ARAGÓN

Índice

Enunciados de las pruebas y criterios extraídos de la página web de la Universidad de Zaragoza:
http://wzar.unizar.es

Criterios generales de corrección:

- Se valorará el uso del vocabulario y la notación científica.
- En aquellas preguntas en las que no se especifique el método de resolución que se ha de aplicar, se admitirá cualquier forma de resolverlo correctamente y se adaptará la puntuación a esa forma (en caso de duda se consultará al armonizador).
- Tener en cuenta a la hora de corregir la prueba la falta de acuerdo existente sobre los conceptos de convexidad y concavidad en la bibliografía de Bachillerato.
- Si se comete un error que tenga relación con resultados ulteriores de la misma pregunta se ha de tener en cuenta si existe coherencia con el resultado erróneo. En caso afirmativo se valorará el resto de las cuestiones de la misma pregunta, aunque si el error conduce a problemas más simples de los inicialmente propuestos disminuirá la calificación.
- En las preguntas prácticas primará el correcto planteamiento del problema y se valorarán positivamente las explicaciones claras y precisas, y negativamente la ausencia de explicaciones o las explicaciones incorrectas.
- No se dará especial importancia a los errores en las operaciones, excepto que sean reiterativos.
- Se podrán usar calculadoras. Dada la proliferación de las calculadoras programables y la imposibilidad de controlar su uso en la realización de los ejercicios, se exigirá que todos los resultados analíticos y gráficos estén previamente justificados (utilización de fórmulas, obtención de gráficas, cálculo de integrales, derivadas …).
- Por errores ortográficos graves, desorden, falta de limpieza y mala redacción podrá bajarse la calificación del ejercicio hasta un punto, salvo casos extremos.

Enunciado de la prueba (Junio de 2008)

Desarrolle clara y razonadamente tres cuestiones, eligiendo una del par (A1, A2), otra de (B1, B2) y otra de (C1, C2).

CUESTIÓN A1

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Calcule $A \cdot B$. **(0,75 puntos)**

b) Calcule la matriz inversa de B y utilícela para resolver la ecuación $X \cdot B = B + A$. **(2,75 puntos)**

CUESTIÓN A2

Un agricultor desea plantar 750 cerezos, 700 perales y 650 manzanos. En el vivero Agro ofrecen un lote de 15 cerezos, 30 perales y 10 manzanos por 700 euros y en el vivero Ceres el lote de 15 cerezos, 10 perales y 20 manzanos cuesta 650 euros.

a) Plantee y resuelva un programa lineal para averiguar el número de lotes que ha de comprar en cada vivero para que pueda plantar los árboles que desea y para que el coste total de adquisición sea mínimo. **(3 puntos)**

b) ¿Utiliza el agricultor todos los árboles que ha adquirido?, en caso negativo diga cuántos no ha plantado y de qué tipo son. **(0,5 puntos)**

CUESTIÓN B1

a) Derive las funciones $f(x) = x^2 \ln(1-x)$, $g(x) = \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{8}{x^2}$, $h(x) = 2^{2x-1}$. **(1,5 puntos)**

b) La velocidad (en metros/minuto) de un juguete viene dada por:

$$V(t) = \begin{cases} 10t - t^2 & \text{si } t \in [0,\ 2] \cup [8,\ 10] \\ 16 & \text{si } t \in (2,\ 8) \end{cases}$$

siendo la variable t el número de minutos transcurridos desde que se pone en marcha.

b_1) Represente la función velocidad. **(0,75 puntos)**

b_2) A la vista de la gráfica, diga cuál es la velocidad máxima y en qué momento o momentos se alcanza. **(0,5 puntos)**

b_3) Calcule la velocidad del juguete pasados 30 segundos desde su puesta en marcha. ¿Hay algún otro momento en el que lleva la misma velocidad?, en caso afirmativo, diga en cuál. **(0,75 puntos)**

CUESTIÓN B2

a) Derive las funciones:

$$f(x) = 7x - x^2 + \frac{9}{x} \quad g(x) = (1-x)^2 e^x \quad h(x) = \frac{1}{(x+1)^{20}}$$ **(1,5 puntos)**

b) Razone a qué es igual el dominio de la función $f(x)$ del apartado anterior, y diga los puntos en los que alcanza máximo o mínimo relativo. **(2 puntos)**

CUESTIÓN C1

Se tienen dos urnas A y B. En la primera hay 2 bolas blancas, 3 negras y 1 roja y en la segunda hay 3 bolas blancas, 1 negra y 1 verde.

a) Se extrae una bola de cada urna, calcule la probabilidad de que ambas sean del mismo color. **(1,5 puntos)**

b) Se lanza una moneda, si se obtiene cara se extraen dos bolas de la urna A y si se obtiene cruz se extraen dos bolas de la urna B, calcule la probabilidad de que ambas bolas sean blancas. **(1,5 puntos)**

CUESTIÓN C2

La vida media de un determinado modelo de bombilla sigue una distribución normal con desviación típica igual a 60 días. Elegida una muestra y con un nivel de confianza del 98 % se obtiene el intervalo (388,68; 407,32) para la vida media. Calcule la media y el tamaño de la muestra elegida. Detalle los pasos realizados para obtener los resultados. **(3 puntos)**

CUESTIÓN A1

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\det(B) = -6 \neq 0 \rightarrow$ Existe B^{-1}

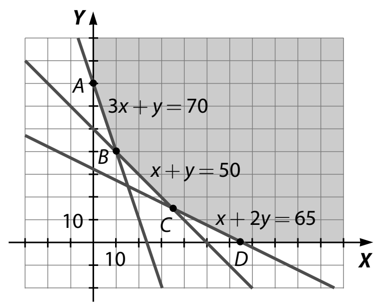
$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$X \cdot B = B + A \rightarrow X = (B + A) \cdot B^{-1} = B \cdot B^{-1} + A \cdot B^{-1} = I + A \cdot B^{-1}$

$$\rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ \frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{7}{3} \\ \frac{7}{6} & \frac{1}{2} & \frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

CUESTIÓN A2

a) Sean x el número de lotes que han de comprarse en el vivero Agro e y el número de lotes que se han de comprar en el vivero Ceres.



La función a minimizar es: $f(x, y) = 700x + 650y$

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 15x + 15y \geq 750 \\ 30x + 10y \geq 700 \\ 10x + 20y \geq 650 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 50 \\ 3x + y = 70 \\ x + 2y = 65 \end{array}\right\}$

Los vértices de la región son: $A(0, 70)$, $B(10, 40)$, $C(35, 15)$ y $D(65, 0)$

Al sustituir las coordenadas de estos puntos en la función objetivo:

$f(0, 70) = 45.500 \qquad f(10, 40) = 33.000 \qquad f(35, 15) = 34.250 \qquad f(65, 0) = 45.500$

Luego para que el coste sea mínimo, el agricultor debe comprar 10 lotes del vivero Agro y 40 lotes del vivero Ceres.

b) El agricultor ha adquirido:

$15 \cdot 10 + 15 \cdot 40 = 750$ cerezos

$30 \cdot 10 + 10 \cdot 40 = 700$ perales

$10 \cdot 10 + 20 \cdot 40 = 900$ manzanos

Por tanto, no ha plantado: $900 - 650 = 250$ manzanos.

CUESTIÓN B1

a) $f'(x) = 2x\ln(1-x) + x^2\dfrac{1}{1-x}(-1) = 2x\ln(1-x) - \dfrac{x^2}{1-x}$

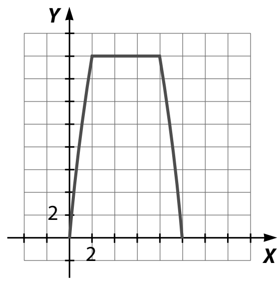
$g'(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{16}{x^3}$

$h'(x) = 2^{2x-1}\cdot 2\ \ln\ 2 = 2^{2x}\ln 2$

b) b$_1$)

x	0	2	8	10
y	0	16	16	0

La representación gráfica de la función es:



b$_2$) La velocidad máxima es de 16 m/min y se alcanza desde el minuto 2 hasta el minuto 8, ambos inclusive.

b$_3$) A los 30 segundos: $V(0{,}5) = 4{,}75$ m/min

Como la gráfica de la función es simétrica respecto de la recta vertical $x = 5$, se alcanza la misma velocidad a los 9 minutos y 30 segundos.

CUESTIÓN B2

a) $f'(x) = 7 - 2x - \dfrac{9}{x^2}$

$g'(x) = 2(1-x)(-1)\,e^x + (1-x)^2\,e^x = (-2+2x+1-2x+x^2)\,e^x = (x^2-1)\,e^x$

$h'(x) = -\dfrac{20}{(x+1)^{21}}$

b) Al tener una expresión con un denominador que se anula para $x = 0$, el dominio de la función $f(x)$ es: Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$7 - 2x - \dfrac{9}{x^2} = 0 \rightarrow 7x^2 - 2x^3 - 9 = 0 \rightarrow (x+1)(x-3)(3-2x) = 0 \rightarrow x = 1, x = 3, x = \dfrac{3}{2}$

$f''(x) = -2 + \dfrac{18}{x^3}$ $\quad f''(-1) = -20 < 0 \rightarrow$ En $x = -1$ hay un máximo.

$f''(3) = -\dfrac{4}{3} < 0 \rightarrow$ En $x = 3$ hay un máximo.

$f''\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{10}{3} > 0 \rightarrow$ En $x = \dfrac{3}{2}$ hay un mínimo.

CUESTIÓN C1

a) Sean los sucesos:

$B_1 =$ «Extraer una bola blanca de la primera urna»
$B_2 =$ «Extraer una bola blanca de la segunda urna»
$N_1 =$ «Extraer una bola negra de la primera urna»
$N_2 =$ «Extraer una bola negra de la segunda urna»

Para obtener dos bolas del mismo color hay dos posibilidades, que las dos bolas sean blancas o que sean negras, y entonces la probabilidad es: $P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap N_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

b) Sean los sucesos:

$C =$ «Salir cara en la moneda»
$X =$ «Salir cruz en la moneda»

Si se extraen dos bolas de la misma urna, la segunda extracción depende de la primera; por tanto, aplicando el teorema de la probabilidad total se tiene que:

$$P(C)P(B_1 \cap B_1) + P(X)P(B_2 \cap B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{60}$$

CUESTIÓN C2

Como el intervalo de confianza es de la forma: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, la media de la muestra es el punto medio del intervalo, luego: $\overline{x} = \frac{388{,}68 + 407{,}32}{2} = 398$ días

La amplitud del intervalo es: $18{,}64 \to z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 9{,}32$

Si $1 - \alpha = 0{,}98 \to \alpha = 0{,}02 \to \frac{\alpha}{2} = 0{,}01$

El valor correspondiente a 0,99 de probabilidad es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}33$

Entonces, se obtiene que: $2{,}33 \cdot \frac{60}{\sqrt{n}} = 9{,}32 \to \sqrt{n} = 15 \to n = 225$ bombillas

Criterios específicos de corrección:

CUESTIÓN A1
a) 0,75 puntos.
b) 2,75 puntos

CUESTIÓN A2
a) 3 puntos.
b) 0,5 puntos.

CUESTIÓN B1
a) 1,5 puntos.
b_1) 0,75 puntos.
b_2) 0,5 puntos.
b_3) 0,75 puntos.

CUESTIÓN B2
a) 1,5 puntos.
b) 2 puntos.

CUESTIÓN C1
a) 1,5 puntos.
b) 1,5 puntos.

CUESTIÓN C2
3 puntos.

Enunciado de la prueba

(Septiembre de 2007)

Elija la opción A o la opción B y desarróllela razonadamente.

OPCIÓN A

1. A primera hora de la mañana en un cajero automático se desea que haya 800 billetes (de 10, 50 y 50 €) con un valor total de 16.000 euros. Sabiendo que por cada 3 billetes de 50 € son necesarios 4 de 20, plantee un sistema de ecuaciones lineales para averiguar cuántos billetes de cada cantidad ha de haber y resuélvalo por el método de Gauss. **(3,5 puntos)**

2. a) Derive las funciones:

$$f(x) = \frac{x^2}{3x^2+1} \quad g(x) = x \cdot (5 - x^2)^4 \quad h(x) = 5\sqrt{\ln x}$$ **(1,5 puntos)**

b) La oferta de un bien conocido su precio, p, es:

$$S(p) = \begin{cases} 30p + 200 & \text{si } 0 \le p \le 10 \\ p^2 - 60p + 1.000 & \text{si } 10 < p \le 40 \end{cases}$$

Represéntela y, a la vista de su gráfica, diga para qué valor del precio se alcanza la máxima y la mínima oferta y para cuáles la oferta es menor que 200 unidades. **(2 puntos)**

3. En un barrio hay dos institutos, en el primero el 60 % de los alumnos estudia inglés y en el segundo el 45 % no lo estudia. Se sortea un viaje a Londres en cada uno de los institutos, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) Los dos alumnos agraciados no estudian inglés. **(1 punto)**

b) Solo estudia inglés el del primer instituto. **(1 punto)**

c) Al menos uno estudia inglés. **(1 punto)**

OPCIÓN B

1. Un camionero transporta dos tipos de mercancías, X e Y, ganando 60 y 50 € por tonelada respectivamente. Al menos debe de transportar 8 toneladas de X y como mucho el doble de cantidad que de Y. ¿A cuánto asciende su ganancia total máxima si dispone de un camión que puede transportar hasta 30 toneladas? **(3,5 puntos)**

2. a) Derive las funciones $f(x) = \frac{x}{6} - 8x^2 + \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x}{\ln x}$, $h(x) = xe^{3x}$. **(1,5 puntos)**

b) Razone a qué es igual el dominio de la función $f(x)$ y calcule los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de dicha función. **(2 puntos)**

3. El número medio de veces que una persona de una determinada ciudad utiliza mensualmente el transporte público tiene una desviación típica igual a 20. Determine el número mínimo de personas que se han de elegir para obtener un intervalo en el que estará la media, con un nivel de confianza del 95 % y con un radio no mayor que 1,4. Explique los pasos realizados para obtener el resultado. **(3 puntos)**

Resolución de la prueba (Septiembre de 2007)

OPCIÓN A

CUESTIÓN 1

Si llamamos x al número de billetes de 10 €, y al número de billetes de 20 € y z al número de billetes de 50 euros, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=800 \\ 10x+20y+50z=16.000 \\ \dfrac{3}{z}=\dfrac{4}{y} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=800 \\ x+2y+5z=1.600 \\ 3y-4z=0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema por el método de Gauss tenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 1 & 2 & 5 & 1.600 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2-F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 4 & 800 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3+F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 4 & 800 \\ 0 & 4 & 0 & 800 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=800 \\ y+4z=800 \\ 4y=800 \end{array}\right\} \rightarrow y=200$$ y, sustituyendo en las demás ecuaciones tenemos que $z=150$ y $x=450$.

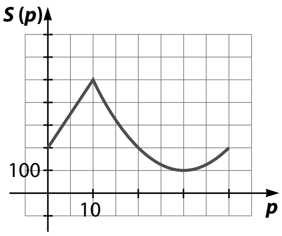
Se necesitarán 450 billetes de 10 €, 200 billetes de 20 € y 150 billetes de 50 €.

CUESTIÓN 2

a) $f'(x)=\dfrac{2x(3x^2+1)-x^2(6x)}{(3x^2+1)^2}=\dfrac{1}{(3x^2+1)^2}$

$g'(x)=(5-x^2)^4+x\cdot 4(-2x)(5-x^2)^3=(5-x^2)^4-8x^2(5-x^2)^3$

$h'(x)=5\dfrac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}}=\dfrac{5}{2x\sqrt{\ln x}}$

b) 

La máxima oferta se alcanza cuando $p=10$, y la menor oferta cuando $p=30$.
La oferta es menor que 200 unidades cuando $20<p<40$.

CUESTIÓN 3

Consideramos los siguientes sucesos:

$A=$ «El alumno del primer instituto estudia inglés»
$B=$ «El alumno del segundo instituto estudia inglés»

$P(A)=0{,}6 \rightarrow P(\overline{A})=0{,}4$ y $P(B)=0{,}55 \rightarrow P(\overline{B})=0{,}45$

a) $P(\overline{A}\cap\overline{B})=0{,}4\cdot 0{,}45=0{,}18$

b) $P(A\cap\overline{B})=0{,}6\cdot 0{,}45=0{,}27$

c) $P(\text{al menos uno estudie inglés})=1-P(\overline{A}\cap\overline{B})=1-0{,}18=0{,}82$

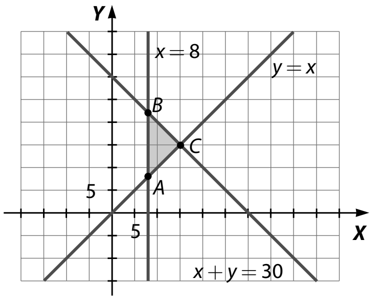
OPCIÓN B

CUESTIÓN 2

Si llamamos x al número de toneladas de la mercancía X e y el número de toneladas de la mercancía Y, obtenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 8 \\ x + y \leq 2y \\ x + y \leq 30 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 8 \\ x \leq y \\ x + y \leq 30 \end{array}\right\}$$

La región factible del problema es:



Los vértices de la región factible son: $A(8, 8)$, $B(8, 22)$ y $C(15, 15)$.

Evaluando la función objetivo $f(x, y) = 60x + 50y$ en los vértices de la región tenemos que:

$$f(8, 8) = 60 \cdot 8 + 50 \cdot 8 = 480 + 400 = 880$$
$$f(8, 22) = 60 \cdot 8 + 50 \cdot 22 = 480 + 1.100 = 1.580$$
$$f(15, 15) = 60 \cdot 15 + 50 \cdot 15 = 900 + 750 = 1.650$$

Por tanto, la ganancia máxima que obtiene el camionero es de 1.650 €, transportando 15 toneladas de la mercancía X y 15 toneladas de la mercancía Y.

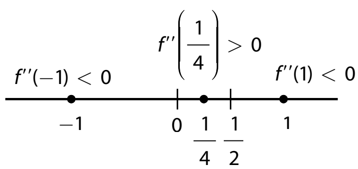
CUESTIÓN 2

a) $f'(x) = \dfrac{1}{6} - 16x - \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad g'(x) = \dfrac{\ln x - x\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ $\qquad h'(x) = e^x + x \cdot 3e^x = e^x(1 + x)$

b) Al tener la función una expresión con un denominador que se anula para $x = 0$: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

Para estudiar la concavidad y la convexidad y la existencia de puntos de inflexión estudiamos el signo de la segunda derivada:

$$f''(x) = -16 + \frac{2}{x^3} = 0 \rightarrow x^3 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

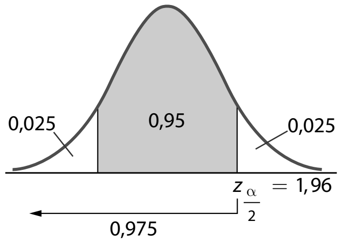


La función es convexa en $(-\infty, 0) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$ y, es cóncava en $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

Por ser $\left(\dfrac{1}{2}, f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{12}\right)$ un punto donde cambia la curvatura, es un punto de inflexión.

CUESTIÓN 3

El nivel de confianza es $1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}025$; y el valor crítico obtenido en la tabla de la distribución normal para 0,975 es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$



El radio es: $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{20}{\sqrt{n}}$

Como $E \leq 1{,}4$; calculamos n con la condición: $1{,}96 \cdot \dfrac{20}{\sqrt{n}} \leq 1{,}4$

$$n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 20}{1{,}4}\right)^2 = 784$$

Se han de elegir como mínimo 784 personas.

Criterios específicos de corrección:

OPCIÓN A	**OPCIÓN B**
CUESTIÓN 1: 3,5 puntos.	**CUESTIÓN 1:** 3,5 puntos.
CUESTIÓN 2 a) 1,5 puntos. b) 2 puntos.	**CUESTIÓN 2** a) 1,5 puntos. b) 2 puntos.
CUESTIÓN 3 a) 1 punto. b) 1 punto. c) 1 punto.	**CUESTIÓN 3:** 3 puntos.

Enunciado de la prueba

(Junio de 2007)

Elija la opción A o la opción B y desarróllela razonadamente.

OPCIÓN A

1. a) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 4a & a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con a un parámetro real no nulo, compruebe que $A^{-1} \cdot B = A$. **(1,5 puntos)**

b) Calcule el rango de la matriz $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro real m. **(2 puntos)**

2. a) Derive las funciones $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$, $g(x) = \dfrac{6 - x^5}{x^6}$, $h(x) = e^{x^3}$. **(1,5 puntos)**

b) Razone a qué es igual el dominio y calcule los valores de x, si existen, para los que $f(x)$ alcanza máximo o mínimo relativo. **(2 puntos)**

3. Pilar y Carmen son aficionadas al tiro con arco. Pilar da en el blanco 3 de cada 5 veces y Carmen da en el blanco 5 de cada 8. Si ambas tiran al blanco a la vez, calcule la probabilidad de los siguientes sucesos: $A =$ «Únicamente Pilar ha dado en el blanco», $B =$ «Ambas han dado en el blanco», $C =$ «Al menos una ha dado en el blanco». **(3 puntos)**

OPCIÓN B

1. Una empresa fabrica dos calidades de un bien, teniendo que producir en total un mínimo de 100 unidades y un máximo de 200. El coste de producción de una unidad de la primera calidad es de 15 € y se obtiene un beneficio unitario de 100 €. El coste de producción de una unidad de la segunda calidad es de 10 € y se obtiene un beneficio unitario de 50 €.

a) Plantee y resuelva un programa lineal para averiguar el coste total mínimo para obtenerse un beneficio total de al menos 12.500 €. **(2 puntos)**

b) Plantee y resuelva un programa lineal para averiguar el beneficio total máximo con un coste total no superior a 2.550 €. **(1,5 puntos)**

2. a) Derive las funciones $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - 8$, $g(x) = \sqrt{x^3}$, $h(x) = x^2 - e^x$. **(1,5 puntos)**

b) Diga si la función $m(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ g(x) & \text{si } 4 < x \end{cases}$ es continua en $x = 4$. **(0,75 puntos)**

c) Escriba la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $m(x)$ en $x = 9$. **(1,25 puntos)**

3. En un supermercado se ha obtenido que el número medio de toneladas descargadas diariamente en los últimos 100 días ha sido igual a 10. Determine el intervalo, con un nivel de confianza del 95 %, en el que estará la media si la desviación típica es igual a 6. Explique los pasos realizados para obtener el resultado. **(3 puntos)**

Resolución de la prueba (Junio de 2007)

OPCIÓN A

CUESTIÓN 1

a) En primer lugar multiplicamos por la matriz A (por la izquierda) en la ecuación matricial:

$$A \cdot A^{-1} \cdot B = A \cdot A \rightarrow B = A^2$$

Si demostramos que $B = A^2$, tendremos probada la igualdad que nos piden.

Calculamos A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 4a & a^2 & 0 \\ 1-a & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Luego se verifica que $A^{-1} \cdot B = A$.

b) Para estudiar el rango de la matriz vamos a calcular su determinante, y estudiamos su valor (nulo o no) en función del parámetro m.

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \\ -5 & -10 & m \end{vmatrix} = -6m + 30 + 45 - 30 - 90 + 3m = -3m - 45 \qquad -3m - 45 = 0 \rightarrow m = -15$$

Si $m \neq 15 \rightarrow$ El determinante es distinto de 0 y el rango es 3.

Si $m = 15 \rightarrow$ El determinante es 0 y, como tenemos un menor de orden 2 distinto de 0

$$\left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 3 \neq 0 \right), \text{ el rango de la matriz es 2.}$$

CUESTIÓN 2

a) $f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x}$

$$g'(x) = \frac{-5x^4 \cdot x^6 - 6x^5 \cdot (6 - x^5)}{x^{12}} = \frac{-5x^{10} - 36x^5 + 6x^{10}}{x^{12}} = \frac{x^{10} - 36x^5}{x^{12}} = \frac{x^5 - 36}{x^7}$$

$$h'(x) = 3x^2 e^{x^3}$$

b) El dominio de $f(x)$ es el dominio común de la función raíz cuadrada y la función logaritmo neperiano, luego es Dom $f = (0, +\infty)$.

Para hallar los máximos y mínimos relativos derivamos e igualamos a 0:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{x} = 0 \rightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1$$

Para saber si es máximo o mínimo calculamos la segunda derivada y observamos su signo.

$$f''(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} + \frac{1}{x^2} \qquad f''(1) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} > 0 \rightarrow \text{En } x = 1 \text{ hay un mínimo.}$$

CUESTIÓN 3

Calculamos las siguientes probabilidades:

$$P(\text{Pilar da en el blanco}) = \frac{3}{5} \qquad P(\text{Carmen da en el blanco}) = \frac{5}{8}$$

Los sucesos «Pilar da en el blanco» y «Carmen da en el blanco» son sucesos independientes, luego la probabilidad de la intersección es el producto de las probabilidades.

$$P(A) = P(\text{Pilar da en el blanco y Carmen no da en el blanco}) = \frac{3}{5}\cdot\left(1-\frac{5}{8}\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{8} = \frac{9}{40}$$

$$P(B) = P(\text{Pilar da en el blanco y Carmen da en el blanco}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

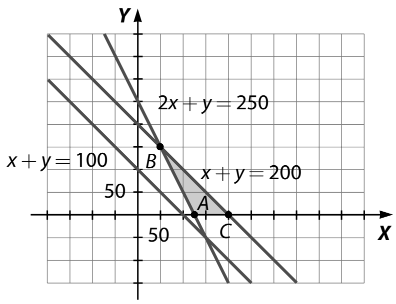
$$P(C) = 1 - P(\text{Pilar no da en el blanco y Carmen no da en el blanco}) = 1-\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}\right) = 1-\frac{3}{20} = \frac{17}{20}$$

OPCIÓN B

CUESTIÓN 1

a) Planteamos las restricciones y dibujamos la región factible.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\geq 100 \\ x+y\leq 200 \\ 100x+50y\geq 12.500 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\geq 100 \\ x+y\leq 200 \\ 2x+y\geq 250 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$



Calculamos los vértices de la región:

Vértice A:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=250 \\ y=0 \end{array}\right\} \rightarrow A(125, 0)$$

Vértice B:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=250 \\ x+y=200 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y=250-2x \\ x+250-2x=200 \end{array}\right\} \rightarrow x=50 \rightarrow y=250-100=150 \rightarrow B(50,150)$$

Vértice C:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=200 \\ y=0 \end{array}\right\} \rightarrow C(200, 0)$$

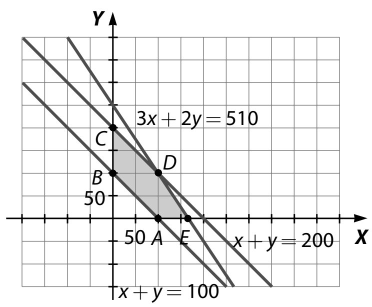
Sustituimos los vértices en la función objetivo $F(x, y) = 15x + 10y$:

$F(125, 0) = 1.875$ $\qquad F(50, 150) = 2.250$ $\qquad F(200, 0) = 3.000$

Luego el coste mínimo se alcanza fabricando 125 unidades de primera calidad y ninguna de segunda calidad.

b) Planteamos las restricciones y dibujamos la región factible:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\geq 100 \\ x+y\leq 200 \\ 15x+10y\leq 2.550 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\geq 100 \\ x+y\leq 200 \\ 3x+2y\leq 510 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$



Calculamos los vértices de la región:

Vértice A:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=100 \\ y=0 \end{array}\right\} \rightarrow A(100, 0)$$

Vértice B: $\left.\begin{matrix} x+y=100 \\ x=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow B(0, 100)$ Vértice D: $\left.\begin{matrix} 15x+10y=2.550 \\ x+y=200 \end{matrix}\right\} \rightarrow D(110, 90)$

Vértice C: $\left.\begin{matrix} x+y=200 \\ x=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow C(0, 200)$ Vértice E: $\left.\begin{matrix} 15x+10y=2550 \\ y=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow E(170, 0)$

Sustituimos los vértices en la función objetivo $F(x, y) = 100x + 50y$:

$F(100, 0) = 10.000$ $F(0, 100) = 5.000$ $F(0, 200) = 10.000$ $F(110, 90) = 15.500$ $F(170, 0) = 17.000$

El beneficio máximo se obtiene fabricando 170 unidades de primera calidad y ninguna de segunda calidad.

CUESTIÓN 2

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2}{4}$ $g'(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ $h'(x) = 2x - e^x$

b) Calculamos los límites laterales de la función $m(x)$ en $x = 4$:

$\lim\limits_{x \to 4^+} m(x) = \lim\limits_{x \to 4} g(x) = \lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x^3} = \sqrt{64} = 8$ $\lim\limits_{x \to 4^-} m(x) = \lim\limits_{x \to 4} f(x) = \lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{x^3}{4} - 8\right) = \dfrac{64}{4} - 8 = 8$

La función es continua en $x = 4$, ya que $\lim\limits_{x \to 4} m(x) = 8 = m(4)$.

c) Calculamos la derivada de la función $m(x)$ en $x = 9$:

$$m'(9) = g'(9) = \frac{3}{2}\sqrt{9} = \frac{9}{2} \qquad m(9) = \sqrt{9^3} = 27$$

Luego la ecuación de la recta tangente en $x = 9$ es: $y - m(9) = m'(9)(x - 9) \rightarrow y - 27 = \dfrac{9}{2} \cdot (x - 9)$

CUESTIÓN 3

El intervalo de confianza para la media de la población es: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$$

El valor de la $N(0, 1)$ cuya probabilidad es 0,975 es 1,96. Luego se tiene que $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

Sustituyendo todos los datos en el intervalo se tiene que el intervalo de confianza para la media es:

$$\left(10 - 1,96 \cdot \frac{6}{\sqrt{100}}; 10 + 1,96 \cdot \frac{6}{\sqrt{100}}\right) = (8,824; 11,176)$$

Criterios específicos de corrección:

OPCIÓN A

CUESTIÓN 1
a) 1,5 puntos.
b) 2 puntos.

CUESTIÓN 2
a) 1,5 puntos.
b) 2 puntos.

CUESTIÓN 3: 3 puntos.

OPCIÓN B

CUESTIÓN 1
a) 2 puntos.
b) 1,5 puntos.

CUESTIÓN 2
a) 1,5 puntos.
b) 0,75 puntos.
c) 1,25 puntos.

CUESTIÓN 3: 3 puntos.