 punto por el planteamiento.
Hasta 1 punto por la resolución.

EJERCICIO 2: 3 puntos

a) Hasta 0,75 por la monotonía. Hasta 0,75 por los extremos.

b) 0,75 por la curvatura. 0,75 por el punto de inflexión.

EJERCICIO 3

Parte I: 2 puntos

a) Hasta 1 punto.

b) Hasta 1 punto.

Parte II: 2 puntos

a) Hasta 1 punto.

b) Hasta 1 punto.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1: 3 puntos

a) 1 punto por el recinto y 1 punto por los vértices.

b) Hasta 1 punto (0,4 puntos si no da ningún segmento).

EJERCICIO 2: 3 puntos

a) 1 punto por determinar cada valor.

b) 0,75 por la función derivada. 0,25 por el valor de la derivada.

EJERCICIO 3

Parte I: 2 puntos

a) Hasta 1 punto.

b) Hasta 1 punto.

Parte II: 2 puntos

a) 1 punto por el planteamiento. 0,5 puntos por la solución correcta.

b) Hasta 0,5 puntos.