CANARIAS

Índice

Enunciados de las pruebas y criterios extraídos de la página web de la Consejería del Gobierno de Canarias:
http://www.gobiernodecanarias.org/educacion

Enunciado de la prueba (Junio de 2008)

Cada alumno debe elegir solo una de las pruebas (A o B) y, dentro de ella, solo debe responder (como máximo) a cuatro de las cinco preguntas.

Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2,5 puntos.

PRUEBA A

1. Se afirma que «por lo menos el 60 % de los estudiantes almuerzan en el comedor de la Facultad». Para contrastarlo se toma una muestra de 441 estudiantes resultando que 220 almuerzan en dicho comedor.

a) Con un nivel de significación del 1 %, ¿se puede aceptar la afirmación inicial?

b) Construir un intervalo de confianza, de nivel 0,95, para la proporción poblacional de estudiantes que almuerzan en el comedor de la Facultad.

2. Una encuesta, realizada sobre una muestra de los jóvenes de una ciudad, para determinar el gasto mensual medio (expresado en euros) en teléfono móvil, concluyó con el intervalo de confianza al 95 % [10,794; 13,206].

a) ¿Cuál es el gasto mensual medio muestral?

b) ¿Cuál es el correspondiente intervalo de confianza al 99 %?

c) Si, aproximando con cuatro cifras decimales, la desviación típica del gasto mensual es de 7,9989 €, ¿cuál es el tamaño de la muestra encuestada?

3. El precio en euros, P, de un producto depende del número de días, x, transcurridos desde que dicho producto se puso en venta. La función que relaciona x y P es:

$$P(x) = -\frac{x^2}{3} + 20x + 375$$

a) Determinar si la función tiene máximo. Razonar la respuesta.

b) Si el producto se retira del mercado porque el precio es nulo, ¿cuándo ocurre esto?

c) Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de la función.

4. Una alfombra de flores lleva 21 rosas por cada 4 decímetros cuadrados de superficie. Se quiere rellenar de rosas una parte de la alfombra cuya gráfica está limitada por las funciones $y = -x^2 + 4x + 3$ e $y = 3$. Si se mide en metros:

a) Representar la parte de la alfombra.

b) Calcular el área de la parte de la alfombra.

c) Si cada rosa cuesta 0,30 €, ¿cuánto cuesta rellenar esa parte de la alfombra?

5. En un hotel hay un total de 240 turistas ingleses, alemanes y franceses. Si los franceses son la tercera parte de la suma de alemanes e ingleses y el 200 % de los ingleses igualan a la suma de alemanes y franceses:

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Determinar cuántos turistas de cada nacionalidad hay en el hotel.

PRUEBA B

1. En un IES hay 650 estudiantes. Su altura, medida en metros, sigue una variable normal de media 1,65 y de desviación típica 0,1.

a) ¿Cuántos estudiantes se espera que midan más de 1,75 metros?

b) Si el 97,72 % de los estudiantes no sobrepasan una determinada altura, ¿cuál es esa altura?

c) Si se han de elegir los 200 estudiantes cuya altura esté más próxima a la media (por exceso o por defecto), ¿cuál es el intervalo de alturas que se debe fijar?

2. Para estimar el gasto medio por comensal en un restaurante, se toma una muestra de 81 personas resultando que el gasto medio muestral es de 27,50 €. Si la desviación típica es de 5,30 €, con una confianza del 98 %:

a) Construir un intervalo de confianza para la media poblacional de dicho gasto.

b) Hallar el tamaño de la muestra para que la estimación de dicho gasto se haga con un error menor de 1 €.

3. Se afirma que la proporción de personas que contratan un determinado servicio telefónico es, como mínimo, del 23 %. Sin embargo, la compañía telefónica sospecha que actualmente dicha proporción ha variado. Para comprobarlo hace una encuesta a 500 clientes potenciales entre los que solo 98 piensan contratar dicho servicio.

a) Con un nivel de significación del 5 %, determinar si es aceptable la afirmación inicial.

b) Con los datos muestrales y con un nivel del 95 %, determinar el intervalo de confianza para la proporción poblacional de personas que piensan contratar el servicio en cuestión.

4. Los gastos de mantenimiento de la maquinaria de una determinada empresa, $G(x)$ (en miles de euros), vienen dados en función del tiempo, x en meses, que dicha maquinaria lleva en funcionamiento. La expresión de $G(x)$ es:

$$G(x) = \begin{cases} -\dfrac{2x}{15} + 3 & \text{si } 0 \le x \le 15 \\ \dfrac{6x - 60}{x + 15} & \text{si } x > 15 \end{cases}$$

a) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

b) ¿Qué sucede a medida que transcurre el tiempo?

c) ¿Alcanza la función algún máximo o mínimo? Razona la respuesta.

5. En un almacén de electrodomésticos hay neveras y lavadoras, pudiéndose almacenar hasta un total de 180 unidades. Para atender adecuadamente la demanda de los clientes, deben existir al menos 30 lavadoras y el número de neveras debe ser, al menos, igual al número de lavadoras más 20. Si el costo de cada nevera es de 450 € y de cada lavadora es de 375 €:

a) Formular el correspondiente problema.

b) Representar la región factible.

c) ¿Cuántas unidades de cada electrodoméstico se han de almacenar minimizando los costos totales?

PRUEBA A

PREGUNTA 1

a) El contraste es unilateral:

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon\ p \geq 0,6 \\ H_1\colon\ p < 0,6 \end{array}\right\}$$

Para un nivel de significación del 1 %: $z_\alpha = 2{,}33$

Se acepta la hipótesis nula si $p_0 - \hat{p} < z_\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$

En la muestra se tiene que la proporción es: $\hat{p} = \dfrac{220}{441} = 0{,}49$

Al ser $0{,}6 - 0{,}49 = 0{,}11 > 2{,}33 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{441}} = 0{,}05$; se rechaza la hipótesis nula, es decir,

no se acepta que al menos el 60 % de los estudiantes almuercen en el comedor de la Facultad.

b) Si $1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}025$

El valor correspondiente a 0,975 de probabilidad es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

Por tanto, el intervalo correspondiente es:

$$\left(0{,}49 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{441}};\ 0{,}49 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{441}}\right) = (0{,}44;\ 0{,}53)$$

PREGUNTA 2

a) Como el intervalo de confianza es de la forma: $\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, el gasto mensual medio

de la muestra es el valor intermedio del intervalo: $\bar{x} = \dfrac{10{,}794 + 13{,}206}{2} = 12$ €

b) Si $1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}025$

El valor correspondiente a 0,975 de probabilidad es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

La amplitud del intervalo es: $2{,}412 \rightarrow 1{,}206 = 1{,}96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}61$

Si $1-\alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}005$

El valor correspondiente a 0,995 de probabilidad es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58$

Por tanto, el intervalo correspondiente es: $(12 - 2{,}58 \cdot 0{,}61;\ 12 + 2{,}58 \cdot 0{,}61) = (10{,}43;\ 13{,}57)$

c) Como $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}61 \rightarrow \dfrac{7{,}9989}{\sqrt{n}} = 0{,}61 \rightarrow \sqrt{n} = 13{,}11 \rightarrow n = 171{,}95$

El tamaño mínimo de la muestra es de 172 jóvenes.

PREGUNTA 3

a) Derivamos la función y la igualamos a cero: $P'(x) = -\frac{2x}{3} + 20;\ -\frac{2x}{3} + 20 = 0 \rightarrow x = 30$

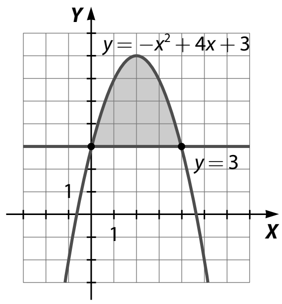
$P''(x) = -\frac{2}{3} < 0 \rightarrow$ En $x = 30$ hay un máximo.

b) $-\frac{x^2}{3} + 20x + 375 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -15 \\ x = 75 \end{cases}$

En las condiciones de la pregunta, la solución negativa no tiene sentido, luego el producto se retira del mercado a los 75 días.

c) La función es creciente en el intervalo (0, 30) y es decreciente en $(30, +\infty)$.

PREGUNTA 4



a) Las coordenadas del vértice de la parábola son: $x = -\frac{b}{2a} = 2 \rightarrow y = 7$

Los puntos de corte con la recta $y = 3$ son: (0, 3) y (4, 3)

b) $\int_0^4 (-x^2 + 4x + 3 - 3)\,dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right]_0^4 = \frac{32}{3}\ \text{m}^2$

c) $\frac{32}{3} : 0{,}04 \cdot 21 = 5.600$ rosas $\quad 5.600 \cdot 0{,}30 = 1.680$ €

PREGUNTA 5

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 240 \\ z = \frac{x+y}{3} \\ 2x = y + z \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 240 \\ x + y - 3z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 240 \\ x + y - 3z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 240 \\ 4z = 240 \\ 3y + 3z = 480 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 80 \\ y = 100 \\ z = 60 \end{cases}$

Hay 80 turistas ingleses, 100 alemanes y 60 franceses.

PRUEBA B

PREGUNTA 1

$N(1{,}65; 0{,}1)$

a) $P(X > 1{,}75) = P\left(\frac{X - 1{,}65}{0{,}1} > \frac{1{,}75 - 1{,}65}{0{,}1}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \le 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

$0{,}1587 \cdot 650 = 103{,}16$

Se espera que 103 estudiantes midan más de 1,75 m.

b) $P(X \le a) = 0{,}9772 \rightarrow P\left(\frac{X - 1{,}65}{0{,}1} \le \frac{a - 1{,}65}{0{,}1}\right) = P\left(Z \le \frac{a - 1{,}65}{0{,}1}\right) = 0{,}9772$

$\rightarrow \frac{a - 1{,}65}{0{,}1} = 2 \rightarrow a = 1{,}85$ m

c) $\dfrac{200}{650} = 0,3077$

$$P(1,65 - a < X < 1,65 + a) = 0,3077 \to P\left(\frac{1,65 - a - 1,65}{0,1} < \frac{X - 1,65}{0,1} < \frac{1,65 + a - 1,65}{0,1}\right) =$$

$$= P\left(-\frac{a}{0,1} < Z < \frac{a}{0,1}\right) = P\left(Z < \frac{a}{0,1}\right) - \left(1 - P\left(Z < \frac{a}{0,1}\right)\right) = 2P\left(Z < \frac{a}{2}\right) - 1 = 0,3077$$

$$\to P\left(Z < \frac{a}{0,1}\right) = 0,6539 \to \frac{a}{0,1} = 0,4 \to a = 0,04$$

El intervalo de alturas que comprende los 200 estudiantes con altura más próxima a la media es: (1,61; 1,69)

PREGUNTA 2

$\sigma = 5,3;\ n = 81$

La media de la muestra es: $\overline{x} = 27,5$

a) Si $1 - \alpha = 0,98 \to \alpha = 0,02 \to \dfrac{\alpha}{2} = 0,01$

El valor correspondiente a 0,99 de probabilidad es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,33$

Por tanto, el intervalo correspondiente es:

$$\left(27,5 - 2,33 \cdot \frac{5,3}{\sqrt{81}};\ 27,5 + 2,33 \cdot \frac{5,3}{\sqrt{81}}\right) = (26,13;\ 28,87)$$

b) Si se desea un error menor de 1 €: $2,33 \cdot \dfrac{5,3}{\sqrt{n}} < 1 \to \sqrt{n} > 12,35 \to n > 152,5$

Por tanto, el tamaño mínimo de la muestra debe ser de 153 personas.

PREGUNTA 3

a) El contraste es unilateral:

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon p \geq 0,23 \\ H_1\colon p < 0,23 \end{array}\right\}$$

Para un nivel de significación del 5 %: $z_\alpha = 1,645$

Se acepta la hipótesis nula si $p_0 - \hat{p} < z_\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{p_0(1 - p_0)}{n}}$.

En la muestra se tiene que la proporción es: $\hat{p} = \dfrac{98}{500} = 0,196$

Al ser $0,23 - 0,196 = 0,034 > 1,645 \cdot \sqrt{\dfrac{0,23 \cdot 0,77}{500}} = 0,031$; se rechaza la hipótesis nula, es decir, no se acepta que, como mínimo, el 23 % de las personas contraten este servicio telefónico.

b) Si $1 - \alpha = 0,95 \to \alpha = 0,05 \to \dfrac{\alpha}{2} = 0,025$

El valor correspondiente a 0,975 de probabilidad es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

Por tanto, el intervalo correspondiente es:

$$\left(0,196 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,23 \cdot 0,77}{500}};\ 0,196 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,23 \cdot 0,77}{500}}\right) = (0,16;\ 0,23)$$

PREGUNTA 4

a) Derivamos la función: $G'(x) = \begin{cases} -\dfrac{2}{15} & \text{si } 0 < x < 15 \\ \dfrac{150}{(x+15)^2} & \text{si } x > 15 \end{cases}$

$G'(x) < 0$ en $(0, 15) \rightarrow G(x)$ es decreciente en $(0, 15)$.

$G'(x) > 0$ en $(15, +\infty) \rightarrow G(x)$ es creciente en $(15, +\infty)$.

b) Al comenzar a utilizar la maquinaria los gastos son: $G(0) = 3 \rightarrow 3.000$ €

En los primeros 15 meses de uso, la función es decreciente, por lo que los gastos se reducen hasta un valor de: $G(15) = 1 \rightarrow 1.000$ €

Después, la función es creciente; esto es, los gastos son cada vez mayores, pero sin superar los 6.000 €.

c) La función tiene un máximo en el punto (0, 3), ya que $G(x)$ es decreciente en (0, 15), y un mínimo en (15, 1) al ser $G(x)$ creciente en $(15, +\infty)$.

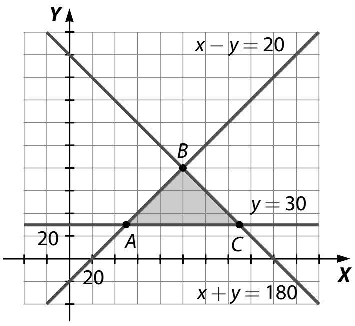
PREGUNTA 5

a) Sean x el número de neveras e y el número de lavadoras que se almacenan.

La función minimiza es: $f(x, y) = 450x + 375y$ Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 180 \\ y \geq 30 \\ x \geq y + 20 \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$$

b)



Los vértices de la región factible son: $A(50, 30)$, $B(100, 80)$ y $C(150, 30)$.

c) Al sustituir las coordenadas de los puntos en la función objetivo, se tiene que:

$$f(50, 30) = 33.750 \qquad f(100, 80) = 75.000 \qquad f(150, 30) = 78.750$$

Por tanto, deben almacenarse 50 neveras y 30 lavadoras para que el coste sea mínimo.

Criterios específicos de corrección:

OPCIÓN A		**OPCIÓN B**	
PREGUNTA 1:	Hasta 2,5 puntos.	**PREGUNTA 1:**	Hasta 2,5 puntos.
PREGUNTA 2:	Hasta 2,5 puntos.	**PREGUNTA 2:**	Hasta 2,5 puntos.
PREGUNTA 3:	Hasta 2,5 puntos.	**PREGUNTA 3:**	Hasta 2,5 puntos.
PREGUNTA 4:	Hasta 2,5 puntos.	**PREGUNTA 4:**	Hasta 2,5 puntos.
PREGUNTA 5:	Hasta 2,5 puntos.	**PREGUNTA 5:**	Hasta 2,5 puntos.

Enunciado de la prueba (Septiembre de 2007)

Cada alumno debe elegir solo una de las pruebas (A o B) y, dentro de ella, solo debe responder (como máximo) a cuatro de las cinco preguntas.

Cada una de las preguntas tiene una puntuación máxima de 2,5 puntos.

PRUEBA A

1. El departamento de extranjería detecta, en un control realizado a 169 inmigrantes, que 60 no tienen permiso de residencia.

a) Con un nivel de confianza del 99 %, construir un intervalo de confianza para la proporción de inmigrantes que tienen permiso de residencia.

b) Con un nivel de significación del 5 %, ¿se puede aceptar la hipótesis de que la proporción de inmigrantes que carecen de permiso de residencia es, a lo sumo, del 25 %?

2. Con una desviación típica de 5 €, el precio medio de un menú en 64 restaurantes de una determinada región es de 20 €.

a) Hallar un intervalo de confianza, de nivel igual a 0,95, para la media del precio de un menú en los restaurantes de la región citada.

b) ¿Cuántos restaurantes se deben considerar para estimar la media del precio de un menú con una confianza del 99 % y un error menor de 1 €?

3. El nivel de las emisiones de gases contaminantes, en toneladas, en una gran industria durante las 10 horas de actividad, viene dado por la expresión $n(t) = \dfrac{t}{8}(20 - 2t)$, siendo t el tiempo en horas, $0 \leq t \leq 10$.

a) ¿Cuál es el nivel máximo? ¿Cuándo se produce? ¿En qué intervalos aumenta o disminuye dicho nivel?

b) ¿En qué momentos el nivel es de cuatro toneladas?

4. Se quiere regar una parcela de jardín limitada por $y = (x - 3)^2$ e $y = x + 3$. Si se mide en metros y cada metro cuadrado debe recibir 12 litros de agua:

a) Representar la parcela.

b) ¿Cuántos litros de agua hay que utilizar?

5. Un comercio tiene un total de 270 unidades de productos de tres tipos: A, B y C. Del tipo A tiene 30 unidades menos que de la totalidad de B más C y del tipo C tiene el 35 % de la suma de A más B. ¿Cuántos productos de cada tipo hay en el comercio?

PRUEBA B

1. Cinco de cada veinte aparatos electrónicos de un determinado tipo, tienen alguna avería dentro del período de garantía de 2 años. Un comercio vende 120 de esos aparatos:

a) ¿Cuál es el número esperado de aparatos que se averiarán en el período de garantía?

b) Hallar la probabilidad de que el número de aparatos averiados esté entre 25 y 40.

c) Hallar la probabilidad de que el número de aparatos no averiados sea inferior a 80.

2. Se afirma que el precio medio de la compra en un hipermercado, durante los comienzos de mes, es, a lo sumo, de 155 € con una desviación típica de 20 €. Para contrastar lo anterior, se elige una muestra de 81 de dichas compras y se obtiene que el precio medio es igual a 165 €. Suponiendo que el precio de la compra sigue una distribución normal:

a) Con un nivel de significación del 1 %, ¿se puede aceptar la hipótesis inicial?

b) A partir de los datos muestrales y con una confianza del 90 %, ¿cuál es el error máximo al estimar el precio medio de la compra?

3. En un barrio de una gran ciudad se inspeccionan 121 viviendas detectando que 22 están deshabitadas.

a) Obtener un intervalo de confianza para la proporción de viviendas habitadas en dicho barrio con un nivel de confianza del 90 %.

b) Con un nivel de significación del 5 %, ¿se puede aceptar la hipótesis de que la proporción de viviendas deshabitadas en el barrio es, a lo sumo, del 15 %?

4. Los beneficios (en millones de euros) generados por el funcionamiento de una industria vienen dados en función del tiempo (en años) por: $b(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$

a) ¿Cuándo los beneficios son de un millón de euros?

b) ¿Cuándo los beneficios son máximos? ¿Cuándo crecen y cuándo decrecen?

c) ¿Qué ocurre cuando pasan muchos años?

5. Dos compuestos medicinales tienen dos principios activos A y B. Por cada píldora, el primer compuesto tiene 2 unidades de A y 6 de B, mientras que el segundo compuesto tiene 4 unidades de A y 4 unidades de B. Durante un período de tiempo, un paciente debe recibir un mínimo de 16 unidades tipo A y un mínimo de 24 unidades tipo B. Si el coste de cada píldora del primer compuesto es de 0,50 € y el coste de cada píldora del segundo compuesto es de 0,90 €:

a) Representar la región factible.

b) Calcular el número óptimo de píldoras de cada compuesto que debe recibir el paciente para minimizar los costos.

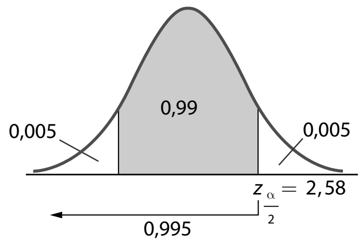
PRUEBA A

PREGUNTA 1

a) Con un nivel de confianza del 99 %:

$$1-\alpha = 0{,}99 \quad \text{y} \quad \alpha = 0{,}01$$

El valor correspondiente a 0,995 es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58$



Tienen permiso de residencia 109 inmigrantes.

$$\hat{p} = \frac{109}{169} = 0{,}64 \quad \text{y} \quad n = 169$$

El intervalo de confianza es: $\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) =$

$$= \left(0{,}64 - 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}64 \cdot 0{,}36}{169}};\ 0{,}64 + 2{,}58 \cdot \sqrt{\frac{0{,}64 \cdot 0{,}36}{169}}\right) = (0{,}54;\ 0{,}74)$$

b) El nivel de significación del 5 % significa que: $\alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\alpha} = 1{,}645$

La proporción de inmigrantes sin permiso es: $\hat{p} = \dfrac{60}{169} = 0{,}35$

Planteamos un contraste de hipótesis unilateral para la proporción:

$$\left.\begin{array}{l} H_0:\ \ p \leq 0{,}25 = p_0 \\ H_1:\ \ p > 0{,}25 \end{array}\right\}$$

La zona de aceptación de la hipótesis nula es:

$$\left(-\infty;\ p_0 + z_{\alpha}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right) = \left(-\infty;\ 0{,}25 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}25 \cdot 0{,}75}{169}}\right) =$$

$$= (-\infty;\ 0{,}25 + 1{,}645 \cdot 0{,}033) = (-\infty;\ 0{,}25 + 0{,}054) = (-\infty;\ 0{,}304)$$

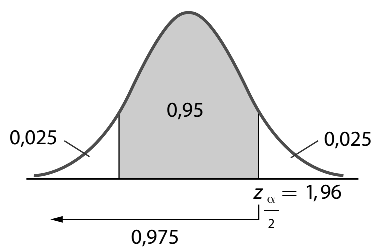
Como $\hat{p} \notin (-\infty;\ 0{,}304)$, no podemos aceptar la hipótesis nula, es decir, no aceptamos, con un nivel de significación del 5 % que el número de inmigrantes sin permiso sea menor del 25%.

PREGUNTA 2

a) $\sigma = 5,\ \ n = 64\ \ \text{y}\ \ \overline{x} = 20$

A un nivel de confianza del 0,95 % le corresponde:

$$\alpha = 0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$$

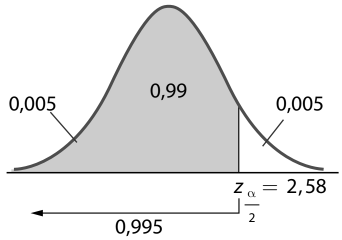


El intervalo de confianza para la media será:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(20 - 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{64}},\ \ 20 + 1{,}96 \cdot \frac{5}{\sqrt{64}}\right) =$$

$$= (20 - 1{,}22;\ 20 + 1{,}22) = (18{,}78;\ 21{,}22)$$

b) El nivel de confianza es $1 - \alpha = 0{,}99$. El valor crítico, según la tabla de la distribución normal, es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58$



El error máximo es:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}58 \cdot \frac{5}{\sqrt{n}} < 1$$

$$n = (2{,}58 \cdot 5)^2 = 166{,}41$$

Por tanto, se deben considerar al menos 167 restaurantes.

PREGUNTA 3

a) $n(t) = \frac{t}{8} \cdot (20 - 2t) = \frac{5}{2}t - \frac{1}{4}t^2,\ 0 \le t \le 10 \to n'(t) = \frac{5}{2} - \frac{2}{4}t = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}t = 0 \to t = 5$

$$n(5) = \frac{5}{2} \cdot 5 - \frac{1}{4} \cdot 25 = 6{,}25 \text{ toneladas}$$

El nivel máximo de emisiones se produce a las 5 horas de actividad, siendo de 6,25 toneladas.

Este nivel aumenta en las 5 primeras horas de actividad, disminuyendo a continuación hasta el cese de la misma.

b) El nivel será de 4 toneladas cuando:

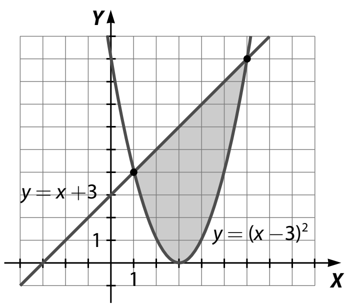
$$\frac{5}{2}t - \frac{1}{4}t^2 = 4 \to t^2 - 10t - 16 = 0 \to t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} \to \begin{cases} t = 2 \\ t = 8 \end{cases}$$

Por tanto, el nivel de emisión será de 4 toneladas a las 2 horas y a las 8 horas de actividad.

PREGUNTA 4

a) Calculamos los puntos de corte:

$$(x-3)^2 = x + 3$$
$$x^2 + 9 - 6x = x + 3$$
$$x^2 - 7x + 6 = 0$$
$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{12}{2} = 6 \to (6, 9) \\ \frac{2}{2} = 1 \to (1, 4) \end{cases}$$



b) Hallamos el área de la región limitada por ambas funciones:

$$\text{Área} = \int_1^6 \left[x + 3 - (x-3)^2\right] dx = \int_1^6 (-x^2 + 7x - 6)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 6x\right]_1^6 =$$

$$= \left[-\frac{216}{3} + \frac{252}{2} - 36\right] - \left[-\frac{1}{3} + \frac{7}{2} - 6\right] = 18 - \left[-\frac{17}{6}\right] = \frac{108 + 17}{6} = \frac{125}{6} \text{ m}^2$$

Habrá que utilizar: $12 \cdot \frac{125}{6} = 250$ litros de agua

PREGUNTA 5

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C=270 \\ A=B+C-30 \\ C=\dfrac{35}{100}\cdot(A+B) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rcl} A+\quad B+\quad C &=& 270 \\ A-\quad B-\quad C &=& -30 \\ 35A+35B-100C &=& 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[F_1+F_2]{} 2A=240 \rightarrow A=120$$

Sustituyendo en F_2 y F_3 el valor de A:

$$\left.\begin{array}{r} B+\quad C=150 \\ 7B-20C=-840 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 7B+7C=1.050 \\ 7B-20C=-840 \end{array}\right\}$$
$$\rightarrow 27C=1.890 \rightarrow C=70 \quad \text{y} \quad B=150-70=80$$

En el comercio hay 120 productos del tipo A, 80 productos del tipo B y 70 productos del tipo C.

PRUEBA B

PREGUNTA 1

La población sigue una distribución binomial de parámetros $n=120$ y $p=\dfrac{5}{20}$.

Como $n\cdot p=120\cdot 0{,}25>5$ y $n\cdot q=120\cdot 0{,}75>5$, aproximamos a una distribución normal a partir del teorema de Moivre:

$$\mu=n\cdot p=120\cdot 0{,}25=30 \qquad \sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{120\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75}=4{,}74$$

Si $X\equiv B(120;0{,}25)\rightarrow X'\equiv N(30;4{,}74)$

a) En el período de garantía se espera que se averíen: $\dfrac{5}{20}\cdot 120=30$ aparatos

b) $P(25\le X'\le 40)=P(24{,}5\le X'\le 40{,}5)=P\left(\dfrac{24{,}5-30}{4{,}74}\le Z\le\dfrac{40{,}5-30}{4{,}74}\right)=$

$=P(-1{,}16\le Z\le 2{,}21)=P(Z\le 2{,}21)-P(Z\le -1{,}16)=P(Z\le 2{,}21)-(1-P(Z\le 1{,}16))=$
$=0{,}9864-(1-0{,}877)=0{,}9864-0{,}123=0{,}8634$

La probabilidad de que el número de aparatos averiados esté entre 25 y 40 es de 0,86.

c) $P(\text{no averiados}<80)=P(X'\ge 20)=P\left(Z\ge\dfrac{20-30}{4{,}74}\right)=P(Z\ge -2{,}1)=P(Z\le 2{,}1)=0{,}9821$

La probabilidad de que el número de aparatos no averiados sea inferior a 80 es de 0,98.

PREGUNTA 2

a) Es un contraste de hipótesis unilateral para la media.

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \mu\le 155=\mu_0 \\ H_1: \mu>155 \end{array}\right\}$$

Como $\alpha=0{,}01$; entonces $1-\alpha=0{,}99$ y $z_\alpha=2{,}33$.

La región de aceptación será:

$$\left(-\infty;\mu_0+z_\alpha\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\left(-\infty;155+2{,}33\cdot\frac{20}{\sqrt{81}}\right)=(-\infty;160{,}18)$$

Como $165\notin(-\infty;160{,}18)$, no se puede aceptar con un nivel del 1 % la hipótesis inicial.

b) Con una confianza del 90 %, $1-\alpha = 0{,}9$ y $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}64$:

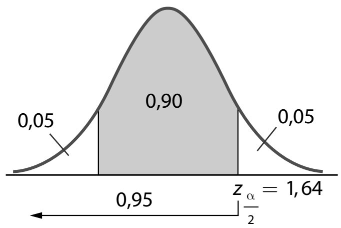
$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}64 \cdot \frac{20}{\sqrt{81}} = 3{,}64$$

Por tanto, el error máximo al estimar el precio medio de la compra es de 3,64 €.

PREGUNTA 3

Hay 99 viviendas habitadas y $\hat{p} = \dfrac{99}{121} = 0{,}82$.

a) Con un nivel de confianza del 90 %, tenemos que $1 - \alpha = 0{,}9$ y $\alpha = 0{,}1$.



El intervalo de confianza para la proporción es:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) = \left(0{,}82 - 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{0{,}82 \cdot 0{,}18}{121}};\ 0{,}82 + 1{,}64 \cdot \sqrt{\frac{0{,}82 \cdot 0{,}18}{121}}\right) =$$

$$= (0{,}82 - 0{,}057;\ 0{,}82 + 0{,}057) = (0{,}763;\ 0{,}877)$$

b) Tenemos que $\alpha = 0{,}05$ y que la población de viviendas deshabitadas es: $\dfrac{22}{121} = 0{,}18$

Planteamos un contraste de hipótesis unilateral para la proporción:

$$\left.\begin{array}{l} H_0: p \le 0{,}15 = p_0 \\ H_1: p > 0{,}15 \end{array}\right\}$$

Según la tabla de la distribución normal:

$$\alpha = 0{,}05 \rightarrow z_\alpha = 1{,}645$$

La zona de aceptación de la hipótesis nula es:

$$\left(-\infty;\ p_0 + z_\alpha \cdot \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right) = \left(-\infty;\ 0{,}15 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{121}}\right) = (-\infty;\ 0{,}15 + 0{,}053) = (-\infty;\ 0{,}203)$$

Como $0{,}15 \in (-\infty; 0{,}203)$, podemos aceptar la hipótesis nula, es decir, aceptamos con un nivel de significación del 5 % que la proporción de viviendas deshabitadas sea, a lo sumo, del 15 %.

PREGUNTA 4

a) Tendremos que calcular para qué valor de t se verifica que $b(t) = 1$.

$$b(t) = 1 = \frac{2t}{1+t^2} \rightarrow 1 + t^2 = 2t \rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$$

Los beneficios son de 1 millón de euros en el primer año.

b) $b'(t) = \dfrac{2(1+t^2) - 2t \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \dfrac{-2t^2 + 2}{(1+t^2)^2} = 0 \rightarrow -2t^2 + 2 = 0 \rightarrow t^2 = 1 \rightarrow t = \pm 1$

Como no consideramos el valor $t = -1$, los beneficios son máximos al terminar el primer año.

Para ver el crecimiento y el decrecimiento, analizamos la primera derivada: en (0, 1) $\rightarrow b'(t) > 0$ y en $(1, \infty) \rightarrow b'(t) < 0$.

Los beneficios crecen durante el primer año y luego decrecen.

c) Calculamos $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{2t}{1+t^2} = 0$, y esto indica que los beneficios generados por la industria son cada vez menores, pero nunca nulos.

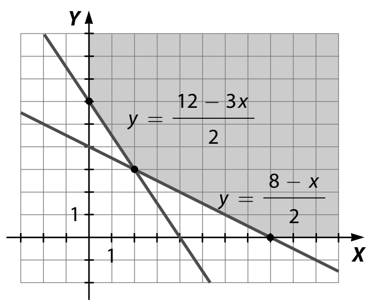
PREGUNTA 5

a) Es un problema de programación lineal. Formamos la siguiente tabla para simplificar el enunciado. Si llamamos *x* al primer compuesto e *y* al segundo compuesto se tiene que:

	Primer compuesto	Segundo compuesto	Unidades mínimas
Principio *A*	2	4	16
Principio *B*	6	4	24
Precio	0,5	0,9	

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 4y \geq 16 \\ 6x + 4y \geq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2y \geq 8 \\ 3x + 2y \geq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{8 - x}{2} \\ y = \dfrac{12 - 3x}{2} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{8-x}{2} = \frac{12-3x}{2} \rightarrow x = 2 \quad \text{e} \quad y = 3$$

La región factible es la zona sombreada. Podemos ver que no está acotada.



b) Como el paciente tiene que tomar unidades del tipo *A* y unidades del tipo *B*, necesariamente el valor mínimo estará en tomar 2 unidades del primer compuesto y 3 unidades del segundo compuesto. Su coste es: $f(2,3) = 0{,}5 \cdot 2 + 0{,}9 \cdot 3 = 3{,}70$ €

Criterios específicos de corrección:

OPCIÓN A

PREGUNTA 1: Hasta 2,5 puntos.
PREGUNTA 2: Hasta 2,5 puntos.
PREGUNTA 3: Hasta 2,5 puntos.
PREGUNTA 4: Hasta 2,5 puntos.
PREGUNTA 5: Hasta 2,5 puntos.

OPCIÓN B

PREGUNTA 1: Hasta 2,5 puntos.
PREGUNTA 2: Hasta 2,5 puntos.
PREGUNTA 3: Hasta 2,5 puntos.
PREGUNTA 4: Hasta 2,5 puntos.
PREGUNTA 5: Hasta 2,5 puntos.