EXTREMADURA

Índice

Junio de 2008 164
Septiembre de 2007 169
Junio de 2007 174

Enunciados de las pruebas y criterios extraídos de la página web de la Universidad de Extremadura:
http://www.unex.es

Criterios generales de corrección:

- Utilizar correctamente el lenguaje matricial y aplicar correctamente las operaciones con matrices.
- Transcribir problemas expresados en lenguaje habitual a lenguaje algebraico y utilizar técnicas algebraicas (matrices, sistemas de ecuaciones lineales y programación lineal bidimensional) para la resolución de dichos problemas.
- Analizar e interpretar las propiedades locales y globales de funciones que describen situaciones reales en el campo de las Ciencias Sociales.
- Resolver problemas de optimización asociados a situaciones reales en el campo de las Ciencias Sociales utilizando el cálculo de derivadas.
- Calcular e interpretar probabilidades de sucesos aleatorios utilizando técnicas generales.
- Utilizar técnicas de muestreo estadístico para la selección de muestras representativas.
- Inferir conclusiones en poblaciones a partir de la información suministrada por muestras convenientemente seleccionadas.
- Con carácter general se valorará:
  – La exposición del razonamiento utilizado.
  – La justificación de las respuestas.
  – La interpretación de los conceptos y resultados básicos.

Enunciado de la prueba (Junio de 2008)

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.

Calificación máxima de la prueba: 10 puntos.

Problema 1: de 0 a 3,5 puntos; **problema 2:** de 0 a 3 puntos; **problema 3:** de 0 a 3,5 puntos.

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Una hamburguesería necesita diariamente un mínimo de 180 kilogramos de carne de cerdo y 120 kilogramos de carne de ternera. Hay dos mataderos *A* y *B* que pueden suministrarle la carne requerida pero ha de ser en lotes. El lote del matadero *A* contiene 6 kilogramos de carne de cerdo y 2 kilogramos de carne de ternera siendo su coste 25 € y el lote del matadero *B* contiene 4 kilogramos de carne de cerdo y 3 kilogramos de carne de ternera siendo su coste 35 €. Determinar, justificando la respuesta:

a) El número de lotes que debe de adquirir la hamburguesería en cada matadero con objeto de garantizar sus necesidades diarias con el mínimo coste.

b) El valor de dicho coste diario mínimo.

PROBLEMA 2

El número de visitantes que acuden a una exposición fotográfica durante las dos semanas de duración de la misma, ha variado según la función:

$$N(t) = -t^3 + 24t^2 - 117t + 570 \qquad 1 \leq t \leq 14$$

donde t representa el día. Se pide, justificando la respuesta:

a) ¿Cuántos visitantes hubo el día de la inauguración? ¿Y el día de la clausura?

b) ¿Qué día tuvo lugar la asistencia máxima de visitantes? ¿Qué día tuvo lugar la asistencia mínima de visitantes?

c) ¿Cuáles fueron los valores máximo y mínimo de visitantes?

PROBLEMA 3

En una población se ha determinado que de cada 100 aficionados al fútbol, 25 son abonados del equipo *A*, 45 son abonados del equipo *B* y el resto son abonados del equipo *C*. Sabiendo que el 30 % de los abonados de *A*, el 40 % de los abonados de *B*, y el 50˙% de los abonados de *C*, tienen menos de 30 años, determinar la probabilidad de que seleccionando al azar a un aficionado al fútbol en esa población sea menor de 30 años. Justificar la respuesta.

OPCIÓN B

PROBLEMA 1

Considérese el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} ax + y + 3z &= 0 \\ x + ay + 2z &= 1 \\ x + ay + 3z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

a) Discutir sus posibles soluciones según los valores del parámetro a.

b) Resolver el sistema para $a = 0$.

Justificar la respuesta.

PROBLEMA 2

Un canal privado de televisión ha comprobado que durante los 75 minutos que duró la retransmisión de un partido de tenis, el índice de audiencia fue variando según la función:

$$I(t) = At^2 + Bt + C \qquad 0 \le t \le 75$$

Sabiendo que al inicio de la retransmisión el índice de audiencia era de 6 puntos y que a los 30 minutos se alcanzó el índice de audiencia mínimo con 3 puntos:

a) Determinar las constantes A, B y C. Justificar la respuesta.

b) Representar la función.

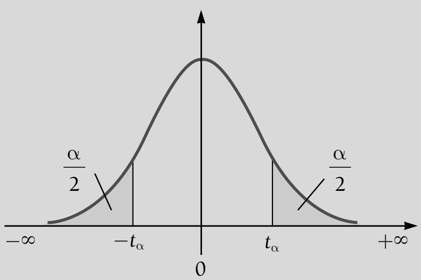
PROBLEMA 3

En un periódico de difusión nacional se han publicado en el año 2007 un total de 2.500 ofertas de trabajo para licenciados. En una muestra de un 10 % de ellas se han contabilizado 50 ofertas de trabajo para licenciados en Matemáticas. Determinar, justificando la respuesta:

a) La estimación puntual que podríamos dar para el porcentaje de ofertas de trabajo para licenciados en Matemáticas publicadas en dicho periódico en 2007.

b) El error máximo que cometeríamos con dicha estimación con un nivel de confianza del 95 %.

α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405
0,2	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126
0,3	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915
0,4	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739



Resolución de la prueba (Junio de 2008)

OPCIÓN A

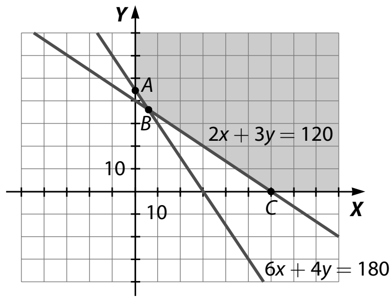
PROBLEMA 1

a) Sean x e y el número de lotes que deben adquirirse en los mataderos A y B, respectivamente.

La función que hay que minimizar es: $f(x, y) = 25x + 35y$

Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} 6x + 4y \geq 180 \\ 2x + 3y \geq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$



Los vértices de la región factible son:

$A(0, 45)$, $B(6, 36)$ y $C(60, 0)$

Al sustituir las coordenadas de estos puntos en la función objetivo resulta:

$f(0, 45) = 1.575 \quad f(6, 36) = 1.410 \quad f(60, 0) = 1.500$

Luego deben adquirirse 6 lotes del matadero A y 36 lotes del matadero B.

b) El coste mínimo asciende a 1.410 €.

PROBLEMA 2

a) En el día de la inauguración: $N(1) = -1 + 24 - 117 + 570 = 476$

Y en el día de la clausura: $N(14) = -2.744 + 4.704 - 1.638 + 570 = 892$

b) $N'(t) = -3t^2 + 48t - 117 \quad N''(t) = -6t + 48$

$$-3t^2 + 48t - 117 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 13 \end{cases}$$

$N''(3) = 30 > 0 \rightarrow$ En $t = 3$ hay un mínimo.

$N''(13) = -30 < 0 \rightarrow$ En $t = 13$ hay un máximo.

La asistencia mínima se produjo en el tercer día y la máxima en el decimotercero.

c) El mayor número de visitantes fue: $N(13) = -2.197 + 4.056 - 1.521 + 570 = 908$ personas

Y el menor número de visitantes fue: $N(3) = -27 + 216 - 351 + 570 = 408$ personas

PROBLEMA 3

Sea el suceso $M =$ «Tener menos de 30 años».

$P(M / A) = 0,3 \quad P(M / B) = 0,4 \quad P(M / C) = 0,5 \quad P(A) = 0,25 \quad P(B) = 0,45 \quad P(C) = 0,3$

Por el teorema de la probabilidad total resulta:

$$P(M) = P(A) \cdot P(M / A) + P(B) \cdot P(M / B) + P(C) \cdot P(M / C) = 0,25 \cdot 0,3 + 0,45 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,5 = 0,405$$

OPCIÓN B

PROBLEMA 1

a) Sean $M = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes y $M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 3 & 0 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & a & 3 & -1 \end{array}\right)$ la matriz ampliada del sistema.

$$|M| = a^2 - 1$$

- Si $a \neq \pm 1 \rightarrow$ Rango (M) = Rango (M^*) = 3 = n.º de incógnitas $\rightarrow$ El sistema es compatible determinado.
- Si $a = 1 \rightarrow |M| = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (M) = 2 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (M^*) = 3$$

Rango (M) $\neq$ Rango (M^*) $\rightarrow$ El sistema es incompatible.

- Si $a = -1 \rightarrow |M| = 0$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (M) = 2 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \rightarrow \text{Rango } (M^*) = 3$$

Rango (M) $\neq$ Rango (M^*) $\rightarrow$ El sistema es incompatible.

b) Si $a = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} y + 3z = 0 \\ x + 2z = 1 \\ x + 3z = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} y + 3z = 0 \\ x + 2z = 1 \\ z = -1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 6 \\ z = -2 \end{array}\right.$$

PROBLEMA 2

a) Si al inicio de la retransmisión el índice de audiencia era de 6 puntos: $I(0) = 6 \rightarrow C = 6$

Si a los 30 minutos se alcanzó el índice de audiencia mínimo: $I'(30) = 0$

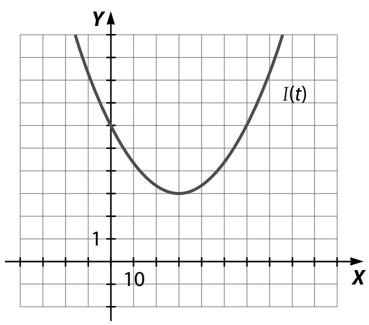
$$I'(t) = 2At + B \rightarrow 60A + B = 0 \rightarrow B = -60A$$

Sabiendo que a los 30 minutos el índice de audiencia era de 3 puntos: $I(30) = 3$

$$900A - 60A \cdot 30 + 6 = 3 \rightarrow -900A = -3 \rightarrow A = \frac{1}{300} \rightarrow B = -\frac{1}{5}$$

La expresión de la función es: $I(t) = \dfrac{1}{300}t^2 - \dfrac{1}{5}t + 6$

b) Y la representación de la función es:



PROBLEMA 3

a) Si la muestra está formada por un 10 % del total quiere decir que la componen 250 ofertas. Por tanto, el estimador puntual para el porcentaje de ofertas de trabajo para licenciados en Matemáticas es:

$$\hat{p} = \frac{50}{250} = 0,2$$

b) Si $1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$

El valor correspondiente a 0,975 de probabilidad es:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

Así, el error máximo que se comete es:

$$E = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{250}} = 0,05$$

Criterios específicos de corrección:

OPCIÓN A	**OPCIÓN B**
PROBLEMA 1: Hasta 3,5 puntos.	**PROBLEMA 1:** Hasta 3,5 puntos.
PROBLEMA 2: Hasta 3 puntos.	**PROBLEMA 2:** Hasta 3 puntos.
PROBLEMA 3: Hasta 3,5 puntos.	**PROBLEMA 3:** Hasta 3,5 puntos.

Enunciado de la prueba (Septiembre de 2007)

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.

Calificación máxima de la prueba: 10 puntos.

Problema 1: de 0 a 3,5 puntos; **problema 2**: de 0 a 3 puntos; **problema 3**: de 0 a 3,5 puntos.

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Una tienda de artículos de piel necesita para su próxima campaña un mínimo de 80 bolsos, 120 pares de zapatos y 90 cazadoras. Se abastece de los artículos en dos talleres: A y B. El taller A produce diariamente 4 bolsos, 12 pares de zapatos y 2 cazadoras con un coste diario de 360 €. La producción diaria del taller B es de 2 bolsos, 2 pares de zapatos y 6 cazadoras siendo su coste de 400 € cada día. Determinar, justificando la respuesta:

a) El número de días que debe trabajar cada taller para abastecer a la tienda con el mínimo coste.

b) El valor de dicho coste mínimo.

PROBLEMA 2

El índice de popularidad de cierto gobernante era de 2,5 puntos cuando inició su mandato. A los 50 días alcanzó el máximo índice de popularidad con 7,2 puntos. Sabiendo que durante los primeros 100 días de su mandato dicho índice fue cambiando de acuerdo con la expresión:

$$I(t) = At^2 + Bt + C \qquad 0 \leq t \leq 100$$

Se pide:

a) Determinar las constantes A, B y C. Justificar la respuesta.

b) Representar la función obtenida.

PROBLEMA 3

Una empresa se dedica a la fabricación de calefactores. Cada calefactor, antes de ser enviado al mercado para su venta, ha de superar tres controles de calidad: Cl, C2 y C3 en ese orden. Si no supera alguno de ellos es rechazado. Por la experiencia acumulada, se sabe que un 95% de los calefactores superan Cl, que en C2 se rechaza un calefactor con probabilidad 0,02 y que 90 de cada 100 calefactores superan C3. Determinar, justificando la respuesta, la probabilidad de que un calefactor elegido al azar en la producción de esa empresa sea rechazado.

OPCIÓN B

PROBLEMA 1

Discutir según los valores de m el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} mx - y - z &= 3 \\ x + 2y + z &= 1 \\ x - 3y - z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Justificar la respuesta.

PROBLEMA 2

Se ha determinado que el coste total (en euros) que le supone a cierta empresa la producción de n unidades de determinado artículo varía según la función:

$$C(n) = 2n^3 + 270n - 2.048$$

Determinar, justificando la respuesta:

a) La función que define el coste por unidad producida.

b) El número de unidades que deben producirse para hacer mínimo el coste por unidad.

c) El valor de dicho coste mínimo por unidad.

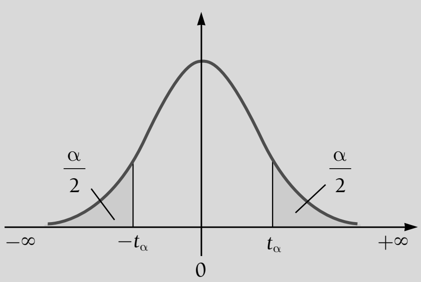
PROBLEMA 3

En una población de 2.000 conductores se seleccionó una muestra aleatoria de 200. A los conductores seleccionados se les preguntó si llevaban en sus vehículos cadenas para utilizar en caso de que hubiese nieve en las carreteras. A partir de la información recogida se obtuvo el siguiente intervalo de confianza al 95 % para la proporción de conductores de esa población que llevaban en sus vehículos cadenas para la nieve: (0,172; 0,228). Determinar, justificando la respuesta:

a) La estimación puntual que daríamos para la proporción de conductores de esa población que llevan en su vehículo cadenas para la nieve.

b) El error máximo que estaríamos cometiendo, con una confianza del 95 %, con dicha estimación puntual.

α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405
0,2	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126
0,3	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915
0,4	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739
0,5	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583
0,6	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440
0,7	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305
0,8	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176
0,9	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050



OPCIÓN A

PROBLEMA 1

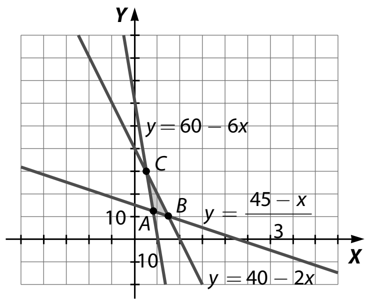
a) Es un problema de programación lineal. Nos ayudamos con la siguiente tabla:

	Taller *A*	Taller *B*	Mínimo
Bolsos	4	2	80
Zapatos	12	2	120
Cazadoras	2	6	90
Coste	360	400	

Sean x = «Número de días que trabaja el taller *A*» e y = «Número de días que trabaja el taller *B*».

Tenemos que resolver el siguiente sistema, y su solución es la región factible.

$$\left.\begin{array}{r} 4x+2y\ge 80\\ 12x+2y\ge 120\\ 2x+6y\ge 90\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r} 2x+y\ge 40\\ 6x+y\ge 60\\ x+3y\ge 45\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l} y=40-2x\\ y=60-6x\\ y=\dfrac{45-x}{3}\end{array}\right\}$$



Los vértices de la región factible son: $A(7{,}94;\ 12{,}35)$, $B(15,\ 10)$ y $C(5,\ 30)$.

Evaluando estos vértices en la función coste se tiene:

$$f(7{,}94;\ 12{,}35)=7.800 \quad f(15, 10)=9.400 \quad f(5, 30)=13.800$$

El taller *A* debe trabajar 8 días, y el taller *B* debe trabajar 13 días, puesto que el mínimo número de días debe ser un número natural.

b) El coste mínimo es: $f(8,\ 13)=360\cdot 8+13\cdot 400=2.880+5.260=8.080$ €

PROBLEMA 2

a) Si $t=0\rightarrow I(0)=C=2{,}5$; si $t=50\rightarrow I(50)=A\cdot 50^2+B\cdot 50+C=7{,}2$

El máximo índice de popularidad lo alcanza a los 50 días.

Como $I'(t)=2At+B\rightarrow I'(50)=2A\cdot 50+B=0$

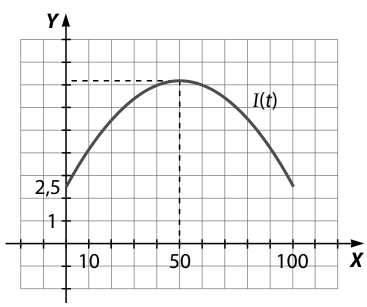
Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} C=2{,}5\\ 2.500A+50B+C=7{,}2\\ 100A+B=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{r} 2.500A+50B=4{,}7\\ 100A+B=0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l} 2.500A+50B=4{,}7\\ 5.000A+50B=0\end{array}\right\}\rightarrow 2.500A=-4{,}7$$

$$\rightarrow A=-0{,}00188;\ B=0{,}188 \text{ y } C=2{,}5$$

b) La representación gráfica de la función es:

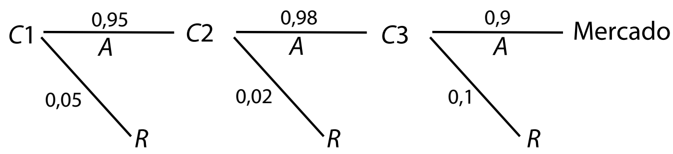
$$I(t)=-0{,}00188t^2+0{,}188t+2{,}5$$



PROBLEMA 3

Sean los sucesos $A =$ «Calefactor admitido» y $R =$ «Calefactor rechazado».

Construimos un diagrama de árbol:



$$P(R) = P[R \text{ en } C1 \cup (A \text{ en } C1 \cap R \text{ en } C2) \cup (A \text{ en } C1 \cap A \text{ en } C2 \cap R \text{ en } C3)] =$$
$$= 0{,}05 + 0{,}95 \cdot 0{,}02 + 0{,}95 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}1 = 0{,}1621$$

OPCIÓN B

PROBLEMA 1

$$M = \begin{pmatrix} m & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} m & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$|M| = -2m - 1 + 3 - (-2 + 1 - 3m) = m + 3 = 0 \to m = -3$$

- Si $m \neq -3 \to$ Rango $(M) =$ Rango $(M^*) = 3$
  El sistema es compatible determinado.
- Si $m = -3 \to$ Rango $(M) = 2$ y Rango $(M^*) = 3$ (tiene un menor de orden 3 no nulo)
  El sistema es incompatible.

PROBLEMA 2

a) Llamamos $F(n) = \dfrac{C(n)}{n}$ a la función que define el coste por unidad producida.
La función es:

$$F(n) = 2n^2 + 270 + \frac{2.048}{n}$$

b) Calculamos el valor de n para el que $F(n)$ es mínimo:

$$F'(n) = 4n - \frac{2.048}{n^2} = 0 \to 4n^3 = 2.048 \to n^3 = 512 \to n = 8$$

Deben producirse 8 unidades para hacer mínimo el coste por unidad.

c) El valor de dicho coste mínimo para 8 unidades es:

$$F(8) = 2 \cdot 8^2 + 270 + \frac{2.048}{8} = 654 \text{ €}$$

PROBLEMA 3

a) El intervalo de confianza al 95 % para la proporción es:

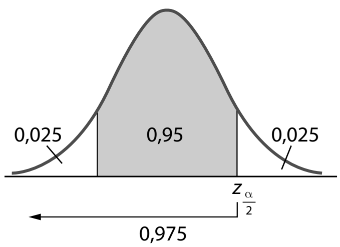
$$(0{,}172; 0{,}228) = (0{,}2 - 0{,}028; 0{,}2 + 0{,}028)$$

La estimación puntual que daríamos para la proporción de conductores es de $\hat{p} = 0{,}2$.

b) El error máximo viene dado por $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

$$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \text{ y } z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$$

$$E = 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{200}} = 1{,}96 \cdot 0{,}028 = 0{,}054$$



El error máximo que estaríamos cometiendo con dicha estimación puntual es de 0,054.

Criterios específicos de corrección:

OPCIÓN A	**OPCIÓN B**
PROBLEMA 1: Hasta 3,5 puntos.	**PROBLEMA 1:** Hasta 3,5 puntos.
PROBLEMA 2: Hasta 3 puntos.	**PROBLEMA 2:** Hasta 3 puntos.
PROBLEMA 3: Hasta 3,5 puntos.	**PROBLEMA 3:** Hasta 3,5 puntos.

Enunciado de la prueba (Junio de 2007)

Elegir una opción entre las dos que se proponen a continuación.

Calificación máxima de la prueba: 10 puntos.

Problema 1: de 0 a 3,5 puntos; **problema 2:** de 0 a 3 puntos; **problema 3:** de 0 a 3,5 puntos.

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Una empresa fabricante de automóviles produce dos modelos A y B en dos fábricas en Cáceres y en Badajoz. La fábrica de Cáceres produce diariamente 6 modelos del tipo A y 4 del tipo B con un coste de 32.000 € diarios y la fábrica de Badajoz produce diariamente 4 modelos del tipo A y 4 del tipo B con un coste de 24.000 € diarios. Sabiendo que la fábrica de Cáceres no puede funcionar más de 50 días y que para abastecer el mercado del automóvil se han de poner a la venta al menos 360 modelos del tipo A y 300 modelos del tipo B determinar, justificando la respuesta:

a) El número de días que debe de funcionar cada fábrica con objeto de que el coste total sea mínimo.

b) El valor de dicho coste mínimo.

PROBLEMA 2

En los estudios de mercado previos a su implantación en una zona, una franquicia de tiendas de moda ha estimado que sus beneficios semanales (en miles de euros) dependen del número de tiendas que tiene en funcionamiento de acuerdo con la expresión:

$$B(n) = -8n^3 + 60n^2 - 96n$$

siendo n el número de tiendas en funcionamiento. Determinar, justificando la respuesta:

a) El número de tiendas que debe de tener en funcionamiento dicha franquicia para maximizar sus beneficios semanales.

b) El valor de dichos beneficios máximos semanales.

c) La expresión que nos indica los beneficios semanales por cada tienda que dicha franquicia tiene en funcionamiento.

PROBLEMA 3

Se sabe que 3.000 de los 20.000 estudiantes matriculados en cierta universidad hacen uso del comedor universitario y acuden a sus clases en transporte público. A partir de la información proporcionada por una amplia muestra de estudiantes universitarios, se ha estimado que uno de cada cuatro universitarios que utilizan el transporte público para acudir a sus clases hacen también uso del comedor universitario. Determinar, justificando la respuesta, la probabilidad de que seleccionado al azar un estudiante en esta universidad resulte ser de los que utilizan el transporte público para acudir a sus clases.

OPCIÓN B

PROBLEMA 1

Determinar la matriz X que verifica la ecuación $A^2X - B = A \cdot X$ donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Justificar la respuesta.

PROBLEMA 2

Una feria ganadera permanece abierta al público desde las 10 hasta las 20 horas.
Se ha comprobado que el número de visitantes dianos queda determinado, como función de la hora del día, a través de la expresión:

$$N(t) = -20(A - t)^2 + B \qquad 10 \leq t \leq 20$$

Sabiendo que a las 17 horas se alcanza el número máximo de 1.500 visitantes, se pide:

a) Determinar las constantes A y B. Justificar la respuesta.

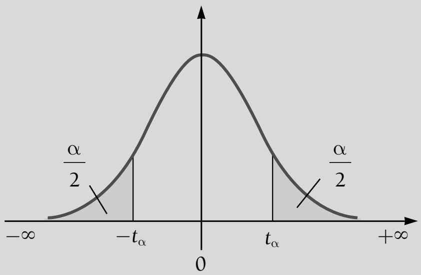
b) Representar la función obtenida.

PROBLEMA 3

A una muestra aleatoria de 300 estudiantes de Bachillerato de una determinada provincia se les preguntó si utilizaban habitualmente la bicicleta para acudir a su instituto.
Sabiendo que se obtuvo 90 respuestas afirmativas, determinar justificando la respuesta:

a) El intervalo de confianza al 95 % para el porcentaje de estudiantes de Bachillerato de esa provincia que utilizan habitualmente la bicicleta para acudir a su instituto.

b) El error máximo que cometeríamos, con una confianza del 95 %, si estimamos que dicho porcentaje es del 30 %.



α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405
0,2	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126
0,3	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915
0,4	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739
0,5	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583
0,6	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440
0,7	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305
0,8	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176
0,9	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050

OPCIÓN A

PROBLEMA 1

Sean $x =$ «Número de días que tiene que funcionar la fábrica de Cáceres» e $y =$ «Número de días que tiene que funcionar la fábrica de Badajoz».

a) Las restricciones y la región crítica son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} 6x + 4y \geq 360 \\ 4x + 4y \geq 300 \\ x \leq 50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

Calculamos los vértices de la región factible:

$$\text{Vértice } A\text{: } \left.\begin{array}{l} 4x + 4y = 300 \\ x = 50 \end{array}\right\} \rightarrow A(50, 25)$$

$$\text{Vértice } B\text{: } \left.\begin{array}{l} 6x + 4y = 360 \\ 4x + 4y = 300 \end{array}\right\} \rightarrow B(30, 45)$$

$$\text{Vértice } C\text{: } \left.\begin{array}{l} 6x + 4y = 360 \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow C(0, 90)$$

Sustituimos los vértices en la función objetivo: $C(x, y) = 32.000x + 24.000y$

$C(50, 25) = 2.200.000$

$C(30, 45) = 2.040.000$

$C(0, 90) = 2.160.000$

El coste mínimo se obtiene funcionando 30 días la fábrica de Cáceres y 45 días la fábrica de Badajoz.

b) El coste mínimo asciende a 2.040.000 €.

PROBLEMA 2

a) Para maximizar los beneficios, derivamos la función $B(x)$ y la igualamos a cero:

$B'(n) = -24n^2 + 120n - 96$

$$B'(n) = 0 \rightarrow -24n^2 + 120n - 96 = 0 \rightarrow n^2 - 5n + 4 = 0 \rightarrow n = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ n = 4 \end{cases}$$

Para conocer cuál es el máximo, sustituimos cada valor en la segunda derivada:

$$B''(n) = -48n + 120 \rightarrow \begin{cases} B''(1) = -48 \cdot 1 + 120 = 72 > 0 \rightarrow \text{En } n = 1 \text{ hay un mínimo.} \\ B''(4) = -48 \cdot 4 + 120 = -72 < 0 \rightarrow \text{En } n = 4 \text{ hay un máximo.} \end{cases}$$

Luego se deben tener 4 tiendas para obtener el beneficio máximo.

b) Hay que hallar el valor de $B(4)$:

$B(4) = -8 \cdot 4^3 + 60 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4 = 64$

Con 4 tiendas funcionando se obtiene un beneficio de 64.000 €.

c) La expresión que nos indica los beneficios medios semanales es:

$$\frac{B(n)}{n} = \frac{-8n^3 + 60n^2 - 96n}{n} = -8n^2 + 60n - 96$$

PROBLEMA 3

Definimos los siguientes sucesos:

$C =$ «Hacer uso del comedor universitario»

$T =$ «Acudir a las clases en transporte público»

Del problema podemos extraer las siguientes probabilidades:

$$P(C \cap T) = \frac{3.000}{20.000} = \frac{3}{20} \text{ y } P(C / T) = \frac{1}{4}$$

La probabilidad pedida es:

$$P(C / T) = \frac{P(C \cap T)}{P(T)} \rightarrow P(T) = \frac{P(C \cap T)}{P(C / T)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

OPCIÓN B

PROBLEMA 1

Primeros despejamos la matriz X de la ecuación:

$$A^2 \cdot X - B = A \cdot X \rightarrow A^2 \cdot X - A \cdot X = B \rightarrow (A^2 - A) \cdot X = B \rightarrow X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B$$

Determinamos A^2 y, después, llamamos C a la matriz $(A^2 - A)$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = (A^2 - A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos $\left|C\right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$ para luego hallar C^{-1}.

$$C^{-1} = \frac{\text{Adj } (A)^t}{\left|A\right|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Así, la matriz X es:

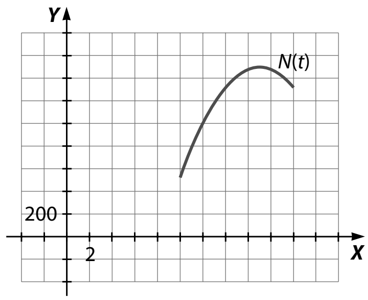
$$X = (A^2 - A)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2

a) Como sabemos que se alcanza el máximo a las 17 horas y que el número máximo de visitantes es 1.500, se tiene que $N'(17) = 0$ y $N(17) = 1.500$.

$$N'(17) = 0 \rightarrow 40 \cdot (A - 17) = 0 \rightarrow A = 17$$
$$N(17) = 1.500 \rightarrow -20 \cdot (17 - 17)^2 + B = 1.500 \rightarrow B = 1.500$$

b) La función es una parábola con vértice en (17, 1.500).



PROBLEMA 3

a) Los intervalos de confianza para la proporción tienen la forma:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}, \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}\right)$$

Tenemos que $\hat{p} = \frac{90}{300} = \frac{3}{10}$ y $\hat{q} = 1 - \hat{p} = \frac{7}{10}$ y para un nivel de confianza del 95 % el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es igual a 1,96. Luego el intervalo pedido es:

$$\left(0,3 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{300}}; 0,3 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{300}}\right) = (0,25;\ 0,35)$$

b) La fórmula del error cometido es $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}$, que en este caso es:

$$E = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,3 \cdot 0,7}{300}} = 0,052$$

Criterios específicos de corrección:

OPCIÓN A	**OPCIÓN B**
PROBLEMA 1: Hasta 3,5 puntos.	**PROBLEMA 1:** Hasta 3,5 puntos.
PROBLEMA 2: Hasta 3 puntos.	**PROBLEMA 2:** Hasta 3 puntos.
PROBLEMA 3: Hasta 3,5 puntos.	**PROBLEMA 3:** Hasta 3,5 puntos.