COMUNIDAD VALENCIANA

Índice

Enunciados de las pruebas y criterios extraídos de la página web de la Universidad Politécnica de Valencia: http://www.upv.es

Criterios generales de corrección:

- Todos los problemas de la opción elegida por los estudiantes de entre las dos propuestas en la prueba contribuirán por igual a la calificación del ejercicio. Cada problema valdrá un tercio de la nota total.
- Los problemas obtendrán la máxima puntuación cuando su planteamiento, desarrollo y solución sean correctos.
- Se valorará de manera especialmente positiva la adecuada estructuración de las contestaciones atendiendo a los siguientes factores:
  – La claridad conceptual en la exposición.
  – La justificación de la estrategia diseñada para resolver el problema.
  – La construcción o elección razonada de los elementos (funciones, modelos probabilísticos, sistemas de referencia, gráficos, etc.) necesarios para la formalización matemática de la situación a resolver.
  – La corrección lógica en los razonamientos o cálculos que conduzcan a la obtención de la o las soluciones o a la convicción de su inexistencia.
  – La interpretación de las soluciones obtenidas, si procede, y, en su caso, la puesta de manifiesto de la inverosimilitud o incorrección de las mismas.
- En tanto que las matemáticas constituyen también un lenguaje que contiene recursos apropiados para convencer y comunicar, se valorará positivamente la destreza demostrada en cuanto a:
  – La claridad y precisión, cualidades ambas compatibles con la flexibilidad para explorar distintas estrategias o para reconsiderar los supuestos de partida si es necesario o conveniente.
  – La coherencia y pertinencia de los argumentos esgrimidos.
  – La originalidad de los enfoques adoptados.
  – La concisión, pulcritud y claridad comunicativa de los elementos auxiliares del desarrollo (diagramas, gráficos, tablas, etc.).

Enunciado de la prueba (Junio de 2008)

Se elegirá el ejercicio A o el ejercicio B, del que SOLO se harán TRES de los cuatro problemas. LOS TRES PROBLEMAS PUNTÚAN POR IGUAL.

Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica para realizar el examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria).

EJERCICIO A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas.

PROBLEMA 1

Una inmobiliaria ha vendido un total de 65 plazas de garaje en tres urbanizaciones diferentes. Las ganancias obtenidas por la venta de una plaza de garaje en la urbanización A son de 2.000 €, 4.000 € por una en la urbanización B y 6.000 por una en la urbanización C. Se sabe que se han vendido un 50 % más de plazas en la urbanización A que en la urbanización C. Calcula el número de plazas de garaje vendidas en cada urbanización sabiendo que el beneficio obtenido por las vendidas en la urbanización C es igual a la suma de los beneficios obtenidos por las vendidas en las urbanizaciones A y B.

PROBLEMA 2

a) Representa gráficamente el conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y \geq 5 \\ x - 2y \geq -1 \\ 5x + 4y \leq 16 \\ x - y \leq 5 \end{array}\right\}$$

b) Determina los vértices de la región obtenida en el apartado anterior.

c) Calcula el punto donde alcanza el mínimo la función $f(x, y) = 3x - y$ en dicha región. Determina dicho valor mínimo.

PROBLEMA 3

a) Calcula los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ en el intervalo$[1, 4]$. Justifica que los puntos encontrados son máximos o mínimos absolutos.

b) Estudia la continuidad en el intervalo $[0, 4]$ de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & 0 \leq x < 1 \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 1 & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

PROBLEMA 4

Dados dos sucesos A y B, sabemos que $P(A \cap B) = 0{,}1$; $P(A \cup B) = 0{,}7$ y $P(A / B) = 0{,}2$.

a) Calcula $P(A)$ y $P(B)$.

b) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

c) Calcula $P(\overline{A} \cup \overline{B})$, donde $\overline{A}$ representa el suceso complementario o contrario de A.

EJERCICIO B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas.

PROBLEMA 1

Determina la matriz X que verifica la ecuación $AX + I = AB^t$, siendo I la matriz identidad, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y B^t la traspuesta de la matriz B.

PROBLEMA 2

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$, determina:

a) Dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Ecuación de sus asíntotas.
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Máximos y mínimos relativos.
e) Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

PROBLEMA 3

El coste de fabricación en euros de x unidades de un artículo viene dado por la función $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 20$.

a) ¿Cuál es la función que determina el coste de fabricación unitario?
b) ¿Para qué producción resulta mínimo el coste unitario? ¿Cuánto vale este? Justifica que es mínimo.

PROBLEMA 4

El 60 % de los alumnos de cierta asignatura aprueba en junio. El 80 % de los presentados en septiembre también aprueba la asignatura. Sabiendo que los alumnos que se presentaron en septiembre son todos los que no aprobaron en junio, determina:

a) La probabilidad de que un alumno seleccionado al azar haya aprobado la asignatura.
b) Si sabemos que un estudiante ha aprobado la asignatura, la probabilidad de que haya sido en junio.

EJERCICIO A

PROBLEMA 1

Sean x, y y z el número de plazas de garaje vendidas en cada urbanización.

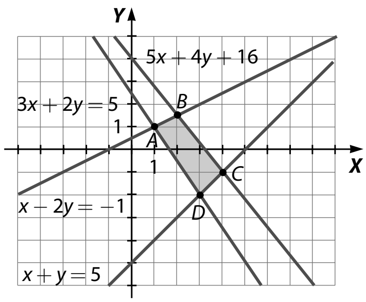
$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=65 \\ x=1{,}5z \\ 6.000z=2.000x+4.000y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rl} x+\ \ y+\ \ z= & 65 \\ 2x \qquad - 3z= & 0 \\ x+2y-3z= & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rl} x+\ \ y+\ \ z= & 65 \\ 2y+5z= & 130 \\ y-4z= & -65 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{rl} x+\ y+\ \ z= & 65 \\ 2y+\ 5z= & 130 \\ 13z= & 260 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=30 \\ y=15 \\ z=20 \end{array}\right.$$

Se han vendido 30 plazas de garaje en la urbanización A, 15 plazas en B y 20 plazas en C.

PROBLEMA 2

a)



b) Los vértices de la región factible son: $A(1, 1)$, $B\left(2, \dfrac{3}{2}\right)$, $C(4, -1)$ y $D(3, -2)$.

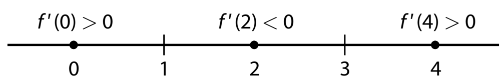
c) $f(1, 1) = 2 \quad f\left(2, \dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{9}{2} \quad f(4, -1) = 13 \quad f(3, -2) = 11$

El valor mínimo de la función se alcanza en el punto $A(1, 1)$, en el que la función vale 2.

PROBLEMA 3

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$



La función $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ y es decreciente en $(1, 3)$; por tanto, en $x = 1$ hay un máximo absoluto y en $x = 3$ hay un mínimo absoluto.

b) Las funciones que forman $f(x)$ son continuas, por lo que estudiamos la continuidad en el punto en el que $f(x)$ cambia su expresión algebraica: $x = 1$

$f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-}(2x+3) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}(x^3 - 6x^2 + 9x + 1) = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Existe } \lim_{x\to 1} f(x) = 5.$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) \rightarrow$ La función es continua en $x = 1$ y, por tanto, en todo el intervalo $[0, 4]$.

PROBLEMA 4

a) $P(A / B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \to P(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A / B)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}2} = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \to P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) =$
$= 0{,}7 - 0{,}5 + 0{,}1 = 0{,}3$

b) $P(A) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15 \neq P(A \cap B) \to$ Los sucesos A y B no son independientes.

c) $P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) + P(B) - (P(B) - P(A \cap B)) =$
$= P(\bar{A}) + P(A \cap B) = (1 - 0{,}3) + 0{,}1 = 0{,}8$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1

$AX + I = AB^t \to AX = AB^t - I \to X = A^{-1}(AB^t - I)$ $\qquad A^{-1} = \dfrac{\text{Adj }(A)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2

a) $4 - x^2 = 0 \to x = \pm 2 \to \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Solo corta en el punto (0, 0).

b) $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2}{4 - x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2}{4 - x^2} = +\infty \end{array}\right\} \to x = -2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

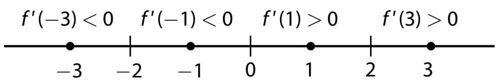
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2}{4 - x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2}{4 - x^2} = -\infty \end{array}\right\} \to x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{4 - x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{8x}{(4 - x^2)^2} = -1 \to y = -1 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntotas oblicuas.

c) $f'(x) = \dfrac{2x(4 - x^2) - x^2(-2x)}{(4 - x^2)^2} = \dfrac{8x}{(4 - x^2)^2}$

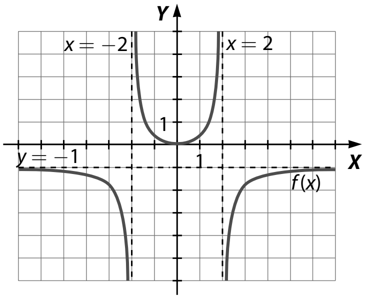
$\dfrac{8x}{(4 - x^2)^2} = 0 \to x = 0$



La función $f(x)$ es creciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$ y es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$.

d) El punto (0, 0) es un mínimo relativo. No hay máximos relativos.

e)



PROBLEMA 3

a) Para cada unidad, la función que determina el coste es:

$$g(x) = \frac{x - 2\sqrt{x} + 20}{x}$$

b) $g'(x) = \dfrac{\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot x - (x - 2\sqrt{x} + 20)}{x^2} = \dfrac{\sqrt{x} - 20}{x^2}$

$$\frac{\sqrt{x} - 20}{x^2} = 0 \rightarrow \sqrt{x} = 20 \rightarrow x = 400$$

La función $g(x)$ solo está definida en los valores positivos, y como $g'(395) < 0$ y $g'(405) > 0$, se verifica que el mínimo se encuentra en el punto $x = 400$.

Por tanto, el coste unitario mínimo es: $g(400) = 0{,}95$

PROBLEMA 4

Sean los sucesos:

$A =$ «Aprobar la asignatura», $J =$ «Aprobar en junio» y $S =$ «Aprobar en septiembre»

a) $P(A) = P(J) + P(S \cap \overline{J}) = 0{,}6 + 0{,}32 = 0{,}92$

b) $P(J \,/\, A) = \dfrac{P(J \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0{,}6}{0{,}92} = 0{,}65$

Enunciado de la prueba (Septiembre de 2007)

Se elegirá el ejercicio A o el ejercicio B, del que SOLO se harán TRES de los cuatro problemas. LOS TRES PROBLEMAS PUNTÚAN POR IGUAL.

Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica para realizar el examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria).

EJERCICIO A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas.

PROBLEMA 1

Se están preparando dosis con dos tipos de complementos para los astronautas de la nave *Enterprise*. Cada gramo del complemento A contiene 2 unidades de riboflavina, 3 de hierro y 2 de carbohidratos. Cada gramo del complemento B contiene 2 unidades de riboflavina, 1 de hierro y 4 de carbohidratos. ¿Cuántos gramos de cada complemento son necesarios para producir exactamente una dosis con 12 unidades de riboflavina, 16 de hierro y 14 de carbohidratos?

PROBLEMA 2

a) Halla los vértices de la región determinada por las siguientes inecuaciones:

$$3x + y \leq 12 \qquad x - 2y \geq -3 \qquad y \geq \frac{x}{2} - 2 \qquad 2x + 3y \geq 1$$

b) Calcula los puntos de la región donde la función $f(x, y) = 3x - 2y$ alcanza los valores máximo y mínimo y determina estos.

PROBLEMA 3

Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 6x + 12 & 2 \leq x \leq 4 \\ -2x + a & 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

a) Halla el valor de a para que la función $y = f(x)$ sea continua en el intervalo $[0, 8]$.

b) Halla los máximos y mínimos absolutos de $y = f(x)$ en el intervalo $[0, 4]$. Justifica que los puntos encontrados son máximos y mínimos absolutos.

c) Calcula el área de la región del plano limitada por las rectas de ecuación $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$ y la gráfica de $y = f(x)$.

PROBLEMA 4

Se sabe que $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}6$ y $P(A \cup B) = 0{,}7$.

a) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

b) Calcula $P(A \cap \overline{B})$, donde $\overline{B}$ representa el suceso complementario o contrario de B.

c) Calcula $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

EJERCICIO B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas.

PROBLEMA 1

Obtén todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = -1 \\ 2x - y + z = 0 \\ -2x + 7y + z = -4 \end{array}\right\}$$

PROBLEMA 2

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{2x - 3}$, se pide:

a) Su dominio y punto de corte con los ejes coordenados.

b) Ecuación de sus asíntotas verticales y horizontales.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Máximos y mínimos locales.

e) Representación gráfica a partir de la información de los apartados anteriores.

PROBLEMA 3

Dada la función $y = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$:

a) Calcula los máximos y mínimos locales. Justifica que los puntos encontrados son máximos y mínimos locales.

b) Halla el área de la región del plano determinada por la gráfica de $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = 5$.

PROBLEMA 4

De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace 2 dianas de cada 3 disparos, y el otro consigue 3 dianas de cada 4 disparos. Si los dos disparan simultáneamente, calcula:

a) La probabilidad de que los dos acierten.

b) La probabilidad de que uno acierte y el otro no.

c) La probabilidad de que ninguno acierte.

d) La probabilidad de que alguno acierte.

e) Sumar las probabilidades de a), b) y c), justificando la suma obtenida.

Resolución de la prueba (Septiembre de 2007)

EJERCICIO A

PROBLEMA 1

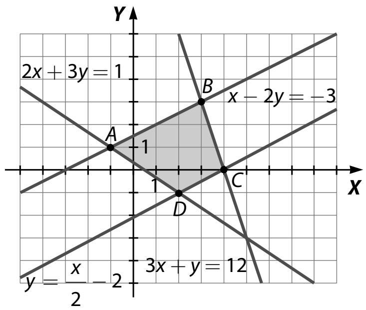
$$\left.\begin{array}{r} 2A + 2B = 12 \\ 3A + \quad B = 16 \\ 2A + 4B = 14 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 2B = 2 \\ 3A + B = 16 \end{array}\right\} \to B = 1 \quad \text{y} \quad A = \frac{16 - B}{3} = 5$$

Se necesitarán 5 gramos del complemento A y 1 gramo del componente B.

PROBLEMA 2

a) Dibujamos la región factible y calculamos sus vértices:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y \leq 12 \\ x - 2y \geq -3 \\ y \geq \dfrac{x}{2} - 2 \\ 2x + 3y \geq 1 \end{array}\right\}$$



b) $f(2, -1) = 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = 8$

$f(4, 0) = 3 \cdot 4 = 12$

$f(3, 3) = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 3$

$f(-1, 1) = 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -5$

Los vértices de la región factible son:

$A(-1, 1)$, $B(3, 3)$, $C(4, 0)$ y $D(2, -1)$.

El máximo es 12 y se obtiene en el punto B, y el mínimo es -5 y se obtiene en el punto D.

PROBLEMA 3

a) En $x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 6x + 12) = 4 \qquad \lim\limits_{x \to 2^-} (x + 2) = 4$ y $f(2) = 4 \to$ Es continua en $x = 2$.

En $x = 4$: $\lim\limits_{x \to 4^+} (-2x + a) = -8 + a \qquad \lim\limits_{x \to 4^-} (x^2 - 6x + 12) = 4 \to -8 + a = 4 \to a = 12$

Si $a = 12$, $f(x)$ es continua en $[0, 8]$.

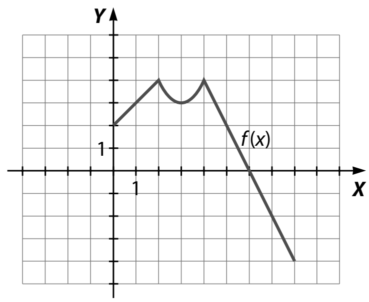
b) Calculamos la derivada de $f(x)$ en $[0, 4]$.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 2 \\ 2x - 6 & 2 < x < 4 \end{cases}$$

$2x - 6 = 0 \to x = 3$

$f''(3) = 2 > 0 \to$ En $x = 3$ hay un mínimo relativo.

Mínimo absoluto: $(0, 2)$. Máximos absolutos: $(2, 4)$ y $(4, 4)$



c) $\text{Área} = \displaystyle\int_0^2 (x + 2)\, dx + \int_2^3 (x^2 - 6x + 12)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 12x\right]_2^3 = \frac{28}{3}\,\text{u}^2$

PROBLEMA 4

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow 0{,}7 = 0{,}4 + 0{,}6 - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = 0{,}3$

$P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24 \neq P(A \cap B)$

No son independientes.

b) $P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}1$

c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1

$$\left.\begin{array}{rl} x + \ \ y + z = & -1 \\ 2x - \ \ y + z = & 0 \\ -2x + 7y + z = & -4 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - F_1}]{} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_3 = F_3 + 3F_2]{} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + y + z = -1 \\ \ \ x - 2y = 1 \end{array}\right.$$

Llamamos $y = y \rightarrow x = 1 + 2\lambda \rightarrow z = -1 - 1 - 2\lambda - \lambda = -2 - 3\lambda, \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA 2

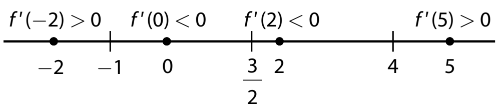
a) $2x - 3 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3}{2} \rightarrow \text{Dom} f = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

No hay corte con el eje X y el corte con el eje Y es: $\left(0, -\dfrac{4}{3}\right)$

b) $\lim\limits_{x \to \left(\frac{3}{2}\right)^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to \left(\frac{3}{2}\right)^-} f(x) = -\infty \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 4}{2x - 3} = \infty \rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales.

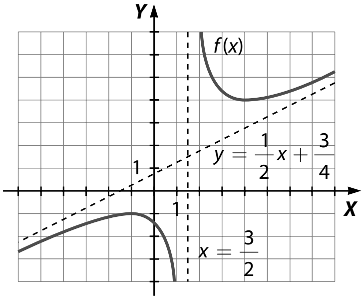
c) $f'(x) = \dfrac{2x(2x-3) - (x^2+4) \cdot 2}{(2x-3)^2} = \dfrac{2x^2 - 6x - 8}{(2x-3)^2} \qquad f'(x) = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 4 \end{array}\right.$



La función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ y es decreciente en $\left(-1, \dfrac{3}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}, 4\right)$.

d) Hay un máximo local en -1, $f(-1) = (-1, -1)$, y un mínimo local en 4, $f(4) = (4, 4)$.

e) Como esta función tiene asíntota oblicua, la calculamos para hacer correctamente la gráfica:



$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+4}{2x^2-3x} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+4}{2x-3} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+8-2x^2+3x}{4x-6}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x+8}{4x-6}\right) = \frac{3}{4}$$

Asíntota oblicua: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

PROBLEMA 3

a) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$ y $f''(x) = 6x - 18$

Puntos críticos: $3x^2 - 18x + 24 = 0 \to x^2 - 6x + 8 = 0 \to \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$

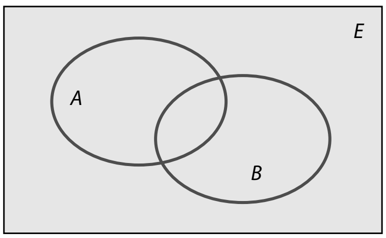
$f''(4) = 24 - 18 > 0 \qquad f''(2) = 12 - 18 < 0$

Hay un mínimo relativo en 4, $f(4) = (4, 19)$, y un máximo relativo en 2, $f(2) = (2, 23)$.

b) $\text{Área} = \int_0^5 (x^3 - 9x^2 + 24x + 3)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} + \frac{24x^2}{2} + 3x\right]_0^5 = \frac{385}{4} = 96{,}25\,\text{u}^2$

PROBLEMA 4

Sean los sucesos A = «Acierte el tirador A» y B = «Acierte el tirador B».



a) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

b) $P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$

c) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

d) $P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$

e) La suma de las probabilidades calculadas en los apartados a), b) y c) es 1, porque los tres sucesos forman un sistema completo de sucesos, es decir, son independientes dos a dos y la unión es el suceso seguro.

Se elegirá el ejercicio A o el ejercicio B, del que SOLO se harán TRES de los cuatro problemas. LOS TRES PROBLEMAS PUNTÚAN POR IGUAL.

Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica para realizar el examen. Se prohíbe su utilización indebida (para guardar fórmulas en memoria).

EJERCICIO A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas.

PROBLEMA 1

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $A \cdot A^t - 5A^{-1}$ siendo A^t y A^{-1} las matrices traspuesta e inversa de A, respectivamente.

PROBLEMA 2

Una fábrica de fertilizantes produce dos tipos de abono, A y B, a partir de dos materias primas M1 y M2. Para fabricar 1 tonelada de A hacen falta 500 kg de M1 y 750 kg de M2, mientras que las cantidades de MI y M2 utilizadas para fabricar 1 Tm de B son 800 kg y 400 kg, respectivamente. La empresa tiene contratado un suministro máximo de 10 Tm de cada materia prima y vende a 1.000 € y 1.500 € cada Tm de abono A y B, respectivamente. Sabiendo que la demanda de B nunca llega a triplicar la de A, ¿cuántas toneladas de cada abono debe fabricar para maximizar sus ingresos y cuáles son estos?

PROBLEMA 3

a) Estudia la continuidad de la función $y = f(x)$ en el intervalo $[-4, 2]$, siendo:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq -3 \\ x^2 & -3 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

b) Calcula el área limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, las rectas $x = -3$, $x = 2$ y el eje de abscisas.

PROBLEMA 4

Un test para detectar si una persona es portadora del virus de la gripe aviar da positivo en el 96 % de los pacientes que la padecen y da negativo en el 94 % de los pacientes que no la padecen. Si una de cada ciento cuarenta y cinco personas es portadora del virus y una persona se somete al test, calcula:

a) La probabilidad de que el test dé positivo.

b) La probabilidad de que sea portadora del virus, si el resultado del test es positivo.

c) La probabilidad de que el test sea negativo y no sea portadora del virus.

EJERCICIO B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas.

PROBLEMA 1

Los tres modelos existentes de una marca de automóviles cuestan 12.000, 15.000 y 22.000 €, respectivamente. Un concesionario ha ingresado 1.265.000 € por la venta de automóviles de esta marca. ¿Cuántos coches ha vendido de cada modelo si del más barato se vendieron tantos como de los otros dos juntos y del más caro la tercera parte de los coches que cuestan 15.000 €?

PROBLEMA 2

a) Representa gráficamente el conjunto de soluciones del sistema determinado por las siguientes inecuaciones:

$$3y - 4x - 8 \leq 0 \qquad y \geq -4x + 4 \qquad y \geq 2 \qquad x \leq 1$$

b) Halla los vértices de la región anterior.

c) Calcula el punto donde alcanza el mínimo la función $f(x, y) = 3x - y$ en dicha región. Determina dicho valor mínimo.

PROBLEMA 3

La función $y = f(x)$ tiene las siguientes propiedades:

- Su dominio es la recta real salvo los puntos -1 y 1. Es continua en todo su dominio y corta al eje X en el punto (2, 0).
- Tiene una asíntota horizontal en $y = 0$, con $f(x) < 0$ si $x > 2$ y $f(x) > 0$ si $x < 2, x \neq 1, x \neq -1$.
- Tiene una asíntota vertical en $x = 1$, con $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.
- Tiene una asíntota vertical en $x = -1$, con $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$.
- Tiene un mínimo en $(4, -2)$ y otro en (0, 3). No tiene máximos.

a) Representa gráficamente dicha función.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

PROBLEMA 4

La probabilidad de que haya un incidente en una fábrica que dispone de alarma es 0,1. La probabilidad de que suene esta si se ha producido algún incidente es 0,97 y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún incidente es 0,02.

a) Calcula la probabilidad de que no suene la alarma.

b) En el supuesto de que haya funcionado la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que no haya habido ningún incidente?

Resolución de la prueba (Junio de 2007)

EJERCICIO A

PROBLEMA 1

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0$

Calculamos la matriz de adjuntos: Adj $(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Con estas matrices podemos construir la matriz A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}\,(A)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

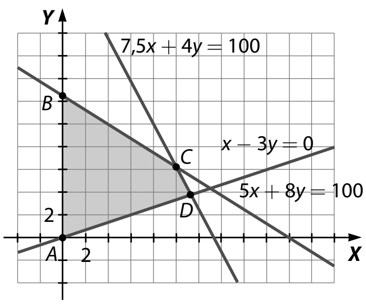
La operación matricial que se pide es:

$$A \cdot A^t - 5A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2

Definimos las variables: x = «Número de toneladas de abono de tipo A» e y = «Número de toneladas de abono de tipo B». Las restricciones y la región factible son:

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}5x + 0{,}8y \leq 10 \\ 0{,}75x + 0{,}4y \leq 10 \\ x \leq 3y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x + 8y \leq 100 \\ 7{,}5x + 4y \leq 100 \\ x - 3y \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$



Los vértices de la región factible son: $A(0, 0)$, $B(0; 12{,}5)$, $C(10; 6{,}25)$ y $D(11{,}32; 3{,}77)$.

Sustituimos los vértices en la función objetivo $f(x, y) = 1.000x + 1.500y$.

$$f(0, 0) = 0 \quad f(0; 12{,}5) = 18.750 \quad f(10; 6{,}25) = 19.750 \quad f(11{,}32; 3{,}77) = 16.975$$

Los ingresos máximos se obtienen fabricando 10 toneladas de abono del tipo A y 6,5 toneladas de abono del tipo B. Además, los ingresos máximos ascienden a 19.750 €.

PROBLEMA 3

a) Hay que estudiar la continuidad en los valores $x = -3$ y $x = 1$:

- En $x = -3$:

  Calculamos el límite cuando x tiende a -3 por la izquierda y por la derecha:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^-} 2 = 2 \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} x^2 = 9 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) \to f(x) \text{ no es continua en } x = -3.$$

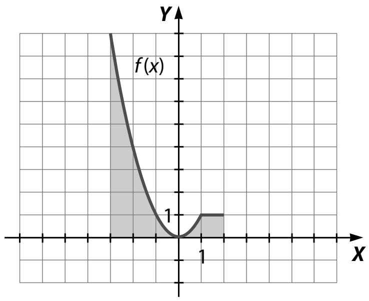
- En $x = 1$:

  Calculamos el límite cuando x tiende a 1 por la izquierda y por la derecha:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 1 = 1 \end{array}\right\} \to \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$$

  Como los límites laterales son iguales y, además, coinciden con $f(1) = 1$, la función es continua en $x = 1$.

b) Dibujamos la función $f(x)$ desde $x = -3$ y hasta $x = 2$:

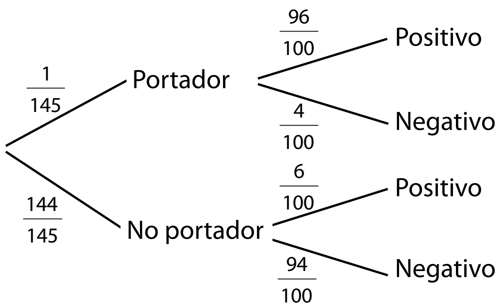


El área es:

$$\text{Área} = \int_{-3}^{1} x^2\,dx + \int_{1}^{2} 1\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{1} + [x]_1^2 = \left(\frac{1}{3} - \left(-\frac{27}{3}\right)\right) + (2 - 1) = \frac{28}{3} + 1 = \frac{31}{3}\ \text{u}^2$$

PROBLEMA 4

Primero planteamos el diagrama de árbol correspondiente:



a) $P(\text{positivo}) = P(\text{portador}) \cdot P(\text{positivo /portador}) + P(\text{no portador}) \cdot P(\text{positivo /no portador}) =$

$$= \frac{1}{145} \cdot \frac{96}{100} + \frac{144}{145} \cdot \frac{6}{100} = \frac{48}{725}$$

b) $P(\text{portador/positivo}) = \dfrac{\dfrac{1}{145} \cdot \dfrac{96}{100}}{\dfrac{48}{725}} = \dfrac{1}{10}$

c) $P(\text{negativo y no portador}) = \dfrac{677}{725} \cdot \dfrac{144}{145} = \dfrac{97.488}{105.125}$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1

Sean estos sucesos:

$x =$ «Número de coches del modelo que cuesta 12.000 €»
$y =$ «Número de coches del modelo que cuesta 15.000 €»
$z =$ «Número de coches del modelo que cuesta 22.000 €».

Planteamos el sistema y lo resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} 12.000x + 15.000y + 22.000z = 1.265.000 \\ x = y + z \\ z = \dfrac{y}{3} \end{array}\right\}$$

Despejamos x y z de la segunda y tercera ecuación, respectivamente, y sustituimos en la primera:

$$\left.\begin{array}{l} x = y + \dfrac{y}{3} = \dfrac{4y}{3} \\ z = \dfrac{y}{3} \end{array}\right\} \rightarrow 12 \cdot \frac{4y}{3} + 15y + 22 \cdot \frac{y}{3} = 1.265$$

$$\rightarrow 48y + 45y + 22y = 3.795$$

$$\rightarrow y = \frac{3.795}{115} = 33$$

Calculamos ahora el valor de x y z:

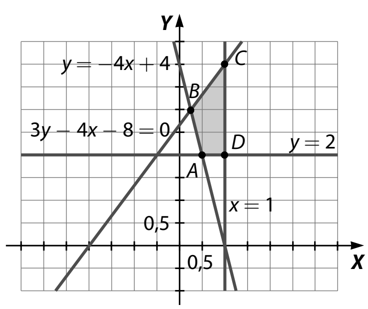
$$x = \frac{4y}{3} = \frac{4 \cdot 33}{3} = 44$$

$$z = \frac{33}{3} = 11$$

Luego hay 44 coches del modelo que cuesta 12.000 €, 33 coches del modelo que cuesta 15.000 € y 11 coches del modelo que cuesta 22.000 €.

PROBLEMA 2

a) Representamos el conjunto de soluciones:



b) Los vértices de la región anterior son:

$A(0,5; 2)$, $B(0,25; 3)$, $C(1, 4)$ y $D(1, 2)$

c) Sustituimos los vértices en la función objetivo $f(x, y) = 3x - y$.

$f(0{,}5; 2) = -0{,}5$

$f(0{,}25; 3) = -1{,}75$

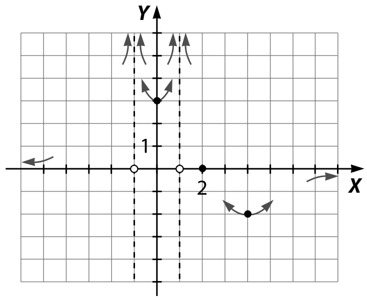
$f(1, 4) = -1$

$f(1, 2) = 1$

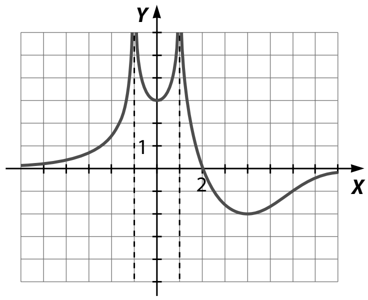
El valor mínimo es $-1{,}75$ y se alcanza en el punto $B(0{,}25; 3)$.

PROBLEMA 3

a) Dibujamos los datos del problema en unos ejes cartesianos:



Teniendo en cuenta que la función es continua en todo el dominio y, además, no tiene máximos, una posible solución es:



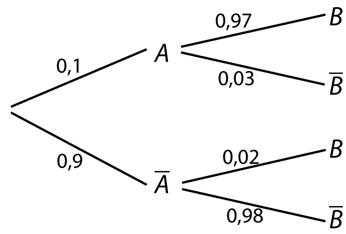
b) La función $f(x)$ es creciente en los intervalos $(-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (4, +\infty)$.

La función es decreciente en $(-1, 0) \cup (1, 4)$.

PROBLEMA 4

Definimos los siguientes sucesos: $A =$ «Hay un incidente en la fábrica» y $B =$ «Suena la alarma».

Construimos el siguiente diagrama de árbol:



a) $P(\text{no suene la alarma}) = P(A) \cdot P(\overline{B} / A) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B} / \overline{A}) = 0{,}1 \cdot 0{,}03 + 0{,}9 \cdot 0{,}98 = 0{,}885$

b) $P(\overline{A} / \overline{B}) = \dfrac{0{,}9 \cdot 0{,}02}{0{,}1 \cdot 0{,}97 + 0{,}9 \cdot 0{,}02} = 0{,}16$