ISLAS BALEARES

Índice

Enunciados de las pruebas y criterios extraídos de la página web de la Universidad de las Islas Baleares:
http://www.uib.es

Criterios generales de corrección:

- Se evaluarán cada ejercicio o cada parte de ejercicio con múltiplos de cuarto de punto.
- Estos criterios no prevén todos los casos que en la práctica se pueden presentar.
- Tampoco pretenden dar todas las posibles soluciones a un ejercicio, ni siquiera la mejor.
- Puede haber casos concretos en que sea difícil aplicar los criterios que se exponen a continuación. Se aplicarán en los casos claros. En los casos dudosos, haga prevalecer su criterio y sentido común.
- Se valorarán todas las partes que sean correctas, aunque el resultado final no lo sea.
- Se penalizarán los errores simples de cálculo con 0; 0,25 o 0,5 puntos según la importancia del error y su criterio. Los errores de cálculo que lleven a resultados incoherentes o absurdos, se penalizarán con 0,75 o 1 punto. En cualquier caso, la evaluación final de cada ejercicio debe ser ≥ 0 y, en los ejercicios con apartados, la evaluación final de cada apartado debe ser ≥ 0.

Enunciado de la prueba (Junio de 2008)

Conteste de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas.

Duración: una hora y media.

OPCIÓN A

1. Tres familias van a una heladería. La primera familia toma 2 helados pequeños y 1 grande; la segunda familia toma 2 pequeños, 1 mediano y 1 grande; y la tercera familia toma 1 pequeño y 2 grandes. A la primera familia le cobran 4,50 €, a la segunda, 6,30 €, y a la tercera, 5,40 €. Se denotan por x, y, z las incógnitas que representan respectivamente el precio de un helado pequeño, de uno mediano y de uno grande.

   a) Dé la matriz A que expresa el número de helados pequeños, medianos y grandes que toma cada una de las tres familias, de manera que:

   $$A \cdot X = B$$

   donde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 6,3 \\ 5,4 \end{pmatrix}$. **(0,5 puntos)**

   b) Calcule A^{-1}. **(1,5 puntos)**

   c) Resuelva la ecuación matricial $A \cdot X = B$. **(0,5 puntos)**

2. De todos los rectángulos de perímetro 48 m, calcule las dimensiones del que tiene la diagonal más pequeña. **(2,5 puntos)**

3. Una urna A contiene 5 bolas blancas y 3 negras y otra urna B contiene 3 blancas y 4 negras. Se elige una urna al azar y se extrae una bola.

   a) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea negra. **(1,5 puntos)**

   b) Suponiendo que la bola extraída es blanca, calcule la probabilidad de que la urna elegida haya sido la A. **(1 punto)**

4. Para estimar la proporción de las viviendas de una determinada ciudad que tienen aire acondicionado se quiere utilizar una muestra aleatoria de tamaño n. Calcule el valor mínimo de n para que, con un nivel de confianza del 97 %, el error en la estimación sea más pequeño que 0,05. (Como se desconoce la proporción, se debe tomar el caso más desfavorable, que será 0,5.) **(2,5 puntos)**

OPCIÓN B

5. Dada la función $f(x) = 2ax + b + \dfrac{36}{x}$, calcule a y b de manera que la gráfica de f pase por el punto (3, 10) y tenga tangente horizontal en este punto. **(2,5 puntos)**

6. En Navidad un colmado quiere preparar dos tipos de lotes, L_1 y L_2. Cada lote del tipo L_1 está formado por 4 barras de turrón, 2 botellas de cava y 2 paquetes de café, y cada lote del tipo L_2 está formado por 2 barras de turrón, 2 botellas de cava y 4 paquetes de café. Con cada lote del tipo L_1 se obtiene un beneficio de 4,50 €, y con cada lote del tipo L_2, uno de 3 €. El colmado dispone de 300 barras de turrón, de 180 botellas de cava y de 300 paquetes de café. ¿Cuántos lotes de cada tipo se tienen que preparar para obtener un beneficio máximo? **(2,5 puntos)**

7. Determine la función $f(x)$, definida para $x > 0$, que verifica que $f'(x) + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = 0$ y $f(1) = 4$. **(2,5 puntos)**

8. Se supone que el peso de los limones de una determinada variedad sigue una distribución normal de media 250 g y desviación típica 24 g. Se toma una muestra al azar de 64 de estos limones y se calcula su media. ¿Cuál es la probabilidad de que esta media sea menor que 244 g? **(2,5 puntos)**

Resolución de la prueba (Junio de 2008)

OPCIÓN A

CUESTIÓN 1

a) La matriz A es de la forma: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\det(A) = 4 - 1 = 3 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

c) $A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 6{,}3 \\ 5{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 1{,}8 \\ 2{,}1 \end{pmatrix}$

CUESTIÓN 2

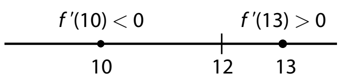
Sea x la medida de uno de los lados del rectángulo.

Como el perímetro mide 48 m, el otro lado puede expresarse como: $24 - x$

Aplicando el teorema de Pitágoras, la función que permite calcular la diagonal es de la forma: $f(x) = \sqrt{x^2 + (24 - x)^2}$

$$f'(x) = \frac{2x + 2(24 - x)(-1)}{2\sqrt{x^2 + (24 - x)^2}} = \frac{2x - 24}{\sqrt{x^2 + (24 - x)^2}} = 0 \rightarrow 2x - 24 = 0 \rightarrow x = 12$$

Así, $x = 12$ es un mínimo y, por tanto, el otro lado del rectángulo mide: $24 - 12 = 12$ m, es decir, el rectángulo con la diagonal más pequeña es un cuadrado cuyo lado mide 12 m.



CUESTIÓN 3

Sean los sucesos: A = «Elegir la urna A», B = «Elegir la urna B», C = «Extraer una bola blanca» y N = «Extraer una bola negra».

a) Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(N) = P(A) \cdot P(N / A) + P(B) \cdot P(N / B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{53}{112}$$

b) Aplicando el teorema de Bayes:

$$P(A / C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A) \cdot P(C / A)}{P(A) \cdot P(C / A) + P(B) \cdot P(C / B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}} = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{5}{16} + \frac{3}{14}} = \frac{35}{59}$$

CUESTIÓN 4

$1-\alpha = 0{,}97 \to \alpha = 0{,}03 \to \frac{\alpha}{2} = 0{,}015$. El valor correspondiente a 0,985 es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17$

El error es menor que 0,05 si: $z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 0{,}5}{n}} < 0{,}05$

$\sqrt{n} > 21{,}7 \to n > 470{,}89$. Por tanto, el tamaño mínimo de la muestra debe ser: $n = 471$

OPCIÓN B

CUESTIÓN 5

Al ser horizontal la tangente en el punto (3, 10), significa que se trata de un máximo o un mínimo de la función, y tenemos que: $f'(3) = 0$

$$f'(x) = 2a - \frac{36}{x^2} \to 2a - 4 = 0 \to a = 2 \qquad f(x) = 4x + b + \frac{36}{x}$$

Como la gráfica de la función pasa por el punto (3, 10), se cumple que: $f(3) = 10$
Entonces resulta que: $12 + b + 12 = 10 \to b = -14$

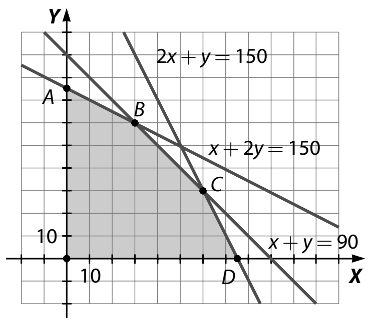
CUESTIÓN 6

Sean x e y los lotes de cada tipo que se tienen que preparar.

La función que hay que maximizar es: $f(x, y) = 4{,}5x + 3y$

Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 2y \le 300 \\ 2x + 2y \le 180 \\ 2x + 4y \le 300 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$



Los vértices del polígono son: $A(0, 75)$, $B(30, 60)$, $C(60, 30)$ y $D(75, 0)$

Al sustituir las coordenadas de estos puntos en la función objetivo:

$$f(0, 75) = 225 \qquad f(30, 60) = 315 \qquad f(60, 30) = 360 \qquad f(75, 0) = 337{,}5$$

Luego tienen que prepararse 60 lotes de tipo L_1 y 30 lotes de tipo L_2.

CUESTIÓN 7

$$f'(x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0 \to f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \qquad \int\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx = -\ln|x| - \frac{1}{x} + k$$

Como $f(1) = 4$, entonces: $0 - 1 + k = 4 \to k = 5$

La expresión de la función es: $f(x) = -\ln x - \frac{1}{x} + 5$, para $x > 0$.

CUESTIÓN 8

La distribución de las medias muestrales sigue una distribución normal:

$$N\left(250, \frac{24}{\sqrt{64}}\right) = N(250, 3)$$

$$P\left(\overline{X} < 244\right) = P\left(\frac{\overline{X} - 250}{3} < \frac{244 - 250}{3}\right) = P(Z < -2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

Criterios específicos de corrección:

OPCIÓN A

1. a) Hasta 0,5 puntos.
   b) Hasta 1,5 puntos.
   c) Hasta 0,5 puntos.
2. Hasta 2,5 puntos.
3. a) Hasta 1,5 puntos.
   b) Hasta 1 punto.
4. Hasta 2,5 puntos.

OPCIÓN B

5. Hasta 2,5 puntos.
6. Hasta 2,5 puntos.
7. Hasta 2,5 puntos.
8. Hasta 2,5 puntos.

Enunciado de la prueba (Septiembre de 2007)

Conteste de manera clara y razonada una de las dos opciones propuestas.

OPCIÓN A

1. La suma de las tres cifras de un determinado número es 12. La cifra de las centenas es la media de las otras dos. Si se intercambia la cifra de las unidades con la de las centenas, el número disminuye en 198 unidades. ¿De qué número se trata? **(2,5 puntos)**

2. Se quiere construir una caja abierta (sin tapa) recortando cuadrados iguales en cada uno de los lados de una hoja de cartón cuadrado de 72 cm de lado. Calcula la longitud del lado del cuadrado que se ha de recortar para obtener una caja de volumen máximo. **(2,5 puntos)**

3. Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Se extraen tres bolas al azar sin reemplazamiento.

a) Calcula la probabilidad de extraer 2 bolas blancas y 1 negra. **(1,5 puntos)**

b) Calcula la probabilidad de extraer al menos 1 bola negra. **(1 punto)**

4. La altura media de una muestra tomada al azar de 324 hombres de una determinada región es de 171 cm, y la desviación típica, 9 cm. Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional para un nivel de confianza del 97 %. **(2,5 puntos)**

OPCIÓN B

5. Dada la función, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 6}$, calcula cuando existan:

a) Las asíntotas verticales y las horizontales. **(1 punto)**

b) Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento. **(1 punto)**

c) Los máximos relativos y los mínimos relativos. **(0,5 puntos)**

6. En la preparación de dos tipos de barras de turrón, T_1 y T_2, se utiliza almendra marcona y almendra vivot. Cada barra del tipo T_1 contiene 90 g de almendra marcona y 60 g de almendra vivot, y cada barra del tipo T_2 contiene 30 g de almendra marcona y 120 g de almendra vivot. Con cada barra del tipo T_1 se obtiene un beneficio de 1,20 €, y con cada barra del tipo T_2, uno de 1 €. Se dispone de 270 kg de almendra marcona y de 480 kg de almendra vivot.

a) ¿Cuántas barras de cada tipo se han de preparar para poder obtener un beneficio máximo? **(2 puntos)**

b) ¿Cuál es ese beneficio máximo? **(0,5 puntos)**

7. Determina la función $f(x)$, definida para $x > 0$, que verifica

$f'(x) - \sqrt{x} - \dfrac{1}{x^2} = 0$ y $f(1) = 0$. **(2,5 puntos)**

8. Para estimar la proporción de los habitantes de una determinada gran ciudad que tienen microondas, se quiere servir de una muestra aleatoria que mida n. Calcula el valor mínimo de n para el cual, con un nivel de confianza del 97 %, el error en la estimación sea más pequeño que 0,02. (Como se desconoce la proporción, se ha de tomar el caso más desfavorable, que será 0,5.) **(2,5 puntos)**

OPCIÓN A

CUESTIÓN 1

Sean *a, b* y c las tres cifras del número, y como la suma de ellas es 12: $a + b + c = 12$

Y, además, tenemos que: $a = \dfrac{b + c}{2} \rightarrow 2a = b + c$

Resolvemos: $\left.\begin{array}{l} a + b + c = 12 \\ 2a = b + c \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} b + c = 12 - a \\ b + c = 2a \end{array}\right\} \rightarrow 12 - a = 2a \rightarrow a = 4$

El número que buscamos tiene la forma: $100a + 10b + c$

$$100c + 10b + a = 100a + 10b + c - 198 \rightarrow -99a + 99c = -198$$

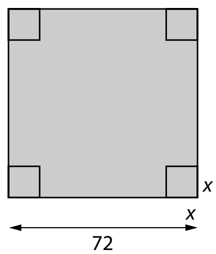
Como $a = 4 \rightarrow -99 \cdot 4 + 99c = -198 \rightarrow c = \dfrac{198}{99} = 2$

Hallamos b: $2a = b + c \rightarrow b = 2a - c = 2 \cdot 4 - 2 = 6$. El número pedido es 462.

CUESTIÓN 2

El volumen de la caja vendrá dado por:

$$f(x) = (72 - 2x)^2 x = (5.184 - 288x + 4x^2)x = 4x^3 - 288x^2 + 5.184x$$



Calculamos los valores que anulan la primera derivada:

$$f'(x) = 12x^2 - 288x + 5.184 = 0 \rightarrow x = 12 \text{ y } x = 36$$

En $(-\infty, 12)$, $f'(x) > 0$; en $(12, 36)$, $f'(x) < 0$ y en $(36, +\infty)$, $f'(x) > 0$;
por tanto, el volumen de la caja es máximo cuando $x = 12$.

CUESTIÓN 3

a) $P(\text{blanca 1.}^{\text{a}} \cap \text{blanca 2.}^{\text{a}} \cap \text{negra 3.}^{\text{a}}) = \dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{3}{6} = \dfrac{10}{56}$

$P(\text{blanca 1.}^{\text{a}} \cap \text{negra 2.}^{\text{a}} \cap \text{blanca 3.}^{\text{a}}) = \dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{3}{7} \cdot \dfrac{4}{6} = \dfrac{10}{56}$

$P(\text{negra 1.}^{\text{a}} \cap \text{blanca 2.}^{\text{a}} \cap \text{blanca 3.}^{\text{a}}) = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{5}{7} \cdot \dfrac{4}{6} = \dfrac{10}{56}$

$P(\text{extraer dos bolas blancas y una negra}) = 3 \cdot \dfrac{10}{56} = \dfrac{30}{56} = \dfrac{15}{28}$

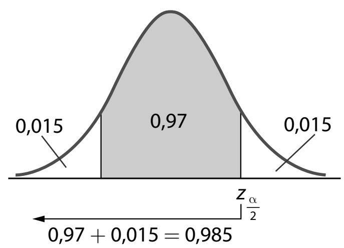
b) $P(\text{al menos una negra}) = 1 - P(\text{las tres blancas}) = 1 - \dfrac{5}{8} \cdot \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{3}{6} = 1 - \dfrac{60}{336} = \dfrac{23}{28}$

CUESTIÓN 4

Tenemos que el nivel de confianza es: $1 - \alpha = 0{,}97$

El valor crítico obtenido en la tabla de distribución normal es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17$

Calculamos el intervalo de confianza:



$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(171 - 2{,}17 \cdot \frac{9}{\sqrt{324}};\ 171 + 2{,}17 \cdot \frac{9}{\sqrt{324}}\right) =$$

$$= \left(171 - \frac{19{,}53}{18};\ 171 + \frac{19{,}53}{18}\right) = (169{,}915;\ 172{,}085)$$

OPCIÓN B

CUESTIÓN 5

a) Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2 - x - 6} = 0$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2 - x - 6} = 0 \to y = 0$

Asíntotas verticales: los límites laterales en los puntos 3 y 2, que anulan el denominador, son:

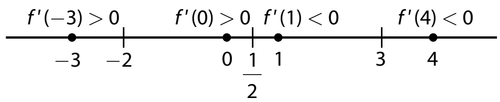
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to 3^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$$

Por tanto, $x = 3$ y $x = -2$ son las asíntotas verticales.

b) Calculamos la primera derivada e igualamos a cero:

$$f'(x) = \frac{-(2x-1)}{(x^2 - x - 6)^2} = \frac{-2x+1}{(x^2 - x - 6)^2} = 0 \to x = \frac{1}{2}$$

Formamos los intervalos para estudiar la monotonía, teniendo en cuenta las asíntotas verticales:



La función es creciente en $(-\infty, -2) \cup \left(-2, \dfrac{1}{2}\right)$ y decreciente en $\left(\dfrac{1}{2}, 3\right) \cup (3, +\infty)$.

c) Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{-2(x^2 - x - 6)^2 - (-2x+1)\cdot 2\cdot(2x-1)(x^2 - x - 6)}{(x^2 - x - 6)^4} = \frac{-2(x^2 - x - 6) - (-2x+1)\cdot 2\cdot(2x-1)}{(x^2 - x - 6)^3} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 2x + 12 - (-8x^2 + 4x + 4x - 2)}{(x^2 - x - 6)^3} = \frac{6x^2 - 6x + 14}{(x^2 - x - 6)^3}$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\dfrac{6}{4} - \dfrac{6}{2} + 14}{\left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} - 6\right)^3} < 0 \ \to \ \text{El punto } \left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{25}\right) \text{ es un punto máximo}$$

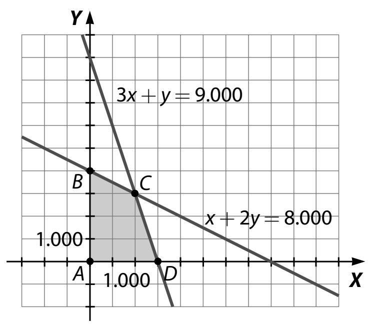
y no tiene mínimos.

CUESTIÓN 6

a) Sean $x =$ «Número de barras de turrón T_1» e $y =$ «Número de barras de turrón T_2»

Las restricciones del problema son:

$$\left.\begin{array}{l} 90x + 30y \le 270.000 \\ 60x + 120y \le 480.000 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$



Los vértices de la región factible son:

$A(0, 0)$, $B(0, 4.000)$, $C(2.000, 3.000)$ y $D(3.000, 0)$

Para maximizar la función objetivo, la evaluamos en sus vértices:

$f(3.000, 0) = 3.600$ $\quad f(2.000, 3.000) = 5.400$ $\quad f(0, 4.000) = 4.000$

Para obtener un beneficio máximo se han de preparar 2.000 barras de T_1 y 3.000 barras de T_2.

b) El beneficio máximo es de 5.400 €.

CUESTIÓN 7

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} \rightarrow f(x) = \int\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{x} + k$$

Como $f(1) = 0 \rightarrow \frac{2}{3} - 1 + k = 0 \rightarrow k = \frac{1}{3}$, y la función es: $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3}$

CUESTIÓN 8

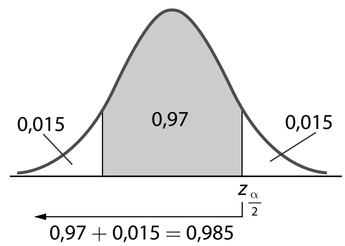
El nivel de confianza es $1 - \alpha = 0{,}97$ y el valor crítico obtenido en la tabla de la distribución normal es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17$

$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ y queremos que $E < 0{,}02$.

$E = 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5(1-0{,}5)}{n}} < 0{,}02 \rightarrow 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5(1-0{,}5)}{n}} = 0{,}02$ y calculamos n:

$$n = 0{,}5(1-0{,}5)\left(\frac{2{,}17}{0{,}02}\right)^2 = 0{,}25 \cdot 108{,}5^2 = 0{,}25 \cdot 11.772{,}25 = 2.943{,}06$$

Por tanto, se ha de elegir una muestra, como mínimo de 2.944 habitantes que tengan microondas.



Criterios específicos de corrección:

OPCIÓN A

1. Planteamiento del sistema de ecuaciones: 1 punto.
Resolución del sistema: 1,5 puntos.

2. Planteamiento del problema: 1,5 puntos.
Cálculo efectivo del valor: 1 punto.

3. a) Hasta 1,5 puntos.
b) Hasta 1 punto.

4. Hasta 2,5 puntos.

OPCIÓN B

5. a) Hasta 1 punto.
b) Hasta 1 punto.
c) Hasta 0,5 puntos.

6. a) Planteamiento que se ha de maximizar la función $f(x, y) = 1{,}2x + y$ sometida a las restricciones

$$\left.\begin{array}{r} z \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 90x + \ \ 30y \leq 270.000 \\ 60z + 120y \leq 480.000 \end{array}\right\}$$

o equivalente: 1 punto.
Maximización de la función sometida a las restricciones: 1 punto.
b) Hasta 0,5 puntos.

7. Hasta 2,5 puntos.

8. 2,5 puntos.