COMUNIDAD DE MADRID

Índice

Enunciados de las pruebas y criterios extraídos de la página web de la Universidad Carlos III de Madrid:
http://www.uc3m.es

Criterios generales de corrección:

Por acuerdo de la Comisión Interuniversitaria, en todos los ejercicios se ponderará específicamente la capacidad expresiva y la corrección idiomática de los alumnos, y para ello se tendrá en cuenta:

a) La propiedad del vocabulario.
b) La corrección sintáctica.
c) La corrección ortográfica (grafías y tildes).
d) La puntuación apropiada.
e) La adecuada presentación.

El corrector especificará en el ejercicio la deducción efectuada en la nota global en relación con los cinco criterios del punto anterior, que podrá ser hasta un máximo de cuatro puntos.

Uno o dos errores aislados no deben penalizarse.

Reiteradas incorrecciones idiomáticas podrán suponer incluso la calificación de suspenso.

Enunciado de la prueba (Junio de 2008)

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Instrucciones: El alumno deberá elegir una de las dos opciones A o B que figuran en el presente examen y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

Calificación: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

Tiempo: 90 minutos.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (Puntuación máxima: **3 puntos**)

Un agricultor tiene repartidas sus 10 hectáreas de terreno en barbecho, cultivo de trigo y cultivo de cebada. La superficie dedicada al trigo ocupa 2 hectáreas más que la dedicada a la cebada, mientras que en barbecho tiene 6 hectáreas menos que la superficie total dedicada al cultivo de trigo y cebada. ¿Cuántas hectáreas tiene dedicadas a cada uno de los cultivos y cuántas están en barbecho?

EJERCICIO 2 (Puntuación máxima: **3 puntos**)

Calcúlese el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las funciones reales de variable real:

$$f(x) = x^2 - x \qquad g(x) = 1 - x^2$$

EJERCICIO 3 (Puntuación máxima: **2 puntos**)

En un juego consistente en lanzar dos monedas indistinguibles y equilibradas y un dado de seis caras equilibrado, un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.

a) Calcúlese la probabilidad de que un jugador gane.

b) Se sabe que una persona ha ganado. ¿Cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

EJERCICIO 4 (Puntuación máxima: **2 puntos**)

El tiempo en minutos dedicado cada día a escuchar música por los estudiantes de Secundaria de una cierta ciudad se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 15 minutos. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 estudiantes y se obtienen los siguientes tiempos (en minutos):

91	68	39	82	55	70	72	62	54	67

a) Determínese un intervalo de confianza al 90 % para el tiempo medio diario dedicado a escuchar música por un estudiante.

b) Calcúlese el tamaño muestral mínimo necesario para conseguir una estimación de la media del tiempo diario dedicado a escuchar música con un error menor que 5 minutos, con un nivel de confianza del 95 %.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 (Puntuación máxima: **3 puntos**)

Un distribuidor de aceite de oliva compra la materia prima a dos almazaras, *A* y *B*. Las almazaras *A* y *B* venden el aceite a 2.000 y 3.000 € por tonelada, respectivamente. Cada almazara le vende un mínimo de 2 toneladas y un máximo de 7 y para atender a su demanda, el distribuidor debe comprar en total un mínimo de 6 toneladas. El distribuidor debe comprar como máximo a la almazara *A* el doble de aceite que a la almazara *B*. ¿Qué cantidad de aceite debe comprar el distribuidor a cada una de las almazaras para obtener el mínimo coste? Determínese dicho coste mínimo.

EJERCICIO 2 (Puntuación máxima: **3 puntos**)

Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x} \qquad x \neq 0$$

a) Determínense las asíntotas de *f*.

b) Calcúlense sus máximos y mínimos relativos y determínense sus intervalos de crecimiento.

c) Calcúlese la integral definida $\int_1^2 f(x)\,dx$.

EJERCICIO 3 (Puntuación máxima: **2 puntos**)

Se consideran dos sucesos *A* y *B* de un experimento aleatorio, tales que:

$$P(A) = \frac{1}{4} \qquad P(B) = \frac{1}{3} \qquad P(A \cup B) = \frac{1}{2}$$

a) ¿Son *A* y *B* sucesos independientes? Razónese.

b) Calcúlese $P(\overline{A} / \overline{B})$.

Nota: La notación $\overline{A}$ representa el suceso complementario de *A*.

EJERCICIO 4 (Puntuación máxima: **2 puntos**)

El rendimiento por hectárea de las plantaciones de trigo en una cierta región, se supone que es una variable aleatoria con distribución normal de desviación típica igual a 1 tonelada por hectárea. Se ha tomado una muestra aleatoria simple de 64 parcelas con una superficie igual a 1 hectárea cada una, obteniéndose un rendimiento medio de 6 toneladas.

a) ¿Puede asegurarse que el error de estimación del rendimiento medio por hectárea es menor que 0,5 toneladas, con un nivel de confianza del 98 %? Razónese.

b) ¿Qué tamaño muestral mínimo ha de tomarse para que el error en la estimación sea menor que 0,5 toneladas con un nivel de confianza del 95 %?

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

Sea x el número de hectáreas en barbecho y sean y y z las hectáreas dedicadas al cultivo de trigo y cebada respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ y=z+2 \\ x=y+z-6 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ y-z=2 \\ x-y-z=-6 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ y-z=2 \\ 2y+2z=16 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=10 \\ y-z=2 \\ 4z=12 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=5 \\ z=3 \end{array}\right.$$

Así, el agricultor tiene 2 hectáreas en barbecho y dedica 5 hectáreas al cultivo de trigo y 3 al de cebada.

EJERCICIO 2

$$f(x)=g(x) \to x^2-x=1-x^2 \to 2x^2-x-1=0 \to \left\{\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=1 \end{array}\right.$$

$$F(x)=\int [(1-x^2)-(x^2-x)]\,dx=\int(-2x^2+x+1)\,dx=-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x$$

$$\text{Área}=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(-2x^2+x+1)\,dx=F(1)-F\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}+\frac{7}{24}=\frac{9}{8}\ \text{u}^2$$

EJERCICIO 3

Sean los sucesos $A=$ «Salir un número par», $B=$ «Salir un número mayor o igual que cinco», $C=$ «Obtener dos caras» y $D=$ «Obtener exactamente una cara».

a) La probabilidad de ganar es:

$$P(G)=P(C\cap A)+P(D\cap B)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{7}{24}$$

b) Aplicando el teorema de Bayes: $P(C\,/\,G)=\dfrac{P(C)\cdot P(G\,/\,C)}{P(G)}=\dfrac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{7}{24}}=\dfrac{3}{7}$

EJERCICIO 4

Tenemos que $\sigma=15$, $n=10$ y la media de la muestra es: $\overline{x}=66$

a) Si $1-\alpha=0{,}9 \to \alpha=0{,}1 \to \dfrac{\alpha}{2}=0{,}05$. El valor correspondiente a 0,95 de probabilidad es: $z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645$

Por tanto, el intervalo correspondiente es:

$$\left(66-1{,}645\cdot\frac{15}{\sqrt{10}};\,66+1{,}645\cdot\frac{15}{\sqrt{10}}\right)=(58{,}20;\,73{,}80)$$

b) Si $1-\alpha=0{,}95 \to \alpha=0{,}05 \to \dfrac{\alpha}{2}=0{,}025$. El valor correspondiente a 0,975 de probabilidad es: $z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96$. Si se desea un error menor que 5 minutos: $1{,}96\cdot\dfrac{15}{\sqrt{n}}<5 \to \sqrt{n}>5{,}88 \to n>34{,}57$

Por tanto, el tamaño mínimo de la muestra debe ser: $n=35$

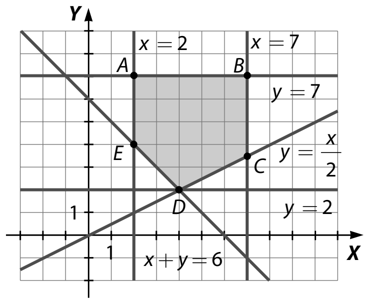
OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sean x e y las toneladas de aceite que se compran a las almazaras A y B, respectivamente.

La función que hay que minimizar es:

$$f(x, y) = 2.000x + 3.000y$$



Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} 2 \le x \le 7 \\ 2 \le y \le 7 \\ x + y \ge 6 \\ x \le 2y \end{array}\right\}$$

Los vértices del polígono son:

$A(2, 7)$, $B(7, 7)$, $C(7; 3{,}5)$, $D(4, 2)$ y $E(2, 4)$

Al sustituir las coordenadas de estos puntos en la función objetivo, se tiene:

$f(2, 7) = 25.000 \quad f(7, 7) = 35.000 \quad f(7; 3{,}5) = 24.500 \quad f(4, 2) = 14.000 \quad f(2, 4) = 16.000$

Luego deben comprarse 4 toneladas a la almazara A y 2 a la B con un coste de 14.000 euros.

EJERCICIO 2

a) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{0\}$

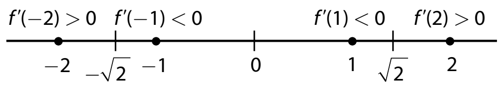
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota vertical en } x = 0.$$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \infty \to$ La función no tiene asíntota horizontal.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2} = 1 \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\dfrac{x^2 + x + 2}{x} - x \right) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 + x + 2 - x^2}{x} = 1 \end{array}\right\} \to f(x) \text{ tiene una asíntota oblicua: } y = x + 1$$

b) $$f'(x) = \frac{(2x + 1)x - (x^2 + x + 2)}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$

$$\frac{x^2 - 2}{x^2} = 0 \to x^2 = 2 \to x = \pm\sqrt{2}$$



La función es creciente en $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$ y es decreciente en $\left(-\sqrt{2}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{2}\right)$.

Presenta un máximo relativo en $x = -\sqrt{2}$ y un mínimo relativo en $x = \sqrt{2}$.

c) $$\int_1^2 \frac{x^2 + x + 2}{x}\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + x + 2 \ln|x| \right]_1^2 = \frac{5}{2} + 2 \ln 2$$

EJERCICIO 3

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

Como $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} = P(A \cap B) \rightarrow$ Los sucesos A y B son independientes.

b) $P(\overline{A} / \overline{B}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \dfrac{1 - P(A \cup B)}{1 - P(B)} = \dfrac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{3}{4}$

EJERCICIO 4

$\sigma = 1, n = 64, \overline{x} = 6$

a) Si $1 - \alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 0{,}02 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}01$

El valor correspondiente a 0,99 de probabilidad es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}33$

Así, el error de estimación es: $2{,}33 \cdot \frac{1}{\sqrt{64}} = 0{,}29 < 0{,}5$

b) Si $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$. El valor correspondiente a 0,975 de probabilidad es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$. Si se desea un error menor que 0,5 toneladas: $1{,}96 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} < 0{,}5 \rightarrow \sqrt{n} > 3{,}92 \rightarrow n > 15{,}37$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser: $n = 16$

Criterios específicos de corrección:

ATENCIÓN. La calificación debe hacerse en múltiplos de 0,25 puntos.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1. Planteamiento correcto del sistema de ecuaciones: 1,5 puntos. Resolución correcta de dicho sistema: 1,5 puntos.

EJERCICIO 2. Localización de la región: 1 punto. Planteamiento del área como una integral definida: 1 punto. Cálculo correcto del área: 1 punto.

EJERCICIO 3. Cada apartado correctamente resuelto: 1 punto.

EJERCICIO 4. Cada apartado correctamente resuelto: 1 punto.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1. Deducción correcta de la función objetivo: 0,5 puntos. Planteamiento correcto del problema de programación lineal: 0,5 puntos. Representación correcta de la región factible: 1 punto. Localización del mínimo: 0,5 puntos. Obtención del valor mínimo: 0,5 puntos.

EJERCICIO 2. Cada apartado correctamente resuelto: 1 punto.

EJERCICIO 3. Cada apartado correctamente resuelto: 1 punto.

EJERCICIO 4. Cada apartado correctamente resuelto: 1 punto.

NOTA. La resolución de ejercicios por cualquier procedimiento correcto, diferente al propuesto por los coordinadores, ha de valorarse con los criterios convenientemente adaptados.

Enunciado de la prueba (Septiembre de 2007)

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Instrucciones: El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir una de ellas y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

Tiempo: Una hora y treinta minutos.

Calificación: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (Puntuación máxima: **3 puntos**)

Dado el sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real a:

$$\left.\begin{aligned} x + ay + z &= 1 \\ 2y + az &= 2 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = 3$ y $a = 1$.

EJERCICIO 2 (Puntuación máxima: **3 puntos**)

Dada la función real de variable real definida por: $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$

a) Especificar su dominio de definición.

b) Estudiar su continuidad.

c) Calcular sus asíntotas, si las hubiera.

EJERCICIO 3 (Puntuación máxima: **2 puntos**)

En el departamento de lácteos de un supermercado se encuentran mezclados y a la venta 100 yogures de la marca A, 60 de la marca B y 40 de la marca C. La probabilidad de que un yogur esté caducado es 0,01 para la marca A; 0,02 para la marca B y 0,05 para la marca C. Un comprador elige un yogur al azar.

a) Calcular la probabilidad de que el yogur esté caducado.

b) Sabiendo que el yogur elegido está caducado, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

EJERCICIO 4 (Puntuación máxima: **2 puntos**)

Se supone que la recaudación diaria de los comercios de un barrio determinado es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de desviación típica 328 €. Se ha extraído una muestra de 100 comercios de dicho barrio, obteniéndose que la recaudación diaria media asciende a 1.248 €. Calcular:

a) El intervalo de confianza para la recaudación diaria media con un nivel de confianza del 99 %.

b) El tamaño muestral mínimo necesario para conseguir, con un nivel de confianza del 95 %, un error en la estimación de la recaudación diaria media menor de 127 €.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 (Puntuación máxima: **3 puntos**)

Una aerolínea quiere optimizar el número de filas de clase preferente y de clase turista en un avión. La longitud útil del avión para instalar las filas de asientos es de 104 m, necesitándose 2 m para instalar una fila de clase preferente y 1,5 m para las de clase turista. La aerolínea precisa instalar al menos 3 filas de clase preferente y que las filas de clase turista sean como mínimo el triple que las de clase preferente. Los beneficios por fila de clase turista son de 152 € y de 206 € para la clase preferente.

¿Cuántas filas de clase preferente y cuántas de clase turista se deben instalar para obtener el beneficio máximo? Indicar dicho beneficio.

EJERCICIO 2 (Puntuación máxima: **3 puntos**)

La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ satisface las siguientes propiedades:

- Pasa por el punto (0, 0).
- Tiene un máximo local en el punto (1, 2).

Se pide:

a) Obtener el valor de los coeficientes a, b y c.

b) Hallar el área de la región acotada del plano limitada por la gráfica de la función $g(x) = -x^3 + 3x$, el eje X y la recta $x = 1$.

EJERCICIO 3 (Puntuación máxima: **2 puntos**)

Sean A y B dos sucesos aleatorios tales que:

$$P(A) = \frac{3}{4} \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{1}{20}$$

Calcular:

$$P(A \cup B) \quad P(A \cap B) \quad P(\overline{A} / B) \quad P(\overline{B} / A)$$

EJERCICIO 4 (Puntuación máxima: **2 puntos**)

El tiempo invertido en cenar por cada cliente de una cadena de restaurantes es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica de 32 minutos. Se quiere estimar la media de dicho tiempo con un error no superior a 10 minutos, y con un nivel de confianza del 95 %.

Determinar el tamaño mínimo muestral necesario para poder llevar a cabo dicha estimación.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) Llamamos M a la matriz de los coeficientes y M^* a la matriz ampliada:

- Si $|M| = a^2 - a = 0 \rightarrow a = 0$ o $a = 1$
- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \rightarrow$ Rango (M) = Rango $(M^*) = 3 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado.
- Si $a = 0$, Rango $(M) = 2$, Rango $(M^*) = 3$ (M^* tiene un menor de orden 3 no nulo) $\rightarrow$ El sistema es incompatible.
- Si $a = 1$, Rango (M) = Rango $(M^*) = 2 \rightarrow$ y el sistema es compatible indeterminado.

b) • Si $a = 3$, resolvemos el sistema por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 = F_3 - F_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 = F_2 + F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + z = 1 \\ 3z = 2 \\ -2y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y = 0, \quad z = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad x = \frac{1}{3}$$

- Si $a = 1$, el sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 2 \end{array}\right\}$$

$$\lambda = z \rightarrow y = \frac{2 - \lambda}{2} \quad \text{y} \quad x = 1 - \frac{2 - \lambda}{2} - \lambda = \frac{\lambda - 2\lambda}{2} = -\frac{\lambda}{2}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO 2

a) Los valores que anulan el denominador son 2 y 1. Por tanto, el dominio es: Dom $f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)}$

- En $x = 1$, la función $f(x)$ no está definida en 1; por tanto, no existe $f(1)$, y como $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x-2} = -1$, se tiene que en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable.
- En $x = 2$: $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{2}{0}$

  Calculamos los límites laterales: $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = +\infty \quad \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = -\infty$

  En el punto $x = 2$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito.

c) Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = 1 \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = 1 \rightarrow y = 1$

Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = -1 \quad \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = -1 \rightarrow$ No tiene asíntota vertical en $x = 1$

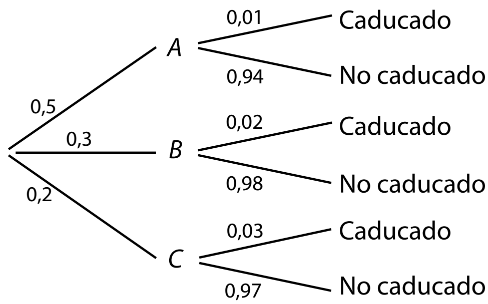
$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = +\infty \quad \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = -\infty \rightarrow x = 2$

Asíntotas oblicuas: $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2 - x}{x^3 - 3x^2 + 2x} = 0 \rightarrow$ No tiene asíntotas oblicuas.

EJERCICIO 3

a) $P(A) = 0{,}5$; $P(B) = 0{,}3$; $P(C) = 0{,}2$; $P(\text{Cad} / A) = 0{,}01$; $P(\text{Cad} / B) = 0{,}02$ y $P(\text{Cad} / C) = 0{,}03$

Construimos un diagrama de árbol:



Por el teorema de la probabilidad total:

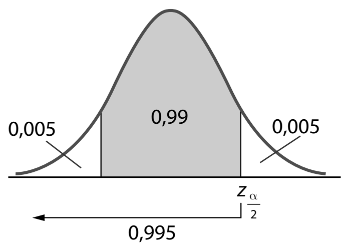
$P(\text{Cad}) = P(A) \cdot P(\text{Cad} / A) + P(B) \cdot P(\text{Cad} / B) \cdot P(C) \cdot P(\text{Cad} / C) = 0{,}5 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}2 \cdot 0{,}03 = 0{,}017$

b) Por el teorema de Bayes:

$$P(B \ / \ \text{Cad}) = \frac{P(\text{Cad} \ / \ B) \cdot P(B)}{P(\text{Cad})} = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}3}{0{,}017} = 0{,}352$$

EJERCICIO 4

a) $n = 100$; $\overline{x} = 1.248$; $N(\mu, 328)$, y a una confianza del 99 % le corresponde un valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58$.



El intervalo de confianza para la media será:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) =$$

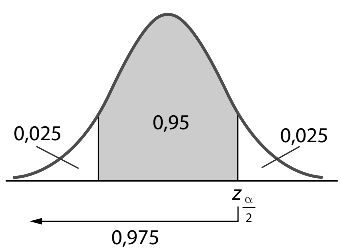
$$= \left(1.248 - 2{,}58 \cdot \frac{328}{\sqrt{100}}; \ 1.248 + 2{,}58 \cdot \frac{328}{\sqrt{100}}\right) = (1.163{,}37; \ 1.332{,}62)$$

b) El nivel de confianza es: $1 - \alpha = 0{,}95$ y el valor crítico obtenido en la tabla de la distribución normal es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

El error máximo es:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{328}{\sqrt{n}} = 127$$

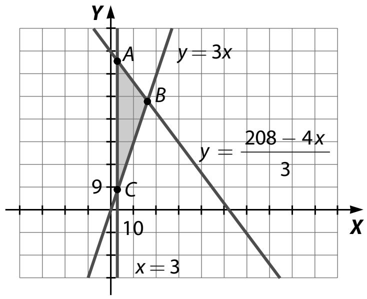
$$n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 328}{127}\right)^2 = 25{,}62$$



Por tanto, el tamaño de la muestra mínimo debe ser, al menos, de 26 comercios.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1



Sean $x =$ «Número de filas de clase preferente» e $y =$ «Número de filas de clase turista».

Planteamos el sistema de inecuaciones, dibujamos la región factible y calculamos sus vértices:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 1{,}5y \leq 104 \\ x \geq 3 \\ y \geq 3x \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{104 - 2x}{1{,}5} = \dfrac{208 - 4x}{3} \\ x = 3 \\ y = 3x \end{array}\right.$$

Los vértices de la región factible son:

$$A\left(3, \frac{196}{3}\right), B(16, 48) \text{ y } C(3, 9).$$

La función beneficio es:

$$f(x, y) = 206x + 152y$$

Estudiamos cómo se comportan los vértices de la región factible:

$$f\left(3, \frac{196}{3}\right) = 10.548{,}67 \quad f(16, 48) = 10.592 \quad f(3, 9) = 1.986$$

Para obtener el beneficio máximo se deben instalar 16 filas de clase preferente y 48 filas de clase turista. El beneficio será de 10.592 €.

EJERCICIO 2

a) Por pasar por $(0, 0) \rightarrow f(0) = c = 0 \rightarrow f(x) = ax^3 + bx^2$

Como tiene un máximo en $(1, 2) \rightarrow f(1) = 2 \rightarrow a + b = 2$

$f'(1) = 0 \rightarrow f'(1) = 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 = 0 \rightarrow 0 = 3a + 2b$

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 2 \\ 3a + 2b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3a + 3b = 6 \\ 3a + 2b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow b = 6 \text{ y } a = -4$$

Por tanto, la función es $f(x) = -4x^3 + 6x^2$ y los coeficientes son: $a = -4$, $b = 6$ y $c = 0$.

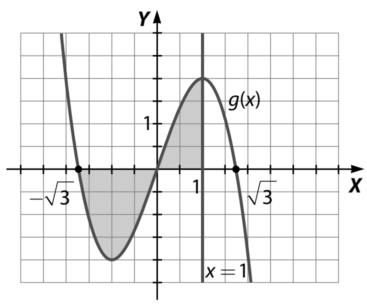
b) La función $g(x) = -x^3 + 3x$ corta a los ejes cuando:

$$-x^3 + 3x = 0 \rightarrow x = 0, x = -\sqrt{3} \text{ y } x = \sqrt{3}$$

Calculamos los máximos y mínimos:

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ y } x = -1$$

$$f''(x) = -6x \quad f''(1) < 0 \quad f''(-1) > 0$$



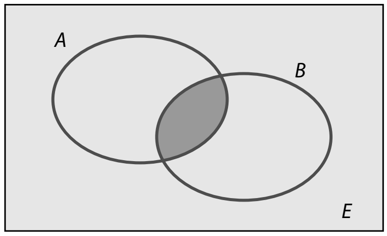
Por tanto, tiene un punto máximo en $(1, 2)$ y un punto mínimo en $(-1, -2)$.

Nos ayudamos con la gráfica para calcular el área pedida:

$$\text{Área} = \left| \int_{-\sqrt{3}}^{0} (-x^3 + 3x)\, dx \right| + \int_{0}^{1} (-x^3 + 3x)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} \right]_{-\sqrt{3}}^{0} + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} \right]_{0}^{1} = \frac{9}{4} + \frac{5}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \text{ u}^2$$

EJERCICIO 3



$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} = 0{,}95$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{19}{20} = \frac{6}{20} = 0{,}3$$

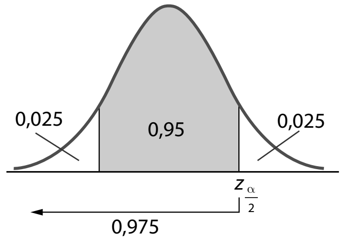
$$P(\bar{A} / B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}5 - 0{,}3}{0{,}5} = 0{,}4$$

$$P(\bar{B} / A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}75 - 0{,}3}{0{,}75} = 0{,}6$$

Las igualdades utilizadas pueden deducirse del diagrama de Venn.

EJERCICIO 4

El nivel de confianza es: $1 - \alpha = 0{,}95$ y el valor crítico obtenido en la tabla de la distribución normal es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$



El error máximo es: $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{32}{\sqrt{n}} = 10$

Calculamos el valor de n: $n = \left(\frac{1{,}96 \cdot 32}{10} \right)^2 = 39{,}33$

El tamaño mínimo muestral para llevar a cabo dicha estimación ha de ser de 40 minutos.

Criterios específicos de corrección:

OPCIÓN A

EJERCICIO 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Discusión correcta del sistema: 1 punto.
Resolución correcta para $a = 3$: 1 punto.
Resolución correcta para $a = 1$: 1 punto.

EJERCICIO 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Por cada apartado correctamente resuelto: 1 punto.

EJERCICIO 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Por cada apartado correctamente resuelto: 1 punto.

EJERCICIO 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Por cada apartado correctamente resuelto: 1 punto.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Deducción correcta de la función objetivo: 0,5 puntos.
Expresión correcta de las inecuaciones: 0,5 puntos.
Determinación correcta de la región factible: 1 punto.
Localización del punto óptimo: 0,5 puntos.
Valor del óptimo: 0,5 puntos.

EJERCICIO 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)
Apartado a): 2 puntos. Apartado b): 1 punto.

EJERCICIO 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Por cada probabilidad correctamente resuelta: 0,5 puntos.

EJERCICIO 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)
Planteamiento correcto: 0,5 puntos.
Obtención correcta del tamaño muestral: 1,5 puntos.

Enunciado de la prueba

(Junio de 2007)

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

Instrucciones: El examen presenta dos opciones A y B; el alumno deberá elegir una de ellas y contestar razonadamente a los cuatro ejercicios de que consta dicha opción. Para la realización de esta prueba puede utilizarse calculadora científica, siempre que no disponga de capacidad de representación gráfica o de cálculo simbólico.

Tiempo: Una hora y treinta minutos.

Calificación: La puntuación máxima de cada ejercicio se indica en el encabezamiento del mismo.

OPCIÓN A

EJERCICIO 1 (Puntuación máxima: **3 puntos**)

Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependiente de parámetro real a:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ 3x + 2y - 2z &= 3 \\ 2x + 2y + az &= 8 \end{aligned}\right\}$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = 4$.

EJERCICIO 2 (Puntuación máxima: **3 puntos**)

Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3}$$

a) Determinar las asíntotas de la función.

b) Calcular sus máximos y mínimos y determinar sus intervalos de crecimiento.

EJERCICIO 3 (Puntuación máxima: **2 puntos**)

Según cierto estudio, el 40 % de los hogares europeos tiene contratado el acceso a Internet, el 33 % tiene contratada la televisión por cable, y el 20 % dispone de ambos servicios.
Se selecciona un hogar europeo al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que solo tenga contratada la televisión por cable?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

EJERCICIO 4 (Puntuación máxima: **2 puntos**)

La edad a la que contraen matrimonio los hombres de la Isla Barataria es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal de media 35 años y desviación típica de 5 años. Se elige aleatoriamente una muestra de 100 hombres de dicha isla. Sea $\overline{x}$ la media muestral de la edad de casamiento.

a) ¿Cuáles son la media y la varianza de $\overline{x}$?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la edad media de casamiento de la muestra esté comprendida entre 36 y 37 años?

OPCIÓN B

EJERCICIO 1 (Puntuación máxima: **3 puntos**)

Una empresa de instalaciones dispone de 195 kg de cobre, 20 kg de titanio y 14 kg de aluminio. Para fabricar 100 metros de cable de tipo *A* se necesitan 10 kg de cobre, 2 de titanio y 1 de aluminio, mientras que para fabricar 100 metros de cable de tipo *B* se necesitan 15 kg de cobre, 1 de titanio y 1 de aluminio. El beneficio que se obtiene por 100 metros de cable de tipo *A* es de 1.500 €, y por 100 metros de cable de tipo *B*, 1.000 €.

Calcular los metros de cable de cada tipo que hay que fabricar para maximizar el beneficio de la empresa. Obtener dicho beneficio máximo.

EJERCICIO 2 (Puntuación máxima: **3 puntos**)

Representar gráficamente la región acotada limitada por las gráficas de las funciones:

$$f(x) = \frac{5}{4}x^2 \qquad g(x) = \frac{1}{2}(5x + 20) \qquad h(x) = \frac{1}{2}(-5x + 20)$$

y obtener su área.

EJERCICIO 3 (Puntuación máxima: **2 puntos**)

Los pianistas de Isla Sordina se forman en tres conservatorios, C1, C2 y C3, que forman el 40 %, 35 % y 25 % de los pianistas, respectivamente. Los porcentajes de pianistas virtuosos que producen estos conservatorios son del 5 %, 3 % y 4 %, respectivamente.
Se selecciona un pianista al azar:

a) Calcular la probabilidad de que sea virtuoso.

b) El pianista resulta ser virtuoso. Calcular la probabilidad de que se haya formado en el primer conservatorio (C1).

EJERCICIO 4 (Puntuación máxima: **2 puntos**)

La duración de las rosas conservadas en agua en un jarrón es una variable aleatoria que se puede aproximar por una distribución normal con una desviación típica de 10 horas. Se toma una muestra aleatoria simple de 10 rosas y se obtienen las siguientes duraciones (en horas):

57 49 70 40 45 44 49 32 55 45

Hallar un intervalo de confianza al 95 % para la duración media de las rosas.

Resolución de la prueba (Junio de 2007)

OPCIÓN A

EJERCICIO 1

a) Escribimos la matriz de los coeficientes M y la matriz ampliada M^*:

$$\left|M\right| = 8a + 14 = 0 \rightarrow a = -\frac{14}{8} = -\frac{7}{4}$$

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

- Si $a \neq -\frac{7}{4}$, entonces Rango $(M) = 3 =$ Rango $(M^*) =$ n.º de incógnitas $\rightarrow$ El sistemas es compatible determinado.
- Si $a = -\frac{7}{4}$, entonces Rango $(M) = 2 \neq$ Rango (M^*) (M^* tiene un menor de orden 3 no nulo) $\rightarrow$ El sistema es incompatible.

b) $$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + 2y + 4z = 8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2y + x + z = 0 \\ 2y + 3x - 2z = 3 \\ 2y + 2x + 4z = 8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2y + x + z = 0 \\ 4x - z = 3 \\ 3x + 5z = 8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} -2y + x + z = 0 \\ 4x - z = 3 \\ 23x = 23 \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{23}{23} = 1 \rightarrow 4x - z = 3 \rightarrow 4 - z = 3 \rightarrow z = 1$$

$$-2y + x + z = 0 \rightarrow -2y + 1 + 1 = 0 \rightarrow -2y = -2 \rightarrow y = 1$$

EJERCICIO 2

a) Asíntotas verticales:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^+} \frac{(x-3)^2}{x+3} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^-} \frac{(x-3)^2}{x+3} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{En } x = -3 \text{ hay una asíntota vertical.}$$

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-3)^2}{x+3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{x+3} = \infty \rightarrow \text{No tiene asíntotas horizontales.}$$

Asíntotas oblicuas:

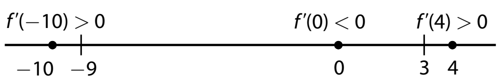
$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-3)^2}{x+3} : x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 3x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-3)^2}{x+3} - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 6x + 9 - x^2 - 3x}{x+3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-9x + 9}{x+3} = -9$$

La recta $y = x - 9$ es una asíntota oblicua.

b) Igualamos a cero la primera derivada y estudiamos su signo:

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2 \cdot (x-3) \cdot (x+3) - (x-3)^2}{(x+3)^2} = 0 \rightarrow \frac{x^2 + 6x - 27}{(x+3)^2} = 0 \rightarrow x^2 + 6x - 27 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ x = 3 \end{cases}$$



La función $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -9)$ y $(3, +\infty)$ y, decreciente en $(-9, -3)$ y $(-3, 3)$. Además, $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = -9$ y un mínimo relativo en $x = 3$.

EJERCICIO 3

Si definimos los siguientes sucesos: $I =$ «Hogar con acceso a Internet» y $T =$ «Hogar con televisión por cable», entonces:

$$P(I) = 0{,}4;\ P(T) = 0{,}33 \text{ y } P(I \cap T) = 0{,}2$$

a) $P(\overline{I} \cap \overline{I}) = P(T) - P(I \cap T) = 0{,}33 - 0{,}2 = 0{,}13$

b) $P(\overline{I} \cap \overline{T}) = P(\overline{I \cup T}) = 1 - P(I \cup T) = 1 - (P(I) + P(T) - P(I \cap T)) =$

$$= 1 - (0{,}4 + 0{,}33 - 0{,}2) = 1 - 0{,}53 = 0{,}47$$

EJERCICIO 4

Sea $X =$ «Edad a la que contraen matrimonio los hombres de la Isla Barataria»

Si $X \equiv N(35, 5)$, entonces $\overline{X} \equiv N\left(35, \dfrac{5}{\sqrt{100}}\right) = N(35; 0{,}5)$.

a) La media es 35 y la varianza es $0{,}5^2 = 0{,}25$.

b) $P(36 \le \overline{X} \le 37) = P\left(\dfrac{36-35}{0{,}5} \le Z \le \dfrac{37-35}{0{,}5}\right) = P(2 \le Z \le 4) =$

$$= P(Z \le 4) - P(Z \le 2) = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$$

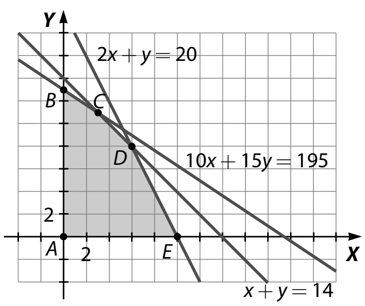
OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sean $x =$ «Metros de cable de tipo A» e $y =$ «Metros de cable de tipo B».

Escribimos las restricciones y dibujamos la región factible:

$$\left.\begin{array}{l} 10x + 15y \le 195 \\ 2x + y \le 20 \\ x + y \le 14 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$



Los vértices de la región factible son:

$A(0, 0)$, $B(0, 13)$, $C(3, 11)$, $D(6, 8)$ y $E(10, 0)$.

Si sustituimos los vértices en la función objetivo: $B(x, y) = 1.500x + 1.000y$, obtenemos:

$B(0, 0) = 0$
$B(0, 13) = 13.000$
$B(3, 11) = 15.500$
$B(6, 8) = 17.000$
$B(10, 0) = 15.000$

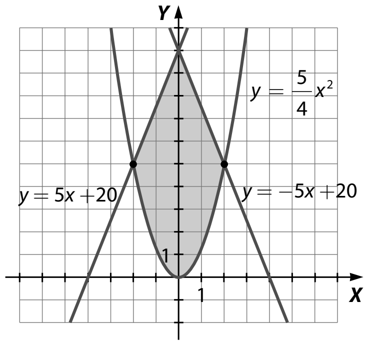
El beneficio máximo asciende a 17.000 € y se obtiene fabricando 600 metros de tipo A y 800 metros de tipo B.

EJERCICIO 2

La zona sombreada es la región acotada por las gráficas de las tres funciones.

Calculamos la intersección entre la parábola y una de las rectas:

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{5}{4}x^2 \\ y &= \frac{1}{2}(5x+20) \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{5}{4}x^2 = \frac{1}{2}(5x+20) \rightarrow x = -2 \rightarrow y = 5$$



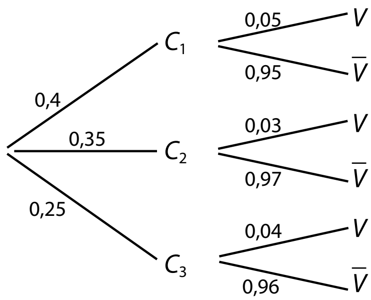
El otro punto de intersección es (4, 20).

$$A = 2 \cdot \left(\int_0^2 \frac{1}{2}(5x+20)dx - \int_0^2 \frac{5}{4}x^2\,dx \right) = 2 \cdot \left[\frac{1}{2}\left(\frac{5x^2}{2} + 20x\right) - \frac{5}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (10+40) - \frac{10}{3} \right] = \frac{130}{3}\ \text{u}^2$$

EJERCICIO 3

Definimos los siguientes sucesos: C_1 = «Pianista que se forma en el conservatorio C_2», C_2 = «Pianista que se forma en el conservatorio C_2», C_3 = «Pianista que se forma en el conservatorio C_3», V = «Pianista virtuoso» y $\overline{V}$ = «Pianista no virtuoso».

Con los datos del enunciado construimos el siguiente diagrama de árbol:



a) $P(V) = 0{,}4 \cdot 0{,}05 + 0{,}35 \cdot 0{,}03 + 0{,}25 \cdot 0{,}04 = 0{,}0405$

b) $P(C_1 / V) = \dfrac{P(V / C_1) \cdot P(C_1)}{P(V)} = \dfrac{0{,}05 \cdot 0{,}4}{0{,}0405} = 0{,}49$

EJERCICIO 4

La media de la muestra es $\overline{x} = 48{,}6$. Para un nivel de confianza del 95 % el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es 1,96.

Sustituyendo todos los datos en el intervalo se tiene que el intervalo de confianza para la media es:

$$\left(48{,}6 - 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{10}}; 48{,}6 + 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{10}}\right) = (42{,}4;\ 54{,}8)$$

Criterios específicos de corrección:

OPCIÓN A

EJERCICIO 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Discusión correcta del sistema: 2 puntos.

Resolución correcta para $a = 4$: 1 punto.

EJERCICIO 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Por cada apartado correctamente resuelto: 1,5 puntos.

EJERCICIO 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Por cada apartado correctamente resuelto: 1 punto.

EJERCICIO 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Por cada apartado correctamente resuelto: 1 punto.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Deducción correcta de la función objetivo: 0,5 puntos.

Expresión correcta de las inecuaciones: 0,5 puntos.

Determinación correcta de la región factible: 1 punto.

Localización del punto óptimo: 0,5 puntos.

Valor del óptimo: 0,5 puntos.

EJERCICIO 2. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Representación correcta: 1,5 puntos.

Obtención correcta del área: 1,5 puntos.

EJERCICIO 3. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Por cada apartado correctamente resuelto: 1 punto.

EJERCICIO 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Planteamiento correcto del intervalo: 1,5 puntos.

Obtención correcta del intervalo: 0,5 puntos.