CASTILLA Y LEÓN

Índice

Enunciados de las pruebas y criterios extraídos de la página web
de la Universidad de Salamanca:
http://www.usal.es

Criterios generales de corrección:

- Dentro de cada bloque se puntuará sobre un máximo de 3 puntos cada una de las preguntas de la 1 a la 3, y con 1 punto la pregunta 4. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones obtenidas en cada pregunta.
- En el caso de que algún examen, en contra de las instrucciones recibidas, presente respuestas a preguntas de ambos bloques solo se corregirán las que correspondan al bloque A.
- Los errores de cálculo en razonamientos esencialmente correctos se penalizarán disminuyendo hasta en el 40 % la valoración en el apartado correspondiente. Los errores de notación solo se tendrán en cuenta si son reiterados y se penalizarán hasta en un 20 % de la calificación máxima atribuida al problema o apartado.
- Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados por el alumno o la alumna.
- Se valorará positivamente la capacidad, de la alumna o alumno, de utilizar el modo de hacer matemático para resolver la prueba. En todo caso se valorarán los mecanismos de resolución no habituales, atendiendo a la argumentación realizada y a la corrección de las operaciones efectuadas.

Enunciado de la prueba (Junio de 2008)

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada pregunta de la 1 a la 3 se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. La pregunta 4 se puntuará sobre un máximo de 1 punto. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de las cuatro preguntas.

Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados por el alumno/a.

OPTATIVIDAD: EL ALUMNO/A DEBERÁ ESCOGER UNO DE LOS DOS BLOQUES Y DESARROLLAR LAS PREGUNTAS DEL MISMO.

BLOQUE A

1. Sea el sistema:

$$\begin{cases} a^2x + a^3y = 1 \\ x + a^2y = 0 \end{cases}$$

a) En función del número de soluciones, clasifica el sistema para los distintos valores del parámetro a.

b) Resuélvelo para $a = 2$.

2. Sea $C(t)$ el dinero, en miles de euros, que hay depositado en un día en una sucursal bancaria, en función del tiempo t en horas desde que la sucursal está abierta. Sabiendo que $C'(t) = t^2 - 7t + 10$ y que la sucursal permaneció abierta un total de 8 horas:

a) Obtén los máximos y mínimos locales de la función $C(t)$.

b) Obtén la expresión de $C(t)$ sabiendo que a las 6 horas de estar abierta la sucursal disponía de 20.000 €.

3. Se juntan 3 clases A, B y C con el mismo número de alumnos en el salón de actos de un instituto. Se sabe que el 10 % de los alumnos en la clase A son zurdos, en la clase B el 8 % son zurdos y en la clase C el 88 % de los alumnos no son zurdos.

a) Si elegimos al azar un alumno del salón de actos, ¿con qué probabilidad el alumno no será zurdo?

b) Sabiendo que un alumno elegido al azar del salón de actos es zurdo, ¿cuál es la probabilidad de que no pertenezca a la clase C?

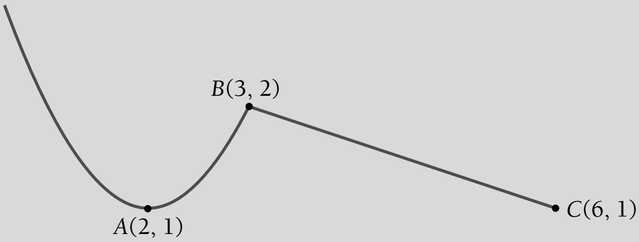
4. Calcula la probabilidad del suceso $\overline{A} \cap B$ sabiendo que la probabilidad de que ocurra al menos uno de los dos sucesos A o B es 0,8 y que $P(A) = 0{,}3$.

BLOQUE B

1. Una fábrica de papel tiene almacenados 4.000 kg de pasta de papel normal y 3.000 kg de pasta de papel reciclado. La fábrica produce dos tipos diferentes de cajas de cartón. Para el primer tipo se utilizan 0,2 kg de pasta de papel normal y 0,1 kg de pasta de papel reciclado, mientras que para la caja del segundo tipo se utilizan 0,2 kg de pasta de papel normal y 0,3 kg de pasta de papel reciclado. Los beneficios que la fábrica obtiene por la venta de cada caja son, respectivamente, 5 € para el primer tipo y 6 € para el segundo tipo de cajas. Utilizando técnicas de programación lineal, calcula cuántas cajas de cada tipo deben fabricar para obtener el máximo beneficio. ¿A cuánto asciende el beneficio máximo obtenido?

2. Sea $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \leq 3 \\ mx + n & \text{si } x > 3 \end{cases}$.

La representación gráfica de la función $f(x)$ es la siguiente:



Calcula la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que el punto A es el vértice de la parábola.

3. El coeficiente intelectual de los individuos presentes en una sala puede suponerse que sigue una distribución normal de media μ y varianza igual a 81.

a) ¿Cuánto vale μ si sabemos que solo un 10% de las personas en la sala sobrepasa un coeficiente intelectual de 105?

En los dos siguientes apartados supondremos que $\mu = 95$:

b) Elegida una persona al azar de la sala, ¿cuál es la probabilidad de que su coeficiente intelectual esté entre 86 y 107?

c) Elegimos 9 personas al azar de la sala y calculamos la media de sus coeficientes intelectuales, ¿cuál es la probabilidad de que esa media esté entre 86 y 107?

4. Un cartero reparte al azar 3 cartas entre 3 destinatarios. Calcula la probabilidad de que al menos una de las 3 cartas llegue a su destino correcto.

BLOQUE A

PREGUNTA 1

a) $\left.\begin{array}{r} a^2x + a^3y = 1 \\ x + a^2y = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} a^2x + a^3y = 1 \\ (a^3 - a^4)y = 1 \end{array}\right\} \to y = \dfrac{1}{a^3 - a^4}$

$$a^3 - a^4 = 0 \to \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, el sistema es compatible determinado.
- Si $a = 0$, el sistema es compatible indeterminado.
- Si $a = 1$, el sistema es incompatible.

b) $\left.\begin{array}{r} 4x + 8y = 1 \\ x + 4y = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 4x + 8y = 1 \\ -8y = 1 \end{array}\right\} \to \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = -\dfrac{1}{8} \end{cases}$

PREGUNTA 2

a) $t^2 - 7t + 10 = 0 \to \begin{cases} t = 2 \\ t = 5 \end{cases}$

$$C''(t) = 2t - 7 \to \begin{cases} C''(2) = -3 < 0 \to \text{En } t = 2 \text{ hay un máximo.} \\ C''(5) = 3 > 0 \to \text{En } t = 5 \text{ hay un mínimo.} \end{cases}$$

b) $\displaystyle\int (t^2 - 7t + 10)\, dt = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 10t + k$

$$C(6) = 20 \to \frac{1}{3} \cdot 6^3 - \frac{7}{2} \cdot 6^2 + 10 \cdot 6 + k = 20 \to k = 14$$

La expresión de la función es: $C(t) = \dfrac{1}{3}t^3 - \dfrac{7}{2}t^2 + 10t + 14$

PREGUNTA 3

a) Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(\overline{Z}) = P(A)P(\overline{Z} / A) + P(B)P(\overline{Z} / B) + P(C)P(\overline{Z} / C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{90}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{92}{100} + \frac{1}{3} \cdot \frac{88}{100} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{90}{100} + \frac{92}{100} + \frac{88}{100} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{10} = \frac{9}{10}$$

b) Aplicando el teorema de Bayes:

$$P(\overline{C} / Z) = 1 - P(C / Z) = 1 - \frac{P(C)P(Z / C)}{P(Z)} = 1 - \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{12}{100}}{\frac{1}{10}} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

PREGUNTA 4

$P(\text{al menos ocurre uno de los sucesos}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(A \cup B) = 0{,}8$

$P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A) = 0{,}8 - 0{,}3 = 0{,}5$

BLOQUE B

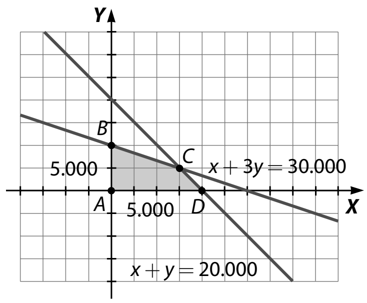
PREGUNTA 1

Sean x e y las cajas de cada tipo que deben fabricarse, respectivamente.

La función que hay que maximizar es: $f(x, y) = 5x + 6y$

Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}2x + 0{,}2y \leq 4.000 \\ 0{,}1x + 0{,}3y \leq 3.000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$



Los vértices del polígono son: $A(0, 0)$, $B(0, 10.000)$, $C(15.000, 5.000)$ y $D(20.000, 0)$.
Al sustituir las coordenadas de estos puntos en la función objetivo, se tiene:

$$f(0, 0) = 0$$
$$f(0, 10.000) = 60.000$$
$$f(15.000, 5.000) = 105.000$$
$$f(20.000, 0) = 100.000$$

Por tanto, el máximo beneficio se obtiene fabricando 15.000 cajas del primer tipo y 5.000 cajas del segundo tipo, y este beneficio asciende a 105.000 €.

PREGUNTA 2

Si el punto $A(2, 1)$ es el vértice de la parábola:

$$-\frac{b}{2a} = 2 \rightarrow b = -4a$$

Entonces la expresión de la parábola es: $ax^2 - 4ax + c$

Como pasa por los puntos A y B:

$$\left.\begin{array}{l} 4a - 8a + c = 1 \\ 9a - 12a + c = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -4a + c = 1 \\ -3a + c = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ c = 5 \end{array}\right. \rightarrow b = -4$$

Además, como la recta pasa por los puntos B y C:

$$\left.\begin{array}{l} 3m + n = 2 \\ 6m + n = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} m = -\dfrac{1}{3} \\ n = 3 \end{array}\right.$$

La expresión de la función es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & \text{si } x \leq 3 \\ -\dfrac{1}{3}x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

PREGUNTA 3

a) $X \equiv N(\mu, 9)$

$$P(X > 105) = 0{,}1 \rightarrow P\left(\frac{X-\mu}{9} > \frac{105-\mu}{9}\right) = P\left(Z > \frac{105-\mu}{9}\right) = 0{,}1 \rightarrow P\left(Z \le \frac{105-\mu}{9}\right) = 0{,}9$$

$$\rightarrow \frac{105-\mu}{9} = 1{,}29 \rightarrow 105-\mu = 11{,}61 \rightarrow \mu = 93{,}39$$

b) $X \equiv N(95, 9)$

$$P(86 < X < 107) = P\left(\frac{86-95}{9} < \frac{X-95}{9} < \frac{107-95}{9}\right) = P(-1 < Z < 1{,}33) =$$

$$= P(Z < 1{,}33) - (1 - P(Z < 1)) = 0{,}9082 - 1 + 0{,}8413 = 0{,}7495$$

c) $\overline{X} \equiv N\left(95, \frac{9}{\sqrt{9}}\right) = N(95, 3)$

$$P(86 < \overline{X} < 107) = P\left(\frac{86-95}{3} < \frac{\overline{X}-95}{3} < \frac{107-95}{3}\right) = P(-3 < Z < 4) =$$

$$= P(Z < 4) - (1 - P(Z < 3)) = 0{,}9999 - 1 + 0{,}9987 = 0{,}9986$$

PREGUNTA 4

Sea A_i = «El cartero acierte con la carta *i*».

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i) - \sum_{i,\,j=1}^{3} P(A_i \cap A_j) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \binom{3}{1} \cdot \frac{2!}{3!} - \binom{3}{2} \cdot \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} = \frac{2}{3}$$

Criterios específicos de corrección:

BLOQUE A

1. El apartado a) se valora hasta 2 puntos, y el apartado b) se valora hasta 1 punto.
2. Cada uno de los apartados a) y b) se valora hasta 1,5 puntos.
3. Cada uno de los apartados a) y b) se valora hasta 1,5 puntos.
4. Se valora hasta 1 punto.

BLOQUE B

1. Se valora hasta 3 puntos, atendiendo a la utilización de las técnicas de programación lineal. En este contexto, la determinación de la función objetivo se valora hasta 0,5 puntos, el sistema de restricciones se valora hasta 1 punto, la determinación de la región factible se valora hasta 0,5 puntos y la determinación del vértice óptimo y del beneficio máximo hasta 1 punto.
2. El cálculo de la ecuación de la recta se valora hasta 1,5 puntos y el cálculo de la ecuación de la parábola hasta 1,5 puntos.
3. Cada uno de los apartados a), b) y c) se valora hasta 1 punto.
4. Se valora hasta 1 punto.

Enunciado de la prueba

(Septiembre de 2007)

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada pregunta de la 1 a la 3 se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. La pregunta 4 se puntuará sobre un máximo de 1 punto. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de las cuatro preguntas.

Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados por el alumno/a.

OPTATIVIDAD: EL ALUMNO/A DEBERÁ ESCOGER UNO DE LOS DOS BLOQUES Y DESARROLLAR LAS PREGUNTAS DEL MISMO.

BLOQUE A

1. Cada instalación de una televisión analógica necesita 10 metros de cable y cada instalación de televisión digital necesita 20 metros. Cada televisión analógica necesita 20 minutos de instalación y 30 minutos cada televisión digital. Disponemos un máximo de 400 metros de cable al día. Tenemos que trabajar al menos 300 minutos al día. Diariamente podemos instalar un máximo de 20 televisiones analógicas y debemos instalar al menos 6 televisiones digitales. Por cada televisión analógica instalada obtenemos unos ingresos de 10 € y por cada televisión digital 15 €.
   Utilizando técnicas de programación lineal, representa la región factible, calcula el número de televisores analógicos y digitales que permiten obtener mayores ingresos diariamente, así como el ingreso máximo diario que se puede conseguir.

2. Encuentra dos números positivos cuya suma sea 120, tales que el producto de uno de ellos por el cuadrado del otro sea máximo.

3. El 35 % de los créditos de un banco son para vivienda, el 50 % para industrias y el 15 % para consumo diverso. Resultan impagados el 20 % de los créditos para vivienda, el 15 % de los créditos para industria y el 70 % de los créditos para consumo.
   a) Calcula la probabilidad de que se pague un crédito elegido al azar.
   b) Sabiendo que un crédito elegido al azar no fue pagado, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un crédito para industria?

4. Un mensaje es transmitido con errores con probabilidad 0,1. Emitimos de forma independiente 10 mensajes. Calcula la probabilidad de que al menos alguno de los 10 mensajes haya sido transmitido con errores.

BLOQUE B

1. Se considera el sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x - 5y + z = 4 \\ x - y + (a-2)z = 2 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro a.

b) Halla todas las soluciones para $a = 3$.

2. Una parábola tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx + 2$. Se sabe que en el punto $(1, 3)$ tiene un máximo o un mínimo. Calcula el valor de a y b. Determina si el punto $(1, 3)$ corresponde a un máximo o a un mínimo.

3. Se supone que el número de horas extras realizadas por un trabajador de una empresa en un determinado mes sigue una distribución normal con media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 0{,}25$ horas.

a) Si el número medio de horas extras realizadas en dicho mes por 20 empleados seleccionados de forma aleatoria en la empresa resultó ser $\overline{x} = 4.925$ horas, ¿permite ese valor de $\overline{x}$ rechazar a nivel $\alpha = 0{,}05$ que μ fuera igual a 5 horas?

b) Da un intervalo de confianza al 99 % para μ usando la media de la muestra anterior de 20 trabajadores ($\overline{x} = 4.925$ horas).

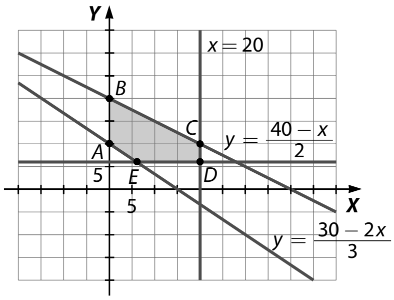
4. Dos sucesos A y B tienen probabilidades 0,4 y 0,5. Sabiendo que son independientes, calcula la probabilidad de que no suceda ninguno de los dos.

BLOQUE A

PREGUNTA 1

Llamamos x = «Número de televisores analógicos» e y = «Número de televisores digitales».
La función a maximizar es $f(x) = 10x + 15y$ con las siguientes restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 10x + 20y \leq 400 \\ 20x + 30y \geq 300 \\ x \leq 20 \\ y \geq 6 \end{array}\right\}$$



Los vértices de la región factible son: $A(0, 10)$, $B(0, 20)$, $C(20, 10)$, $D(20, 6)$ y $E(6, 6)$.
Evaluamos los vértices de la región factible:

$$f(0,10) = 10 \cdot 0 + 15 \cdot 10 = 150$$
$$f(0,20) = 10 \cdot 0 + 15 \cdot 20 = 300$$
$$f(20,10) = 10 \cdot 20 + 15 \cdot 10 = 350$$
$$f(20,6) = 10 \cdot 20 + 15 \cdot 6 = 290$$
$$f(6,6) = 10 \cdot 6 + 15 \cdot 6 = 150$$

Se obtiene el máximo ingreso instalando 20 televisores analógicos y 10 televisores digitales.
El ingreso máximo diario será de 350 €.

PREGUNTA 2

Si llamamos x e y a los números pedidos: $x + y = 120$
Hallamos el máximo de la función $f(x) = x^2(120 - x) = 120x^2 - x^3$:

$$f'(x) = 240x - 3x^2 = 0 \rightarrow x(240 - 3x) = 0 \rightarrow x = 80$$
$$f''(x) = 240 - 6x \rightarrow f''(80) < 0 \rightarrow x = 80 \text{ es un máximo.}$$

Los números pedidos son $x = 80$ e $y = 40$.

PREGUNTA 3

a) Sean los sucesos $\overline{P}$ = «Crédito impagado», P = «Crédito pagado», V = «Crédito de vivienda», I = «Crédito de industria» y C = «Crédito de consumo diverso».

$$P(P) = P(V) \cdot P(P / V) + P(I) \cdot P(P / I) + P(C) \cdot P(P / C) = 0{,}35 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}85 + 0{,}15 \cdot 0{,}3 = 0{,}75$$

b) $P(I / \overline{P}) = \dfrac{P(I \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \dfrac{0{,}5 \cdot 0{,}15}{1 - 0{,}75} = \dfrac{0{,}075}{0{,}25} = 0{,}3$

PREGUNTA 4

P(al menos un mensaje, de los diez, tenga error) = 1 − P(todos sean correctos) =

$$= 1 - (0{,}9)^{10} = 1 - 0{,}348 = 0{,}652$$

BLOQUE B

PREGUNTA 1

a) Escribimos la matriz de los coeficientes, M, y la matriz ampliada, M^*:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & a-2 \end{pmatrix}$$

$$M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & a-2 & 2 \end{array}\right)$$

$$|M| = -5(a-2) - 2 - 3 - [-5 - 6(a-2) - 1] = a - 1 = 0 \rightarrow a = 1$$

- Si $a \neq 1$, Rango (M) = Rango $(M^*) = 3$, y el sistema es compatible determinado
- Si $a = 1$, Rango (M) = Rango $(M^*) = 2$ (ya que M^* tiene un menor de orden 2 no nulo), el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a = 3$, el sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 1 \\ 3x - 5y + z = 4 \\ x - y + z = 2 \end{array}\right\}$$

Utilizamos, para su resolución, el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 1 \\ 2x - 3y = 3 \\ y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow y = 1,\ x = 3 \text{ y } z = 0$$

PREGUNTA 2

Por pertenecer el punto (1, 3) a la parábola $\rightarrow 3 = a + b + 2$

Y por ser (1, 3) un punto crítico y $f'(x) = 2ax + b \rightarrow 2 \cdot a \cdot 1 + b = 0$

Resolvemos el sistema: $\left.\begin{array}{r} a + b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow a = -1 \text{ y } b = 2$

Por tanto, la parábola es $f(x) = -x^2 + 2x + 2$.

Como $a < 0$, la parábola es decreciente y el punto (1, 3) es un máximo.

PREGUNTA 3

a) Formulamos las hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \mu = 5 = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq 5 \end{array}\right\}$$

El nivel de significación es $\alpha = 0{,}05$.

El estadístico de contraste viene dado por $z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Determinamos la región de aceptación: es un contraste bilateral para la media, y la región de aceptación se obtiene buscando en la tabla de la distribución normal.

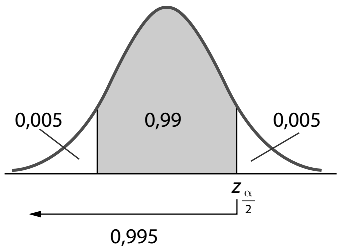
$$\left(-z_{\frac{\alpha}{2}}, z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = (-1{,}96\,;\,1{,}96)$$

Sabemos que $\bar{x} = 4.925$, $n = 20$ y $\sigma = 0,25$.

$$z = \frac{4.925 - 5}{\frac{0,25}{\sqrt{20}}} = \frac{4.920}{0,055} = 89.454,5$$

Como $89.454,5 \notin (-1,96;\ 1,96)$ se rechaza la hipótesis nula, es decir, rechazamos que la media del número de horas extras realizadas por un trabajador fuera igual a 5 horas.

b) A un nivel de confianza del 99 % le corresponde un valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,58$.



El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(4.925 - 2,58 \cdot \frac{0,25}{\sqrt{20}},\ 4.925 + 2,58 \cdot \frac{0,25}{\sqrt{20}}\right) =$$

$$= (4.925 - 0,144;\ 4.925 + 0,144) = (4.924,9;\ 4.925,14)$$

PREGUNTA 4

Sabemos que $P(A) = 0,4$ y $P(B) = 0,5$ y, por ser independientes, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (0,4 + 0,5 - 0,4 \cdot 0,5) = 1 - 0,7 = 0,3$$

Criterios específicos de corrección:

BLOQUE A

1. Se valora hasta 3 puntos, atendiendo a la utilización de las técnicas de programación lineal. En este contexto, la determinación de la función objetivo se valora hasta 0,5 puntos, el sistema de restricciones se valora hasta 1 punto, la determinación de la región factible se valora hasta 0,5 puntos y la determinación del vértice óptimo y del beneficio máximo hasta 1 punto.
2. El planteamiento del problema se valora hasta 1 punto. La determinación de los números pedidos usando técnicas apropiadas se valorará hasta 2 puntos.
3. Cada uno de los apartados a) y b) se valora hasta 1,5 puntos.
4. Se valora hasta 1 punto.

BLOQUE B

1. El apartado a) se valora hasta 2 puntos. La solución del sistema en b) se valora hasta 1 punto.
2. El planteamiento del problema se valora hasta 1,5 puntos. La determinación de las constantes pedidas se valora hasta 1 punto. Determinar si en ese punto la función alcanza un máximo o un mínimo se valora hasta 0,5 puntos.
3. Cada uno de los apartados a) y b) se valora hasta 1,5 puntos.
4. Se valora hasta 1 punto.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada pregunta de la 1 a la 3 se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. La pregunta 4 se puntuará sobre un máximo de 1 punto. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de las cuatro preguntas.

Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados por el alumno/a.

OPTATIVIDAD: EL ALUMNO/A DEBERÁ ESCOGER UNO DE LOS DOS BLOQUES Y DESARROLLAR LAS PREGUNTAS DEL MISMO.

BLOQUE A

1. Julia, Clara y Miguel reparten hojas de propaganda. Clara reparte siempre el 20 % del total. Miguel reparte 100 hojas más que Julia. Entre Clara y Julia reparten 850 hojas. Plantea un sistema de ecuaciones que permita saber cuántas hojas reparte cada uno. Sabiendo que la empresa paga 1 céntimo por cada hoja repartida, calcula el dinero que ha recibido cada uno de los tres.

2. La superficie de *media* mesa está limitada por las funciones $f(x) = x^2$ y la recta $g(x) = 1$, estando x expresado en metros. El barniz se vende en botes para cubrir una superficie de 2 metros cuadrados.
   ¿Cuántos botes necesitaremos comprar para barnizar *toda* la mesa y cuántos metros cuadrados podríamos barnizar con el barniz sobrante?

3. El peso de los usuarios de un gimnasio tiene una media desconocida y una desviación típica $\sigma = 5{,}4$ kg. Tomamos una muestra aleatoria de 100 usuarios obteniendo una media de 60 kg.
   a) Calcula con un nivel de confianza del 95 % el intervalo de confianza para el peso medio de todos los usuarios.
   b) Se realiza la siguiente afirmación: «El peso medio de un usuario de ese gimnasio está comprendido entre 58,5 y 61,5 kg». ¿Con qué probabilidad esta afirmación es correcta?

4. Dos sucesos tienen la misma probabilidad igual a 0,5. La probabilidad de que ocurra uno de los sucesos sabiendo que ha ocurrido el otro es igual a 0,3.
   ¿Cuál es la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos sucesos?

BLOQUE B

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 - ay \\ 1 - a \end{pmatrix}$.
   a) Consideramos x e y dos variables, y a un parámetro. Obtén el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que resulta de plantear $AB - C = D$.
   b) Estudia el sistema para los distintos valores de a.
   c) Encuentra una solución para $a = 2$.

2. Una discoteca abre sus puertas a las 10 de la noche sin ningún cliente y las cierra cuando se han marchado todos. Se supone que la función que representa el número de clientes (N) en función del número de horas que lleva abierta, t, es: $N(t) = 80t - 10t^2$.

a) Determina a qué hora el número de clientes es máximo. ¿Cuántos clientes hay en ese momento?

b) ¿A qué hora cerrará la discoteca?

3. El tiempo en minutos transcurrido hasta que una persona es atendida en la sucursal A de un banco sigue una distribución normal de media $\mu = 9$ y desviación típica $\sigma = 1$, mientras que el tiempo transcurrido hasta que es atendido en la sucursal B sigue, también, una distribución normal de media $\mu = 8{,}5$ y varianza $\sigma^2 = 4$.

a) Si un cliente tiene que hacer una gestión bancaria y solo dispone de 10 minutos, ¿en qué sucursal A o B será más fácil que le hayan atendido en el tiempo que dispone?

b) ¿Cuánto debe valer x si sabemos que el 80 % de los clientes que van a la sucursal B esperan más de x minutos?

c) Un cliente, teniendo en cuenta la proximidad de estas dos sucursales a su casa, elige ir a la sucursal A con probabilidad 0,3 y a la sucursal B con probabilidad 0,7. Eligiendo una de las visitas al banco de este cliente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el cliente haya tenido que esperar más de 10 minutos?

4. En una joyería hay dos alarmas. La probabilidad de que se active la primera es 1/3, de que se active la segunda es 2/5 y de que se activen las dos a la vez es 1/15. ¿Cuál es la probabilidad de que se active alguna de las dos? ¿Y de que no se active ninguna de ellas?

BLOQUE A

PREGUNTA 1

Si $x =$ «Hojas que reparte Julia», $y =$ «Hojas que reparte Clara» y $z =$ «Hojas que reparte Miguel»:

$$\left.\begin{aligned} y &= 0{,}2(x+y+z)\\ z &= x+100\\ x+y &= 850\end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} y &= 0{,}2(x+y+z)\\ z &= x+100\\ y &= 850-x\end{aligned}\right\} \to 850-x = 0{,}2x+0{,}2(850-x)+0{,}2(x+100)$$

$$\to 850-x = 0{,}2x+170-0{,}2x+0{,}2x+20 \to 1{,}2x = 660 \to x = 550$$

$$z = x+100 = 550+100 = 650 \to y = 850-x = 850-550 = 300$$

Julia recibe 5,50 €, Clara 3 € y Miguel 6,50 €.

PREGUNTA 2

La zona sombreada es la mitad de la mesa, luego la superficie de la mesa es:

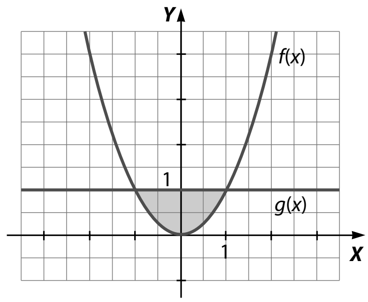
$$2\cdot\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = 2\cdot\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2\cdot\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right)\right) = 2\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}\ \text{m}^2$$

Como con un bote podemos pintar 2 m², dividimos entre 2:

$$\frac{8}{3}:2 = \frac{8}{6} = 1+\frac{1}{3}$$

Se necesitan 2 botes y sobran: $1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ partes de un bote de barniz

Con esta parte de bote podemos pintar: $\frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{4}{3}$ m²



PREGUNTA 3

a) El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad 1-\alpha = 0{,}95 \to \alpha = 0{,}05 \to \frac{\alpha}{2} = 0{,}025 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$$

Sustituyendo todos los datos en el intervalo se tiene que el intervalo de confianza es:

$$\left(60-1{,}96\cdot\frac{5{,}4}{\sqrt{100}};\ 60+1{,}96\cdot\frac{5{,}4}{\sqrt{100}}\right) = (58{,}94;\ 61{,}06)$$

b) Ahora tenemos el intervalo de confianza y necesitamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para saber cuál es el nivel de confianza con el que se ha construido.

$$60-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{5{,}4}{\sqrt{100}} = 58{,}5 \qquad 60+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{5{,}4}{\sqrt{100}} = 61{,}5$$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = (60-58{,}5)\cdot\frac{10}{5{,}4} = 2{,}78 \qquad z_{\frac{\alpha}{2}} = (61{,}5-60)\cdot\frac{10}{5{,}4} = 2{,}78$$

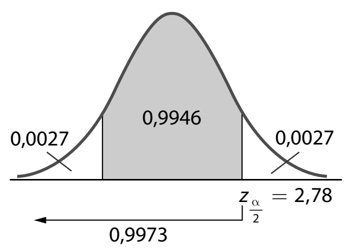
Hay que buscar en la tabla de la $N(0,\ 1)$ la probabilidad acumulada por el valor 2,78:

$F(2{,}78) = 0{,}9973$

$1-0{,}9973 = 0{,}0027$

$0{,}9973-0{,}0027 = 0{,}9946$

La afirmación es cierta con una probabilidad del 0,9946.



PREGUNTA 4

Si llamamos a los dos sucesos A y B, los datos del problema son:

$$P(A) = 0,5 \qquad P(B) = 0,5 \qquad P(A / B) = 0,3$$

Nos piden hallar $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$.

Como conocemos $P(A / B)$ tenemos que:

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow 0,3 = \frac{P(A \cap B)}{0,5} \rightarrow P(A \cap B) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15$$

Además, se tiene que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cup B) = 0,5 + 0,5 - 0,15 = 0,85$

Luego resulta que: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - 0,85 = 0,15$

BLOQUE B

PREGUNTA 1

a) $AB - C = D \rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - ay \\ 1 - a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ax + y \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - ay \\ 1 - a \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} ax + y - y = 6 - ay \\ y - ay = 1 - a \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} ax + ay = 6 \\ (1 - a)y = (1 - a) \end{array} \right\}$$

b) Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 1 - a \end{vmatrix} = a \cdot (1 - a) \qquad |M| = 0 \text{ si } a = 0 \text{ o } a = 1$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, entonces rango $(M) = 2 =$ Rango $(M^*) \rightarrow$ El sistema es compatible determinado.
- Si $a = 0$, entonces Rango $(M) = 1 \neq 2 =$ Rango $(M^*) \rightarrow$ El sistema es incompatible.
  El Rango de M^* es 2, ya que tiene un menor de orden 2 no nulo.
- Si $a = 1$, entonces Rango $(M) = 1 =$ Rango $(M^*) <$ número de incógnitas $\rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

El rango de M^* es 1, ya que todos los menores de orden 2 son nulos.

c) Si $a = 2$, el sistema es:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 6 \\ -y = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ y = 1 \end{array} \right\} \rightarrow x + 1 = 3 \rightarrow x = 2$$

La solución es $x = 2$, $y = 1$.

PREGUNTA 2

a) $N'(t) = 80 - 20t \;\; N'(t) = 0 \rightarrow 80 - 20t = 0 \rightarrow t = 4$
$N''(t) = -20 \;\; N''(4) = -20 < 0 \rightarrow$ En $t = 4$ hay un máximo.
El número máximo de clientes se encuentra transcurridas 4 horas, es decir, a las 2 de la mañana.
El número de clientes en ese momento es: $N(4) = 80 \cdot 4 - 10 \cdot 4^2 = 320 - 160 = 160$ clientes

b) $N(t) = 0 \rightarrow 80t - 10t^2 = 0 \rightarrow 10t \cdot (8 - t) = 0 \rightarrow t = 0$ o $t = 8$
En $t = 0$ se abre la discoteca y en $t = 8$, es decir, a las 6 de la mañana se cierra la discoteca.

PREGUNTA 3

Sean $X =$ «Tiempo de espera en la sucursal A» e $Y =$ «Tiempo de espera en la sucursal B»

$$X \equiv N(9, 1) \qquad Y \equiv N(8,5; 2)$$

a) $P(0 \leq X \leq 10) = P\left(\frac{0 - 9}{1} \leq Z \leq \frac{10 - 9}{1}\right) = P(-9 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - \big(1 - P(Z \leq 9)\big) =$

$$= 0,8413 - (1 - 1) = 0,8413$$

$$P(0 \le Y \le 10) = P\left(\frac{0-8,5}{2} \le Z \le \frac{10-8,5}{2}\right) = P(-4,25 \le Z \le 0,75) =$$
$$= P(Z \le 0,75) - (1 - P(Z \le 4,25)) = 0,7734 - (1-1) = 0,7734$$

Es más fácil que le atiendan en la sucursal A en el tiempo que dispone.

b) $P(Y > x) = 0,8$

Primero se busca $P(Z > k) = 0,8$ y luego tipificamos.

Como en la tabla de la normal no tenemos la probabilidad de valores mayores que k transformamos de esta forma: $P(Z > k) = P(Z < -k)$

Buscando en la tabla de la $N(0, 1)$ tenemos que $-k = 0,84$; luego $k = 0,84$.

Como $Z = \dfrac{Y - 8,5}{2}$, tenemos que: $k = \dfrac{x - 8,5}{2} \rightarrow x = 6,82$ minutos

c) Definimos los siguientes sucesos:

A = «El cliente elige la sucursal A»
B = «El cliente elige la sucursal B»
E = «El cliente espera más de 10 minutos»

Sabemos que $P(A) = 0,3$ y $P(B) = 0,7$. Además, del apartado a) sabemos que $P(E / A) = 1 - 0,8413 = 0,1587$ y que $P(E / B) = 1 - 0,7734 = 0,2266$.

La probabilidad que nos piden es:

$$P(E) = P(A) \cdot P(E / A) + P(B) \cdot P(E / B) = 0,3 \cdot 0,1587 + 0,7 \cdot 0,2266 = 0,2062$$

PREGUNTA 4

Definimos los siguientes sucesos:

A = «Se activa la primera alarma» B = «Se activa la segunda alarma»

Con los datos del problema tenemos estas probabilidades: $P(A) = \dfrac{1}{3}$ $P(B) = \dfrac{2}{5}$ $P(A \cap B) = \dfrac{1}{15}$

Las probabilidades que nos piden son:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{1}{15} = \frac{2}{3}$$
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Criterios específicos de corrección:

BLOQUE A

1. El planteamiento del problema se valora hasta 1,5 puntos. La resolución del sistema se valora hasta 1,5 puntos.
2. El planteamiento del problema se valora hasta 1,5 puntos. El cálculo del número de botes necesarios se valora hasta 0,75 puntos. El cálculo de los metros cuadrados sobrantes se valora hasta 0,75 puntos.
3. Cada uno de los apartados a) y b) se valora hasta 1,5 puntos.
4. Se valora hasta 1 punto.

BLOQUE B

1. Cada uno de los apartados a), b) y c) se valora hasta 1 punto.
2. Cada uno de los apartados a) y b) se valora hasta 1,5 puntos.
3. Cada uno de los apartados a), b) y c) se valora hasta 1 punto.
4. Se valora hasta 0,5 puntos cada pregunta.