GALICIA

Índice

Enunciados de las pruebas y criterios extraídos de la página web de la Comisión Interuniversitaria de Galicia:
http://ciug.cesga.es/menuinicio.html

El alumno debe resolver solamente un ejercicio de cada uno de los tres bloques temáticos.

BLOQUE DE ÁLGEBRA

Puntuación máxima 3 puntos

EJERCICIO 1

Un autobús transporta en cierto viaje 60 viajeros de tres tipos: viajeros que pagan el billete entero que vale 1 €; estudiantes que tienen un 25 % de descuento y jubilados con un descuento del 50 % del precio del billete. La recaudación del autobús en este viaje fue de 48 €. Calcular el número de viajeros de cada clase sabiendo que el número de estudiantes era el doble que el número del resto de viajeros.

EJERCICIO 2

Un proyecto de jardinería puede llevarse a cabo por dos grupos diferentes de una misma empresa: G_1 y G_2. Se trata de ajardinar tres zonas: A, B y C. En la siguiente tabla se recoge el número de unidades que puede ajardinar cada grupo en cada zona durate una semana:

	Zona *A*	**Zona *B***	**Zona *C***
Grupo G_1	4	10	7
Grupo G_2	10	5	7

Se necesita ajardinar un mínimo de 40 unidades en la zona A, 50 unidades en la zona B y 49 unidades en la zona C, estimándose el coste semanal en 3.300 € para el grupo G_1 y en 4.000 € para el grupo G_2.

¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste? Expresar la función objetivo y las restricciones del problema. Representar gráficamente la región factible y calcular sus vértices.

BLOQUE DE ANÁLISIS

Puntuación máxima 3,5 puntos

EJERCICIO 1

Supongamos que el valor V, en euros, de un producto disminuye o se deprecia con el tiempo t, en meses, donde:

$$V(t) = 50 - \frac{25t^2}{(t+2)^2} \quad t \geq 0$$

a) Calcular el valor inicial del producto, $V(0)$. ¿A partir de qué mes el valor del producto es inferior a 34 €?

b) Determinar la velocidad de depreciación del producto, es decir, $V'(t)$.

c) Hallar $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t)$. ¿Hay algún valor por debajo del cual nunca caerá V? Justificar la respuesta.

EJERCICIO 2

El número de plazas ocupadas de un aparcamiento a lo largo de las 24 horas de un día, viene expresado por la función:

$$N(t) = \begin{cases} 1.680 + 20t & \text{si } 0 \leq t < 8 \\ -10t^2 + 260t + 400 & \text{si } 8 \leq t < 16 \\ -10t^2 + 360t - 1.200 & \text{si } 16 \leq t \leq 24 \end{cases}$$

a) ¿A qué hora del día presenta el aparcamiento una ocupación máxima? ¿Cuántos coches hay a esa hora?

b) ¿Entre qué horas la ocupación del aparcamiento es igual o superior a 2.000 plazas?

BLOQUE DE ESTADÍSTICA

Puntuación máxima 3,5 puntos

EJERCICIO 1

En un mercado de valores cotizan un total de 60 empresas, de las que 15 son del sector bancario, 35 son industriales y 10 son del sector tecnológico. La probabilidad de que un banco de los que cotizan en el mercado se declare en quiebra es 0,01; la probabilidad de que se declare en quiebra una empresa industrial es 0,02 y de que lo haga una empresa tecnológica es 0,1.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzca una quiebra en una empresa del citado mercado de valores?

b) Habiéndose producido una quiebra, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una empresa tecnológica?

EJERCICIO 2

En una determinada población se sabe que el valor de la tasa diaria de consumo de calorías sigue una distribución normal con desviación típica $\sigma = 400$ calorías.

a) Si la media poblacional es $\mu = 1.600$ calorías y se elige al azar una muestra aleatoria de 100 personas de esa población, determinar la probabilidad de que el consumo medio diario de calorías en esa muestra esté comprendido entre 1.550 y 1.660 calorías.

b) Si desconocemos la media μ y con el mismo tamaño de muestra se afirma que «el consumo medio diario en esa población toma valores entre 1.530 y 1.670 calorías», ¿con qué nivel de confianza se realiza esta afirmación?

BLOQUE DE ÁLGEBRA

EJERCICIO 1

Sean x, y y z el número de viajeros que pagan el billete entero, de estudiantes y de jubilados, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ x+0{,}75y+0{,}5z=48 \\ y=2(x+z) \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ 4x+3y+2z=192 \\ 2x-y+2z=0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ -y-2y=-48 \\ -3y=-120 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=16 \\ y=40 \\ z=4 \end{array}\right.$$

Por tanto, viajaron 16 personas que pagaron el billete entero, 40 estudiantes y 4 jubilados.

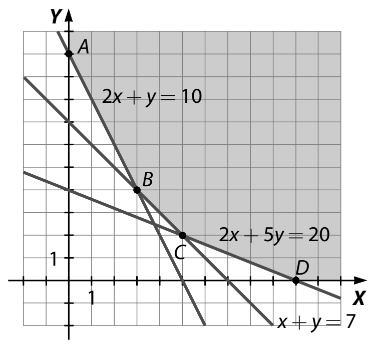
EJERCICIO 2

Sean x e y el número de semanas que deberá trabajar cada grupo.

La función que hay que minimizar es: $f(x, y) = 3.300x + 4.000y$

Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} 4x+10y \geq 40 \\ 10x+5y \geq 50 \\ 7x+7y \geq 49 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$



Los vértices de la región factible son:

$A(0, 10)$, $B(3, 4)$, $C(5, 2)$ y $D(10, 0)$.

Al sustituir las coordenadas de los puntos en la función objetivo se tiene:

$f(0, 10) = 40.000 \quad f(3, 4) = 25.900 \quad f(5, 2) = 24.500 \quad f(10, 0) = 33.000$

Luego para finalizar el proyecto con el mínimo coste, el grupo G_1 deberá trabajar durante 5 semanas y el grupo G_2 durante 2 semanas.

BLOQUE DE ANÁLISIS

EJERCICIO 1

a) $V(0) = 50$ €

$$50 - \frac{25t^2}{(t+2)^2} = 34 \to \frac{25t^2}{(t+2)^2} = 16 \to 25t^2 = 16t^2 + 64t + 64 \to 9t^2 - 64t - 64 = 0 \to \left\{\begin{array}{l} t = 16 \\ t = -\dfrac{8}{9} \end{array}\right.$$

Como $t \geq 0$, la solución válida es: $t = 16$ meses

Por tanto, el valor del producto es inferior a 34 € a partir del mes 16.

b) $$V'(t) = -\frac{50t(t+2)^2 - 25t^2 \cdot 2(t+2)}{(t+2)^4} = -\frac{50t^2 + 100t - 50t^2}{(t+2)^3} = -\frac{100t}{(t+2)^3}$$

c) $$\lim_{t\to+\infty} V(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(50 - \frac{25t^2}{(t+2)^2}\right) = 50 - 25 = 25$$

El valor del producto no caerá nunca por debajo de 25 €, puesto que la función tiene una asíntota horizontal en este valor.

EJERCICIO 2

a) $N'(t) = \begin{cases} 20 & \text{si } 0 < t < 8 \\ -20t + 260 & \text{si } 8 < t < 16 \\ -20t + 360 & \text{si } 16 < t < 24 \end{cases}$

$-20t + 260 = 0 \rightarrow t = 13$

$-20t + 360 = 0 \rightarrow t = 18$

$$N''(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < t < 8 \\ -20 & \text{si } 8 < t < 16 \\ -20 & \text{si } 16 < t < 24 \end{cases}$$

Al ser negativa la segunda derivada, esos valores son valores máximos de la función.

$N(13) = 2.090$

$N(18) = 2.040$

Por tanto, la ocupación máxima se presenta a las 13 horas, cuando hay 2.090 coches en el aparcamiento.

b) Como la primera expresión de la función corresponde a una función lineal creciente (por tener pendiente positiva), el valor más alto que alcanza es: $N(8) = 1.840$ coches. Luego en el intervalo de horas hasta las ocho de la mañana no hay una ocupación igual o superior a 2.000 plazas.

$$-10t^2 + 260t + 400 = 2.000 \rightarrow t^2 - 26t + 160 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 16 \\ t = 10 \end{cases}$$

La segunda expresión de la función tiene como gráfica una parábola cuyo vértice (13, 2.090) es un máximo. Por tanto, la ocupación es igual o superior a 2.000 plazas entre las 10 y las 16 horas.

$$-10t^2 + 360t - 1.200 = 2.000 \rightarrow t^2 - 36t + 320 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 16 \\ t = 20 \end{cases}$$

Análogamente, la tercera expresión de la función tiene como gráfica una parábola cuyo vértice (18, 2.040) es un máximo. Así, la ocupación es igual o superior a 2.000 plazas entre las 16 y las 20 horas.

Luego la ocupación del aparcamiento es igual o superior a 2.000 plazas entre las 10 y las 20 horas.

BLOQUE DE ESTADÍSTICA

EJERCICIO 1

Sean los sucesos: B = «Ser una empresa del sector bancario», I = «Ser una empresa industrial», T = «Ser una empresa tecnológica» y D = «Producirse una quiebra».

a) Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(D) = P(B) \cdot P(D/B) + P(I) \cdot P(D/I) + P(T) \cdot P(D/T) =$$

$$= \frac{15}{60} \cdot 0{,}01 + \frac{35}{60} \cdot 0{,}02 + \frac{10}{60} \cdot 0{,}1 = 0{,}25 \cdot 0{,}01 + 0{,}58 \cdot 0{,}02 + 0{,}17 \cdot 0{,}1 = 0{,}03$$

b) $P(T/D) = \dfrac{P(T) \cdot P(D/T)}{P(D)} = \dfrac{0{,}17 \cdot 0{,}1}{0{,}03} = 0{,}57$

EJERCICIO 2

a) $\overline{X} \equiv N\left(1.600, \dfrac{400}{\sqrt{100}}\right) = N(1.600, 40)$

$$P(1.550 < \overline{X} < 1.660) = P\left(\frac{1.550 - 1.600}{40} < \frac{\overline{X} - 1.600}{40} < \frac{1.660 - 1.600}{40}\right) =$$

$$= P(-1{,}25 < Z < 1{,}5) = P(Z < 1{,}5) - (1 - P(Z < 1{,}25)) = 0{,}9332 - 1 + 0{,}8944 = 0{,}8276$$

b) El intervalo de confianza es: $(1.530, 1.670) = (1.600 - 70, 1.600 + 70)$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{400}{\sqrt{100}} = 70 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}75 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}04 \rightarrow \alpha = 0{,}08 \rightarrow 1 - \alpha = 0{,}92$$

Luego la afirmación tiene un nivel de confianza del 92 %.

Criterios específicos de corrección:

BLOQUE DE ÁLGEBRA (3 puntos)

EJERCICIO 1
- Formulación del sistema: 1,5 puntos (0,5 puntos por cada una de las tres ecuaciones).
- Resolución del sistema: 1,5 puntos (0,5 puntos por cada una de las incógnitas).

EJERCICIO 2
- Formular el sistema de inecuaciones: 0,75 puntos.
- Función objetivo: 0,25 puntos.
- Vértices de la región factible: 1 punto (0,25 por cada uno de los cuatro vértices).
- Representación gráfica de la región factible: 0,5 puntos (por dibujar las rectas de la región del plano limitada por ellas y los cuatro vértices).
- Optimización: 0,5 puntos.

BLOQUE DE ANÁLISIS (3,5 puntos)

EJERCICIO 1

a) 1 punto:
- Valor inicial del producto: 0,25 puntos.
- Mes a partir del que el valor del producto es inferior a 34 €: 0,75 puntos.

b) 1,25 puntos:
- Por calcular la derivada: 1 punto.
- Llegar a la expresión final de la velocidad de depreciación del producto: 0,25 puntos.

c) 1,25 puntos:
- Cálculo del límite: 0,75 puntos.
- Valor del producto por debajo del cual nunca caerá *V*: 0,25 puntos.
- Justificación: 0,25 puntos.

EJERCICIO 2

a) 2 puntos:
- Determinar las derivadas: 0,75 puntos.
- Hora en que se alcanza el máximo: 0,5 puntos.
- Número máximo de vehículos: 0,25 puntos.
- Justificación del máximo absoluto (esbozo de la gráfica de la función o bien estudiando el comportamiento de la función): 0,5 puntos.

b) 1,5 puntos: (0,75 puntos por cada una de las inecuaciones formulada y resuelta en cada trozo de la función que le corresponde).

BLOQUE DE ESTADÍSTICA (3,5 puntos)

EJERCICIO 1

a) 2,5 puntos:
- Expresión del teorema de la probabilidad total: 0,5 puntos.
- Identificación de cada una de las probabilidades de la fórmula anterior: 1,5 puntos.
- Cálculos correspondientes para llegar al resultado final: 0,5 puntos.

b) 1 punto: Por calcular la probabilidad condicionada pedida.

EJERCICIO 2

a) 1,75 puntos:
- Determinar la distribución de *X*: 0,5 puntos.
- Formular la probabilidad pedida: 0,25 puntos.
- Tipificación: 0,5 puntos.
- Paso a tablas: 0,25 puntos.
- Uso de tablas y resultado final: 0,25 puntos.

b) 1,75 puntos:
- Formular la ecuación que iguala el error en la estimación con el radio del intervalo dado: 0,75 puntos.
- Obtener $z_{\frac{\alpha}{2}}$: 0,25 puntos.
- Calcular el valor del área en la tabla: 0,25 puntos.
- Calcular el nivel de confianza: 0,5 puntos.

Enunciado de la prueba (Septiembre de 2007)

El alumno debe resolver solo un ejercicio de cada uno de los tres bloques temáticos.

BLOQUE DE ÁLGEBRA

Puntuación máxima 3 puntos

EJERCICIO 1

Una empresa de productos informáticos tiene tres tiendas (T_1, T_2 y T_3) que venden un modelo de ordenador (O), uno de impresora (I), y otro de cámara digital (C), a un precio de venta por unidad de 1.200 €, 300 € y 650 €, respectivamente. Un cierto mes, el número de artículos vendidos (en cada tienda) es indicado en la siguiente tabla:

	O	I	C
T_1	x	y	4
T_2	25	x	z
T_3	20	y	z

Determinar el número de artículos vendidos en cada una de las tres tiendas, sabiendo que los ingresos obtenidos un determinado mes fueron 23.600 € en la tienda T_1, 39.700 € en la tienda T_2 y 32.200 € en la tienda T_3.

EJERCICIO 2

Dado el siguiente sistema de inecuaciones:

$$-x + 6y \geq 12 \qquad x + 2y \leq 20 \qquad 3x + 2y \geq 24$$

a) Representar gráficamente la región factible y calcular sus vértices.
b) ¿En qué punto de esa región alcanza el valor máximo la función $f(x, y) = 4x + y$?

BLOQUE DE ANÁLISIS

Puntuación máxima 3,5 puntos

EJERCICIO 1

El rendimiento de dos trabajadores de una factoría (valorado en una escala de 0 a 100) durante una jornada de 8 horas, viene dado por la función:

$$r(t) = \begin{cases} -10t^2 + 60t & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ 80 & \text{si } 4 \leq t < 6 \\ 170 - 15t & \text{si } 6 \leq t \leq 8 \end{cases}$$

siendo t el tiempo en horas.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
¿Cuál es el rendimiento máximo?
b) ¿En qué instantes de su jornada laboral o rendimiento se sitúa según la escala?

EJERCICIO 2

Una empresa estima que el coste (en euros) de producción de x unidades de un determinado producto viene dado por la función $C(x) = 2.400 - 26x$, y que el ingreso diario (en euros) que se obtiene vendiendo estas x unidades viene dado por la función $I(x) = 150x - x^2$.

a) Calcular la función $B(x)$ que expresa los beneficios (ingresos menos gastos) diarios obtenidos. ¿Entre qué valores deberá estar comprendido el número de unidades producidas diariamente para que la empresa no tenga pérdidas?

b) Determinar el número de unidades que se tiene que producir diariamente para que el beneficio sea máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

BLOQUE DE ESTADÍSTICA

Puntuación máxima 3,5 puntos

EJERCICIO 1

En una ciudad, el 55 % de la población en vida laboral son hombres; de ellos, un 12 % está en paro. Entre las mujeres el porcentaje en paro es del 23 %. En esta ciudad se elige a una persona en vida laboral.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y no esté en paro?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y esté en paro?

c) Calcular el porcentaje de paro de esa ciudad.

EJERCICIO 2

En un determinado país se sabe que la altura de una población sigue una distribución normal con desviación típica de 10 cm.

a) Si la media poblacional fuese de 172 cm, calcular la probabilidad de que la media muestral de 64 personas esté comprendida entre 171 y 173 cm.

b) Si la media de una muestra de 64 personas es de 173,5 cm, determinar un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99 %.

c) ¿Qué tamaño de muestra se debe tomar para estimar la media de altura de la población con un error menor de 2 cm, y con un nivel de confianza del 95 %?

BLOQUE DE ÁLGEBRA

EJERCICIO 1

Planteamos el sistema usando la tabla del enunciado:

$$\left.\begin{array}{r} 1.200x + 300y + 2.600 = 23.600 \\ 30.000 + 300x + 650z = 39.700 \\ 24.000 + 300y + 650z = 32.200 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 120x + 30y = 2.100 \\ 30x + 65z = 970 \\ 30y + 65z = 820 \end{array}\right\}$$

Lo resolvemos utilizando el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 120 & 30 & 0 & 2.100 \\ 30 & 0 & 65 & 970 \\ 0 & 30 & 65 & 820 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 - F_3]{} \left(\begin{array}{rrr|r} 120 & 30 & 0 & 2.100 \\ 30 & -30 & 0 & 150 \\ 0 & 30 & 65 & 820 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1 = F_1 + F_2]{} \left(\begin{array}{rrr|r} 150 & 0 & 0 & 2.250 \\ 30 & -30 & 0 & 150 \\ 0 & 30 & 65 & 820 \end{array}\right)$$

Resolviendo el sistema equivalente:

$$\left.\begin{array}{r} 150x = 2.250 \\ 30x - 30y = 150 \\ 30y + 65z = 820 \end{array}\right\} \rightarrow x = 15,\ y = 10 \text{ y } z = 8$$

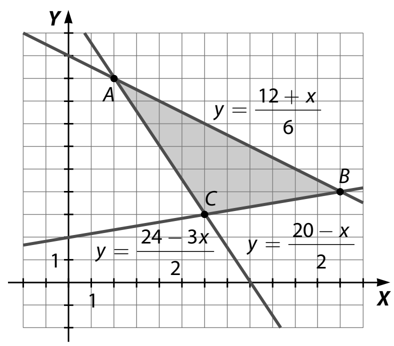
EJERCICIO 2

a) Dibujamos la región factible y hallamos sus vértices:

$$\left.\begin{array}{r} -x + 6y \geq 12 \\ x + 2y \leq 20 \\ 3x + 2y \geq 24 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Rectas que generan la región: } y = \frac{12 + x}{6} \quad y = \frac{20 - x}{2} \quad y = \frac{24 - 3x}{2}$$

Sus puntos de corte, que son los vértices de la región factible, son:

$A(2, 9)$, $B(12, 4)$ y $C(6, 3)$



b) La función objetivo $f(x, y) = 4x + y$ alcanzará el máximo en alguno de los vértices de la región factible.

$$f(2, 9) = 4 \cdot 2 + 9 = 17 \qquad f(6, 3) = 4 \cdot 6 + 3 = 27 \qquad f(12, 4) = 4 \cdot 12 + 4 = 52$$

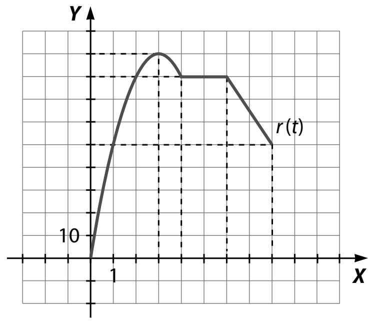
En el vértice $B(12, 4)$, la función objetivo alcanza su valor máximo, que es 52.

BLOQUE DE ANÁLISIS

EJERCICIO 1

a) Dibujamos la función y observamos que:

- Es creciente en (0, 3).
- Es decreciente en $(3, 4) \cup (6, 8)$.
- El rendimiento máximo de los trabajadores es 90 en una escala de 0 a 100, y se produce a las tres horas de trabajo.



b) Su rendimiento se sitúa a la mitad de la escala al cabo de la primera hora de trabajo y, también, al final de la jornada.

EJERCICIO 2

a) La función beneficio es: $B(x) = I(x) - C(x) = 150x - x^2 - 2.400 - 26x = -x^2 + 124x - 2.400$

Calculamos los puntos de corte con el eje X:

$$x = \frac{-124 \pm \sqrt{15.376 - 9.600}}{-2} = \frac{-124 \pm \sqrt{5.776}}{-2} = \frac{-124 \pm 76}{-2} \rightarrow \begin{cases} x = 24 \\ x = 100 \end{cases}$$

Como la función $B(x)$ es una parábola abierta hacia abajo, que corta al eje X en $x = 24$ y en $x = 100$, el número de unidades producidas diariamente por la empresa para no tener pérdidas debe ser mayor o igual que 24 unidades y menor o igual que 100 unidades.

b) Veamos cuándo se anula la primera derivada de la función $B(x)$:

$$B'(x) = -2x + 124 = 0 \rightarrow x = 62$$

Por tanto, deben producir 62 unidades diarias para que el beneficio sea máximo.

El beneficio es: $B(62) = -(62)^2 + 124 \cdot 62 + 2.400 = 1.144$ €

BLOQUE DE ESTADÍSTICA

EJERCICIO 1

Construimos una tabla de contingencia con los datos del enunciado:

	Hombre	Mujer	Totales
Parado	0,12	0,23	*b*
No parado	*a*	*c*	*d*
Totales	0,55	*e*	1

	Hombre	Mujer	Totales
Parado	0,12	0,23	0,35
No parado	0,43	0,22	0,65
Totales	0,55	0,45	1

Las casillas se han calculado de la siguiente forma:

Casilla a: $0{,}55 - 0{,}12 = 0{,}43$

Casilla b: $a + 0{,}23 = 0{,}35$

Casilla d: $1 - b = 1 - 0{,}35 = 0{,}65$

Casilla c: $d - 0{,}43 = 0{,}22$

Casilla e: $1 - 0{,}55 = 0{,}45$

a) P(hombre y no esté en paro) $= P$(hombre y no parado) $= 0{,}43$

b) P(mujer y parada) $= 0{,}23$

c) El porcentaje de paro en la ciudad es del 35 %.

EJERCICIO 2

a) Sea $\overline{X}$ la variable que expresa la media de edad.

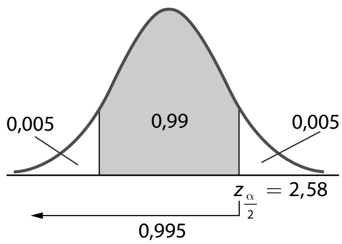
$$P(171 \leq \overline{X} \leq 173) = P\left(\frac{171-172}{\frac{10}{\sqrt{64}}} \leq Z \leq \frac{173-172}{\frac{10}{\sqrt{64}}}\right) = P\left(\frac{-8}{10} \leq Z \leq \frac{8}{10}\right) =$$

$$= P(Z \leq 0,8) - 1 + P(Z \leq 0,8) = 2 \cdot 0,7881 - 1 = 0,5762$$

Por tanto, aproximadamente el 58 % de las muestras de 64 personas tienen una altura comprendida entre 171 cm y 173 cm.

b) $n = 64$ y $\overline{x} = 173,5$

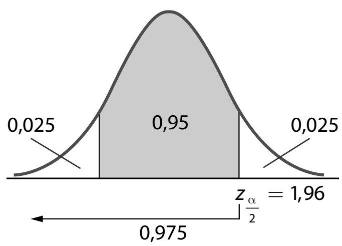
El nivel de confianza es: $1 - \alpha = 0,99$. El valor crítico, según la tabla de la distribución normal, es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,58$



El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(173,5 - 2,58 \cdot \frac{10}{\sqrt{64}};\ 173,5 + 2,58 \cdot \frac{10}{\sqrt{64}}\right) = (170,275;\ 176,725)$$

c) El nivel de confianza es: $1 - \alpha = 0,95$; le corresponde $\alpha = 0,05$ y el valor crítico, según la tabla de la distribución normal, es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$



El error máximo viene dado por:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} = 2$$

Despejamos n:

$$n = \left(\frac{1,96 \cdot 10}{2}\right)^2 = (9,8)^2 = 96,04$$

Por tanto, el tamaño de la muestra debe ser mayor o igual a 97 personas para que el error cometido sea menor de 2 cm.

Criterios específicos de corrección:

BLOQUE DE ÁLGEBRA (3 puntos)

EJERCICIO 1

– Formulación del sistema: 1,5 puntos.
– Resolución del sistema: 1,5 puntos.

EJERCICIO 2

a) 2,5 puntos:
  – Por la representación de las rectas: 0,75 puntos.
  – Vértices de la región factible: 0,75 puntos.
  – Identificación de la región factible: 1 punto (por dibujar las rectas de la región del plano limitada por ellas y los tres vértices).

b) Optimización: 0,5 puntos.

BLOQUE DE ANÁLISIS (3,5 puntos)

EJERCICIO 1

a) 2 puntos:
  – Intervalos de crecimiento y decrecimiento: 1,5 puntos.
  – Rendimiento máximo: 0,5 puntos.

b) 1,5 puntos:
  – Determinar la solución en el primer intervalo de tiempo: 0,75 puntos.
  – Determinar la solución en el último intervalo de tiempo: 0,75 puntos.

EJERCICIO 2

a) 2 puntos:
  – Obtener la función beneficio: 1 punto.
  – Intervalo de unidades producidas para que la empresa no tenga pérdidas: 1 punto.

b) 1,5 puntos:
  – Cálculo de la primera derivada: 0,5 puntos.
  – Obtener el punto crítico: 0,25 puntos.
  – Comprobar que es un máximo: 0,25 puntos.
  – Calcular el beneficio máximo: 0,5 puntos.

BLOQUE DE ESTADÍSTICA (3,5 puntos)

EJERCICIO 1

a) 1 punto.
b) 1 punto.
c) 1,5 puntos.

EJERCICIO 2

a) 1,25 puntos:
  – Determinar la distribución de: 0,5 puntos.
  – Tipificación y paso a tablas: 0,5 puntos.
  – Uso de tablas y resultado: 0,25 puntos.

b) 1,25 puntos:
  – Por la expresión del intervalo: 0,5 puntos.
  – Calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$: 0,25 puntos.
  – Calcular numéricamente los extremos del intervalo: 0,5 puntos.

c) 1 punto:
  – Formulación: 0,5 puntos.
  – Cálculo de *n*: 0,5 puntos.

El alumno debe resolver solo un ejercicio de cada uno de los tres bloques temáticos.

BLOQUE DE ÁLGEBRA

Puntuación máxima 3 puntos

EJERCICIO 1

Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -3 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Calcular los valores de a, b y c para que se verifique la ecuación matricial $A \cdot B^t = C$, donde B^t denota la matriz traspuesta de la matriz B.

EJERCICIO 2

Mario's Pizza es un productor de pizzas congeladas de dos tipos A y B. Obtiene un beneficio de 1 € por cada pizza A que produzca y de 1,50 € por cada pizza de tipo B. Cada pizza incluye una combinación de pasta de harina y de mezcla de relleno, según se indica en la siguiente tabla:

	Pasta de harina	Mezcla de relleno	Beneficio
Pizza A	1/2 kg	1/8 kg	1 €
Pizza B	1/2 kg	1/4 kg	1,50 €

En un día cualquiera dispone de un máximo de 75 kg de pasta de harina y de 25 kg de mezcla de relleno y con base a la demanda del pasado, Mario's debe vender diariamente por lo menos 50 pizzas tipo A y por lo menos 25 pizzas tipo B.

a) Formular el sistema de inecuaciones, representar gráficamente la región factible y calcular sus vértices.

b) ¿Cuántas pizzas A y B deberá fabricar diariamente para maximizar los beneficios? Calcular dichos beneficios.

BLOQUE DE ANÁLISIS

Puntuación máxima 3,5 puntos

EJERCICIO 1

Se estudia la evolución mensual del número de socios de una entidad durante el año 2005 y se observa que está modelada por la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x + a & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ 50 & \text{si } 6 < x \leq 8 \\ 50 + (x-8)(x-12) & \text{si } 8 < x \leq 12 \end{cases}$$

donde x es el tiempo en meses.

a) Si inicialmente la entidad se fundó con 50 socios, determinar el valor de a.

b) Determinar en qué mes el número de socios fue máximo y en qué mes el número de socios fue mínimo.

c) Si para cubrir gastos la entidad necesitaba más de 47 socios, ¿en qué meses tuvo pérdidas?

EJERCICIO 2

Un estudio indica que, entre las 12:00 horas y las 19:00 horas de un día laborable típico, la velocidad (en km/h) del tráfico en cierta salida de autopista viene dada por la siguiente función:

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 20 \qquad 0 \leq x \leq 7$$

donde x es el número de horas después de mediodía ($x = 0$ corresponde a las 12:00 horas).

Representar gráficamente $f(x)$, para $0 \leq x \leq 7$, estudiando: el punto de corte con el eje Y, intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos de concavidad y convexidad. Calcular las horas en que se presentan máximos, mínimos y puntos de inflexión para la velocidad en el tráfico.

BLOQUE DE ESTADÍSTICA

Puntuación máxima 3,5 puntos

EJERCICIO 1

En una ciudad en la que hay doble número de hombres que de mujeres se declara una epidemia. Un 4% de los habitantes son hombres y están enfermos, mientras que un 3% son mujeres y están enfermas. Se elige al azar un habitante de la ciudad, calcular:

a) Probabilidad de que sea hombre

b) Si es hombre, la probabilidad de que esté enfermo.

c) La probabilidad de que sea mujer o esté sana.

EJERCICIO 2

El gasto mensual (en euros) en electricidad por familia, para las familias de cierta ciudad, sigue una distribución normal de media μ desconocida y desviación típica $\sigma = 25$ €.

a) A partir de una muestra de 100 familias de esa ciudad, se obtiene el intervalo de confianza (45, 55) para el gasto medio mensual por familia en electricidad. Determinar el nivel de confianza con que se construyó dicho intervalo.

b) ¿Qué número de familias tendríamos que seleccionar al azar, como mínimo, para garantizar, con un nivel de confianza del 99%, una estimación de dicho gasto medio con un error máximo no superior a 3 €?

Resolución de la prueba (Junio de 2007)

BLOQUE DE ÁLGEBRA

EJERCICIO 1

$$A \cdot B^t = C \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & b & 1 \\ 0 & c & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -3 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a-b+2c & -3 \\ -2 & -a-b+2c & -3 \\ 3 & 2a+b-c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -5 & -3 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos correspondientes obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} a-b+2c &= -1 \\ -a-b+2c &= -5 \\ 2a+b-\ c &= 6 \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} a-b+2c &= -1 \\ -a-b+2c &= -5 \\ 2a+b-\ c &= 6 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{①} \left.\begin{aligned} a-b+2c &= -1 \\ -2b+4c &= -6 \\ -3b+5c &= -8 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{②} \left.\begin{aligned} a-b+2c &= -1 \\ -2b+4c &= -6 \\ 2c &= -2 \end{aligned}\right\}$$

① Sustituimos la segunda ecuación por el resultado de sumar la primera y la segunda ecuación, y sustituimos la tercera por el resultado de restar dos veces la primera menos la tercera ecuación.

② Sustituimos la tercera ecuación por el resultado de restar tres veces la segunda menos dos veces la tercera ecuación.

Hallamos los valores de las tres incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} a-b+2c &= -1 \\ -2b+4c &= -6 \\ 2c &= -2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} &a-1+2\cdot(-1) = -1 \rightarrow a = 1+2-1 = 2 \\ &-2b+4\cdot(-1) = -6 \rightarrow -2b = -2 \rightarrow b = 1 \\ &c = -1 \end{aligned}$$

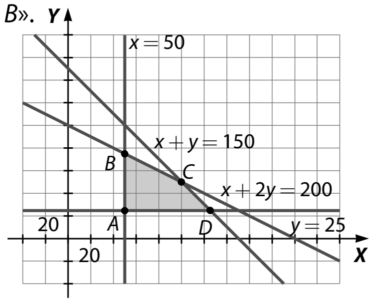
EJERCICIO 2

Definimos las siguientes variables:

$x =$ «Número de pizzas de tipo A» e $y =$ «Número de pizzas de tipo B».

a) Las restricciones y la región factible son:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \le 75 \rightarrow x + y \le 150 \\ &\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y \le 25 \rightarrow x + 2y \le 200 \\ &x \ge 50 \\ &y \ge 25 \end{aligned}\right\}$$



Calculamos los vértices de la región factible:

Vértice A: $\left.\begin{aligned} x &= 50 \\ y &= 25 \end{aligned}\right\} \rightarrow A(50, 25)$

Vértice C: $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 200 \\ x + y &= 150 \end{aligned}\right\} \rightarrow C(100, 50)$

Vértice B: $\left.\begin{aligned} x + 2y &= 200 \\ x &= 50 \end{aligned}\right\} \rightarrow B(50, 75)$

Vértice D: $\left.\begin{aligned} x + y &= 150 \\ y &= 25 \end{aligned}\right\} \rightarrow D(125, 25)$

b) Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: $B(x, y) = x + 1{,}5y$

$A(50, 25) = 87{,}5 \quad B(50, 75) = 162{,}5 \quad C(100, 50) = 175 \quad D(125, 25) = 162{,}5$

El beneficio máximo asciende a 175 € diarios y se consigue fabricando 100 pizzas de tipo A y 50 pizzas de tipo B.

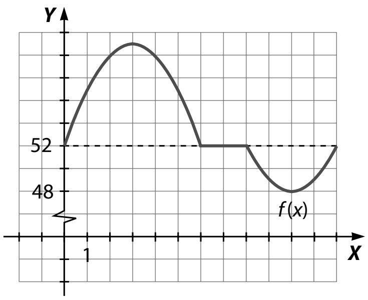
BLOQUE DE ANÁLISIS

EJERCICIO 1

a) Como sabemos que inicialmente se formó con 50 socios, se tiene que:

$$f(0) = 50 \to -0^2 + 6 \cdot 0 + a = 50 \to a = 50$$

b) Como la función está definida a trozos, para saber el número de socios máximo y mínimo dibujamos la función $f(x)$, que está compuesta por dos trozos de parábolas y una recta.



El máximo se encuentra en el vértice de a parábola $-x^2 + 6x + 50 = 0$, es decir, en $x = 3$.

El mínimo se encuentra en el vértice de la parábola $50 + (x - 8)(x - 12) = 0$, que simplificada es la parábola $x^2 - 20x + 146$, que tiene el vértice en $x = 10$.

El número máximo de socios fue en el mes 3, es decir, en marzo, y el número mínimo fue en el mes 10, es decir, en octubre.

c) El número de socios solo está por debajo de 47 en el último trozo de $f(x)$.

Para saber cuándo hay exactamente 47 socios igualamos la parábola $x^2 - 20x + 146$ a 47:

$$x^2 - 20x + 146 = 47 \to x^2 - 20x + 99 = 0 \to x = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 396}}{2} =$$

$$= \frac{20 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{20 \pm 2}{2} \to \begin{cases} x = 11 \\ x = 9 \end{cases}$$

La entidad tuvo pérdidas entre los meses 9 y 11, es decir, entre septiembre y noviembre.

EJERCICIO 2

La función que tenemos es $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 20$, si $0 \leq x \leq 7$.

- Puntos de corte con el eje Y. Hacemos $x = 0$ en la expresión de $f(x)$:

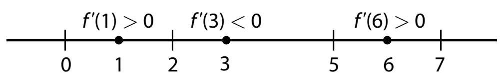
$$2 \cdot 0^3 - 21 \cdot 0^2 + 60 \cdot 0 + 20 = 20 \to (0, 20)$$

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Derivamos y estudiamos el signo de la derivada:

$$f'(x) = 6x^2 - 42x + 60$$

$$f'(x) = 0 \to x^2 - 7x + 10 = 0 \to x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \to \begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \end{cases}$$

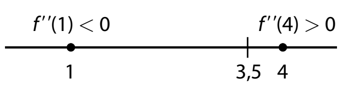
La velocidad del tráfico crece en (0, 2) y (5, 7) y decrece en (2, 5).



- Máximos y mínimos. La velocidad del tráfico es máxima para $x = 2$, es decir, a las 14 horas, y es mínima para $x = 5$, es decir, a las 17 horas.

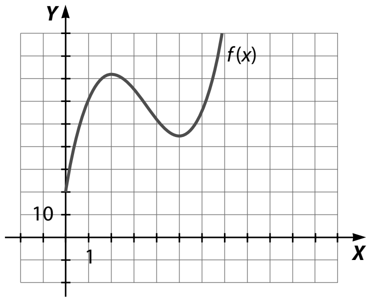
- Intervalos de concavidad y convexidad. Hallamos la segunda derivada y estudiamos su signo:

$$f''(x) = 12x - 42 \qquad f''(x) = 0 \to 12x - 42 = 0 \to x = 3{,}5$$



- Puntos de inflexión. Hay un punto de inflexión en $x = 3{,}5$; es decir, a las 15 horas y 30 minutos.

La grafica de la función es:



BLOQUE DE ESTADÍSTICA

EJERCICIO 1

Definimos los siguientes sucesos:

$M =$ «Ser mujer»
$H =$ «Ser hombre»
$E =$ «Estar enfermo»
$NE =$ «No estar enfermo»

a) Sabemos que hay el doble de números de hombres que de mujeres, luego la probabilidad de ser hombre es el doble que la de ser mujer.

$$\left.\begin{array}{l} P(H) = x \\ P(M) = 2x \end{array}\right\} \rightarrow x + 2x = 1 \rightarrow 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

La probabilidad de ser hombre es $\frac{2}{3}$.

b) De los datos del problema tenemos que $P(H \cap E) = 0{,}04$ y nos piden hallar $P(E / H)$.

$$P(E / H) = \frac{P(H \cap E)}{P(H)} = \frac{0{,}04}{\frac{2}{3}} = 0{,}06$$

c) Hay que calcular $P(M \cup NE)$, y aplicando las propiedades de la probabilidad tenemos que $P(M \cup NE) = P(M) + P(NE) - P(M \cap NE)$, pero desconocemos el valor de $P(M \cap NE)$ y $P(NE)$.

Para calcularlo construimos una tabla de contingencia con los datos del problema y, utilizando las propiedades de la probabilidad, completamos dicha tabla:

	H	**M**	
E	0,04	0,03	
NE			
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

	H	**M**	
E	0,04	0,03	0,07
NE	0,30	0,63	0,93
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Ahora ya podemos calcular la probabilidad pedida:

$P(M \cup NE) = P(M) + P(NE) - P(M \cap NE) = 0{,}33 + 0{,}93 - 0{,}30 = 0{,}96$

EJERCICIO 2

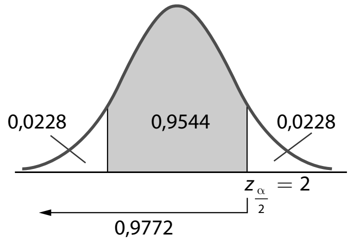
a) El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Como el intervalo de confianza es (45, 55), igualamos los extremos:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 45 \\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 55\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{25}{\sqrt{100}} = 45 \\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{25}{\sqrt{100}} = 55\end{array}\right\} \rightarrow 5 \cdot z_{\frac{\alpha}{2}} = 10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2$$

Buscando en la tabla de la $N(0, 1)$ tenemos que el nivel de confianza con el que se ha construido el test es del 95,44 %.



b) La relación entre el nivel de confianza, el error admisible y el tamaño de la muestra es:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Para un nivel de confianza del 99 %, el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es de 2,575; luego se tiene que:

$$2{,}575 \cdot \frac{25}{\sqrt{n}} = 3 \rightarrow \sqrt{n} = \frac{2{,}575 \cdot 25}{3} = 21{,}46 \rightarrow n = 460{,}53$$

Tendríamos que seleccionar al azar como mínimo a 461 familias.

Criterios específicos de corrección:

BLOQUE DE ÁLGEBRA (3 puntos)

EJERCICIO 1

– Formular el sistema: 2,25 puntos.
– Resolverlo: 0,75 puntos.

EJERCICIO 2

a) 2,5 puntos:
- Formular el sistema de inecuaciones: 1 punto.
- Vértices de la región factible: 1 punto.
- Representación gráfica de la región factible: 0,5 puntos.

b) 0,5 puntos:
- Obtener la solución óptima: 0,25 puntos.
- Calcular el beneficio máximo: 0,25 puntos.

BLOQUE DE ANÁLISIS (3,5 puntos)

EJERCICIO 1

a) 0,5 puntos.
b) 1,5 puntos.
c) 1,5 puntos.

EJERCICIO 2

– Punto de corte: 0,25 puntos.
– Intervalos de crecimiento y decrecimiento: 0,75 puntos.
– Intervalos de concavidad y convexidad: 0,5 puntos.
– Máximos en la velocidad del tráfico: 0,5 puntos.
– Mínimos en la velocidad del tráfico: 0,5 puntos.
– Punto de inflexión: 0,25 puntos.
– Representación gráfica: 0,75 puntos.

BLOQUE DE ESTADÍSTICA (3,5 puntos)

EJERCICIO 1

a) 0,5 puntos.
b) 1,5 puntos.
c) 1,5 puntos.

EJERCICIO 2

a) 2 puntos.
b) 1,5 puntos.