REGIÓN DE MURCIA

Índice

Junio de 2008 246
Septiembre de 2007 252
Junio de 2007 258

Enunciados de las pruebas y criterios extraídos de la página web de la Universidad de Murcia:
http://www.um.es

Enunciado de la prueba

(Junio de 2008)

OBSERVACIONES IMPORTANTES

El alumno deberá responder a una sola de las dos cuestiones de cada uno de los bloques. La puntuación de las dos cuestiones de cada bloque es la misma y se indica en la cabecera del bloque. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan.

BLOQUE 1 [3 puntos]

CUESTIÓN 1

Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple que el número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.

a) Plantear un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

b) Resolver el problema.

CUESTIÓN 2

Un taller de bisutería produce sortijas sencillas a 4,50 € y sortijas adornadas a 6 €. Las máquinas condicionan la producción de modo que no pueden salir al día más de 400 sortijas sencillas, ni más de 300 adornadas, ni más de 500 en total.

a) ¿Cuántas unidades de cada modelo se pueden vender? Plantear el problema y representar gráficamente su conjunto de soluciones.

b) Suponiendo que se vende toda la producción, ¿cuántas unidades de cada clase interesará fabricar para obtener los máximos ingresos?

BLOQUE 2 [2 puntos]

CUESTIÓN 1

En una región, un río tiene la forma de la curva $y = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$ y es cortada por un camino según el eje X.

Hacer un esquema de la posición del río y del camino, calculando para la curva el corte con los ejes coordenados, extremos relativos e intervalos de crecimiento.

CUESTIÓN 2

Dada la curva $y = \frac{2x-1}{x+1}$, calcular:

a) Los puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas.

c) Hacer una representación gráfica de la misma.

BLOQUE 3 [1,5 puntos]

CUESTIÓN 1

Supongamos que tenemos un alambre de longitud a y lo queremos dividir en dos partes que van a servir de base a sendos rectángulos. En uno de los rectángulos su altura es el doble de su base y en el otro su altura es el triple de su base. Determinar el punto por el cual debemos cortar el alambre para que la suma de las áreas de los dos rectángulos sea mínima.

CUESTIÓN 2

Calcular el área limitada por la curva $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$, el eje X y las rectas de ecuaciones $x = 0$, $x = 3$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

BLOQUE 4 [2 puntos]

CUESTIÓN 1

Tres hombres A, B y C disparan a un objetivo. Las probabilidades de que cada uno de ellos alcance el objetivo son $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ respectivamente. Calcular:

a) La probabilidad de que todos alcancen el objetivo.
b) La probabilidad de que ninguno alcance el objetivo.
c) La probabilidad de que al menos uno de ellos alcance el objetivo.

CUESTIÓN 2

En una cierta facultad se sabe que el 25% de los estudiantes suspenden matemáticas, el 15% suspenden química y el 10% suspenden matemáticas y química. Se selecciona un estudiante al azar.

a) Calcular la probabilidad de que el estudiante no suspenda química ni matemáticas.
b) Si sabemos que el estudiante ha suspendido química, ¿cuál es la probabilidad de que suspenda también matemáticas?

BLOQUE 5 [1,5 puntos]

CUESTIÓN 1

El peso medio de los paquetes de café puestos a la venta por cierta casa comercial es supuestamente de 1 kg. Para comprobar esta suposición, elegimos una muestra aleatoria simple de 100 paquetes y encontramos que su peso medio es de 0,978 kg. Suponiendo que la distribución del peso de los paquetes de café es normal y la desviación típica de la población es de 0,10 kg. ¿Es compatible este resultado con la hipótesis nula H_0: $\mu = 1$ con un nivel de significación de 0,05? ¿Y con un nivel de significación de 0,01?

CUESTIÓN 2

La puntuación media obtenida por una muestra aleatoria simple de 81 alumnos de secundaria en el examen de cierta asignatura ha sido 25 puntos. Suponiendo que la distribución de las puntuaciones de la población es normal con desviación típica igual a 20,25 puntos, calcular el intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de significación de 0,01.

Resolución de la prueba (Junio de 2008)

BLOQUE 1

CUESTIÓN 1

a) Sean x, y y z el número de hombres, mujeres y niños reunidos, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ x+y=3z \\ y+1=x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ x+y-3z=0 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$$

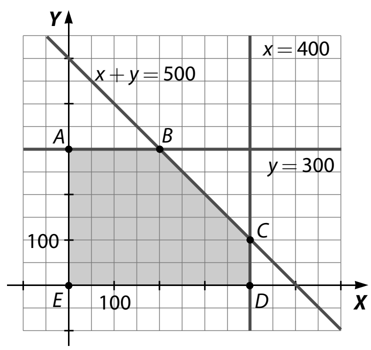
b) $$\left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ x+y-3z=0 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=20 \\ 4z=20 \\ 2y+z=19 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=8 \\ y=7 \\ z=5 \end{array}\right.$$

Luego se han reunido 8 hombres, 7 mujeres y 5 niños.

CUESTIÓN 2

a) Sean x e y el número de sortijas sencillas y adornadas, respectivamente.

La función que hay que maximizar es: $f(x,\ y) = 4{,}5x + 6y$



Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{r} 0 \le x \le 400 \\ 0 \le y \le 300 \\ x+y \le 500 \end{array}\right\}$$

El conjunto de soluciones está formado por los puntos de coordenadas enteras determinados por el polígono de vértices:

$A(0, 300)$, $B(200, 300)$, $C(400, 100)$, $D(400, 0)$ y $E(0, 0)$

b) Al sustituir las coordenadas de estos puntos en la función objetivo:

$f(0, 300) = 1.800$
$f(200, 300) = 2.700$
$f(400, 100) = 2.400$
$f(400, 0) = 1.800$
$f(0, 0) = 0$

Luego interesa fabricar 200 sortijas sencillas y 300 sortijas adornadas para obtener los ingresos máximos, que son 2.700 €.

BLOQUE 2

CUESTIÓN 1

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{4}x^3 - x^2 + x \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y = 0 \rightarrow (0,\ 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{4}x^3 - x^2 + x \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \rightarrow (0,\ 0) \\ x = 2 \rightarrow (2,\ 0) \end{array}\right.$$

$$y' = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1$$

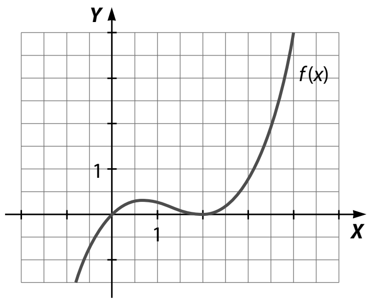
$$\frac{3}{4}x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$y'' = \frac{3}{2}x - 2$$

$f''(2) = 1 > 0 \rightarrow$ En $x = 2$ hay un mínimo.

$f''\left(\dfrac{2}{3}\right) = -1 < 0 \rightarrow$ En $x = \dfrac{2}{3}$ hay un máximo.

Así, la función es creciente en $\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty)$ y es decreciente en $\left(\dfrac{2}{3}, 2\right)$.



CUESTIÓN 2

a) $$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{2x-1}{x+1} \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{2x-1}{x+1} \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{2x-1}{x+1} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

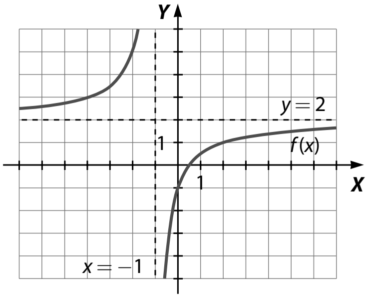
b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2x-1}{x+1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2x-1}{x+1} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2 \rightarrow y = 2 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

c)



BLOQUE 3

CUESTIÓN 1

Sea x la medida de la base de un rectángulo. Entonces la base del otro rectángulo mide: $a - x$.

La función que expresa la suma de las áreas es:

$$f(x) = x \cdot 2x + (a - x) \cdot 3(a - x) = 5x^2 - 6ax + 3a^2$$
$$f'(x) = 10x - 6a$$
$$10x - 6a = 0 \rightarrow x = \frac{3}{5}a$$
$$f''(x) = 10 > 0 \rightarrow \text{En } x = \frac{3}{5}a \text{ hay un mínimo.}$$

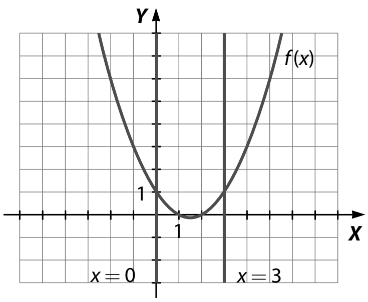
Luego el alambre debe cortarse de forma que tres quintas partes del mismo determinan la base de un rectángulo, y las dos quintas partes restantes, la base del otro.

CUESTIÓN 2

$$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{3}{2}x + 1 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \rightarrow (1,\ 0) \\ x = 2 \rightarrow (2,\ 0) \end{cases}$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) dx + \int_2^3 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) dx =$$

$$= \left|\left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x\right]_1^2\right| + \left|\left[\frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x\right]_2^3\right| = \frac{5}{12} + \frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{11}{12}\ \text{u}^2$$



BLOQUE 4

CUESTIÓN 1

a) Como los disparos son independientes:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{72}$$

b) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{12}$

c) $P(\text{al menos uno acierte}) = 1 - P(\text{no acierte ninguno}) = 1 - \dfrac{5}{12} = \dfrac{7}{12}$

CUESTIÓN 2

Sean los sucesos:

$M =$ «Suspender matemáticas»

$Q =$ «Suspender química»

a) $P(\overline{M} \cap \overline{Q}) = 1 - P(M \cup Q) = 1 - (P(M) + P(Q) - P(M \cap Q)) = 1 - (0{,}25 + 0{,}15 - 0{,}1) = 0{,}7$

b) $P(M/Q) = \dfrac{P(M \cap Q)}{P(Q)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}15} = \dfrac{2}{3}$

BLOQUE 5

CUESTIÓN 1

$n = 100;\ \overline{x} = 0{,}978;\ \sigma = 0{,}1$

Como contraste es bilateral:

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \mu = 1 \\ H_1\colon \mu \neq 1 \end{array}\right\}$$

Para un nivel de significación del 0,05: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

Se admite la hipótesis nula si $\left|\overline{x} - \mu_0\right| < z_\alpha \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Como $\left|0{,}978 - 1\right| = 0{,}022 > 1{,}96 \cdot \dfrac{0{,}1}{\sqrt{100}} = 0{,}0196$; se rechaza la hipótesis nula.

Si el nivel de significación es 0,01: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58$

Al ser $\left|0{,}978 - 1\right| = 0{,}022 < 2{,}58 \cdot \dfrac{0{,}1}{\sqrt{100}} = 0{,}0258$; se acepta la hipótesis nula.

CUESTIÓN 2

$n = 81;\ \overline{x} = 25;\ \sigma = 20{,}25$

Si $\alpha = 0{,}01 \to \dfrac{\alpha}{2} = 0{,}005 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58$

Por tanto, el intervalo correspondiente es:

$$\left(25 - 2{,}58 \cdot \frac{20{,}25}{\sqrt{81}};\ 25 + 2{,}58 \cdot \frac{20{,}25}{\sqrt{81}}\right) = (19{,}19;\ 30{,}81)$$

Criterios específicos de corrección:

BLOQUE 1: Hasta 3 puntos.

BLOQUE 2: Hasta 2 puntos.

BLOQUE 3: Hasta 1,5 puntos.

BLOQUE 4: Hasta 2 puntos.

BLOQUE 5: Hasta 1,5 puntos.

Enunciado de la prueba (Septiembre de 2007)

OBSERVACIONES IMPORTANTES

El alumno deberá responder a una sola de las dos cuestiones de cada uno de los bloques. La puntuación de las dos cuestiones de cada bloque es la misma y se indica en la cabecera del bloque. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan.

BLOQUE 1 [3 puntos]

CUESTIÓN 1

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcular dos números reales x e y tales que se verifique

$A + xA + yI = 0$, siendo I la matriz unidad de orden 2 y 0 la matriz nula de orden 2.

CUESTIÓN 2

En un taller de chapa se pueden fabricar dos tipos de carrocerías A y B. Cada carrocería de tipo A necesita 4 horas de pintura y cada carrocería de tipo B necesita 6 horas de pintura, disponiéndose de un máximo de 500 horas mensuales para la pintura de las carrocerías. Si los beneficios de cada carrocería son de 2.000 € y 3.500 € para los tipos A y B respectivamente:

a) Calcular el número de carrocerías de cada tipo que deben producirse para obtener el máximo beneficio si tienen que fabricar un mínimo de 80 y un máximo de 100 carrocerías de tipo A.

b) ¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?

BLOQUE 2 [2 puntos]

CUESTIÓN 1

Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$, se pide:

a) Calcular su dominio.

b) Calcular sus asíntotas.

c) Determinar los máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Hacer su representación gráfica aproximada.

CUESTIÓN 2

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 2 \\ x+3 & \text{si } x > 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$

a) Representarla gráficamente.

b) Estudiar su continuidad y en caso de que exista algún tipo de discontinuidad, decir de qué tipo de discontinuidad se trata.

BLOQUE 3 [1,5 puntos]

CUESTIÓN 1

Encontrar un número tal que al restarle su cuadrado la diferencia sea máxima.

CUESTIÓN 2

Hallar el área limitada por las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = -x + 2$.

BLOQUE 4 [2 puntos]

CUESTIÓN 1

Se propone a Juan y a Pedro la resolución de un problema. Se estima, en función de sus evaluaciones, que la probabilidad de que resuelvan el problema de forma independiente es de $\frac{1}{3}$ para Juan y de $\frac{1}{4}$ para Pedro.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el problema sea resuelto por alguno de los dos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea resuelto por ninguno?

CUESTIÓN 2

El volumen diario de producción en tres plantas diferentes de una fábrica es de 500 unidades en la primera, 1.000 unidades en la segunda y 2.000 unidades en la tercera. Sabiendo que el porcentaje de unidades defectuosas producidas en cada planta es del 1 %, 0,8 % y 2 % respectivamente. Calcular la probabilidad de que al seleccionar una unidad al azar sea defectuosa.

BLOQUE 5 [1,5 puntos]

CUESTIÓN 1

Un directivo de cierta empresa de material eléctrico afirma que la vida media de cierto tipo de bombillas es de 1.500 horas. Otro directivo de la misma empresa afirma que la vida media de dichas bombillas es igual o menor de 1.500 horas. Elegida una muestra aleatoria simple de 81 bombillas de dicho tipo, vemos que su vida media ha sido de 1.450 horas. Suponiendo que la vida de las bombillas sigue una distribución normal con desviación típica igual a 180 horas:

a) ¿Es compatible la hipótesis H_0: $\mu = 1.500$, frente a la hipótesis H_1: $\mu \neq 1.500$ con una confianza del 99 %, con el resultado experimental $\bar{x} = 1.450$?
b) ¿Es compatible la hipótesis H_0: $\mu = 1.500$, frente a la hipótesis H_1: $\mu < 1.500$ con una confianza del 99 %, con el resultado experimental $\bar{x} = 1.450$?

CUESTIÓN 2

Supongamos una población $N(\mu, \sigma = 8)$. Se extrae de ella una muestra aleatoria simple. Si se sabe que la probabilidad de cometer un error de 3,92 o más al estimar la media μ mediante la media muestral es de 0,05, ¿qué tamaño ha de tener la muestra?

BLOQUE 1

CUESTIÓN 1

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x & x \\ 2x & 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2x+y & x \\ 2x & 3x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \left.\begin{matrix} 2x+y=-2 \\ x=-1 \\ 2x=-2 \\ 3x+y=-3 \end{matrix}\right\} \rightarrow x=-1 \text{ e } y=0$$

CUESTIÓN 2

a) Sean $x =$ «Número de carrocerías del tipo A» e $y =$ «Número de carrocerías del tipo B».

Según indica el enunciado, ha de cumplirse: $\left.\begin{matrix} 4x + 6y \le 500 \\ 80 \le x \le 100 \end{matrix}\right\}$

Dibujamos la región factible, hallamos sus vértices y analizamos la función objetivo:

$$f(x,\ y) = 2.000x + 3.500y$$

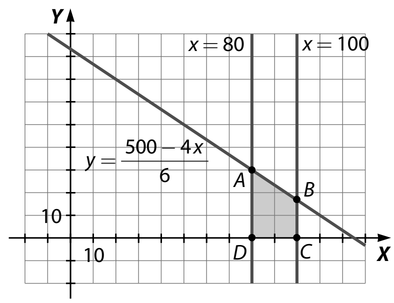
Las rectas que generan la región son: $y = \dfrac{500-4x}{6}$, $x = 80$ y $x = 100$.

Vértice A:

$$\left.\begin{matrix} y = \dfrac{500-4x}{6} \\ x = 80 \end{matrix}\right\} \rightarrow A(80,\ 30)$$

Vértice B:

$$\left.\begin{matrix} y = \dfrac{500-4x}{6} \\ x = 100 \end{matrix}\right\} \rightarrow B(100;\ 16,\widehat{6})$$



Vértice C: $C(100, 0)$ Vértice D: $D(80, 0)$

$f(80, 30) = 2.000 \cdot 80 + 3.500 \cdot 30 = 265.000$

$f(100;\ 16,\widehat{6}) = 2.000 \cdot 100 + 3.500 \cdot \dfrac{50}{3} = 258.333,\widehat{3}$

$f(100,\ 0) = 2.000 \cdot 100 = 200.000$

$f(80,\ 0) = 2.000 \cdot 80 = 160.000$

Han de producirse 80 carrocerías del tipo A y 30 carrocerías del tipo B para que el beneficio sea máximo.

b) El beneficio máximo obtenido es de 265.000 €.

BLOQUE 2

CUESTIÓN 1

a) Dominio: Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

b) • Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{2-x} = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{2-x} = -1 \rightarrow y = -1$$

- Asíntotas verticales:

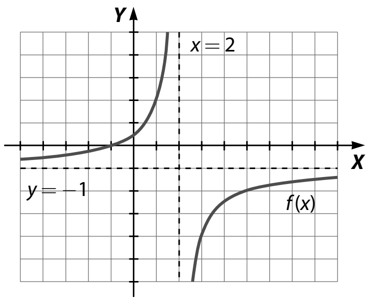
  El denominador se anula en $x = 2$; $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+1}{2-x} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+1}{2-x} = +\infty \rightarrow x = 2$

- Asíntotas oblicuas: no tiene.

c) $f'(x) = \dfrac{(2-x)-(x+1)(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{3}{(2-x)^2}$. Como $f(x)$ nunca se anula, no tiene máximos ni mínimos.

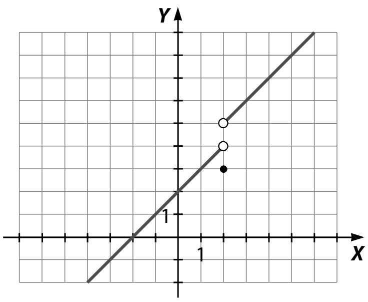
Al ser $\dfrac{3}{(2-x)^2} > 0$, la función es creciente en todo su dominio.

d) Los puntos de corte con los ejes son: $(-1, 0)$ y $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.



CUESTIÓN 2

a)



b) Las funciones que definen $f(x)$ son continuas en todo su dominio.

Estudiamos el comportamiento de la función en $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x+3) = 5 \text{ y } \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x+2) = 4$$

Por tanto, $x = 2$ es un punto de discontinuidad inevitable.

BLOQUE 3

CUESTIÓN 1

Llamando x al número, la función que hay que maximizar es: $f(x) = x - x^2$

$$f'(x) = 1 - 2x \quad \text{y} \quad f''(x) = -2$$

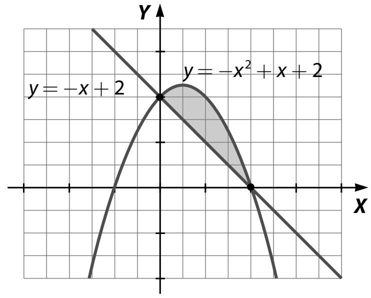
Si $f'(x) = 0 \rightarrow 1 - 2x = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{2}$, y como $f''\left(\dfrac{1}{2}\right) = -2 < 0$, en el punto

$x = \dfrac{1}{2}$ hay un máximo y $\dfrac{1}{2}$ es el número pedido.

CUESTIÓN 2

Hallamos los puntos de corte de la parábola con la recta:

$-x^2 + x + 2 = -x + 2 \rightarrow -x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = 2$



$$\text{Área} = \int_0^2 \left[(-x^2 + x + 2) - (-x + 2)\right] dx =$$

$$= \int_0^2 (-x^2 + 2x)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{-8}{3} + \frac{8}{2} = \frac{4}{3} \text{ u}^2$$

BLOQUE 4

CUESTIÓN 1

a) Sean los sucesos J = «Juan resuelve el problema» y P = «Pedro resuelve el problema».

$$P(\text{el problema sea resuelto por alguno de los dos}) = P(J \cup P) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

b) $P(\bar{J} \cap \bar{P}) = P(\overline{J \cup P}) = 1 - P(J \cup P) = \dfrac{1}{2}$

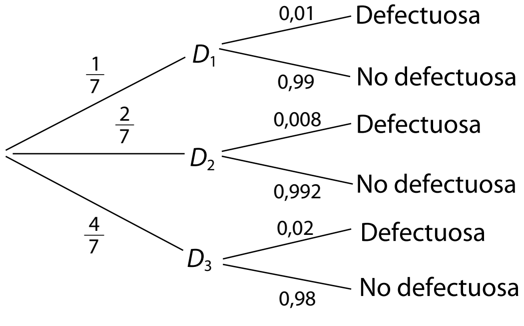
CUESTIÓN 2

Consideramos los siguientes sucesos: $D1$ = «Unidad defectuosa de la primera planta», $D2$ = «Unidad defectuosa de la segunda planta» y $D3$ = «Unidad defectuosa de la tercera planta».

$$P(\text{unidad elegida de la primera planta}) = \frac{500}{3.500} = \frac{1}{7}$$

$$P(\text{unidad elegida de la segunda planta}) = \frac{1.000}{3.500} = \frac{2}{7}$$

$$P(\text{unidad elegida de la tercera planta}) = \frac{2.000}{3.500} = \frac{4}{7}$$



$P(\text{al seleccionar una sea defectuosa}) = P(D1 \cup D2 \cup D3) = P(D1) + P(D2) + P(D3) =$

$$= \frac{1}{7} \cdot 0{,}01 + \frac{2}{7} \cdot 0{,}008 + \frac{4}{7} \cdot 0{,}02 = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$$

BLOQUE 5

CUESTIÓN 1

a) Formulamos las siguientes hipótesis:

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \mu = 1.500 = \mu_0 \\ H_1\colon \mu \neq 1.500 \end{array}\right\}$$

Al ser el contraste bilateral, la región de aceptación es:

$$(-z_{\frac{\alpha}{2}};\ z_{\frac{\alpha}{2}}) = (-2{,}58;\ 2{,}58)$$

El estadístico de contraste es:

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1.450 - 1.500}{\frac{180}{\sqrt{81}}} = -2{,}5$$

Como $-2{,}5 \in (-2{,}58; 2{,}58)$, aceptamos la hipótesis nula, y existe evidencia suficiente de que la vida media de las bombillas es de 1.500 horas.

b) En este caso, las hipótesis son:

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon \mu = 1.500 \\ H_1\colon \mu < 1.500 \end{array}\right\}$$

El contraste es unilateral y la región de aceptación para $\alpha = 0{,}01$ es $(-2{,}33; +\infty)$.

El estadístico de contraste, calculado en el apartado anterior, es $z = -2{,}5$.

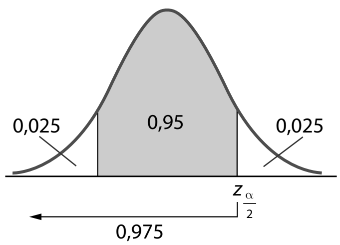
Como $-2{,}5 \notin (-2{,}33; +\infty)$, rechazamos la hipótesis nula.

CUESTIÓN 2

El nivel de confianza es $1 - \alpha = 0{,}95$; le corresponde $\alpha = 0{,}05$ y el valor crítico según la tabla de la distribución normal es $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$.

El error máximo viene dado por:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} \geq 3{,}92$$



Despejamos n:

$$n \leq \left(\frac{1{,}96 \cdot 8}{3{,}92}\right)^2 = 4^2 = 16$$

Por tanto, el tamaño de la muestra debe ser como mínimo de 16 elementos.

Criterios específicos de corrección:

BLOQUE 1: Hasta 3 puntos.	**BLOQUE 3:** Hasta 1,5 puntos.	**BLOQUE 5:** Hasta 1,5 puntos.
BLOQUE 2: Hasta 2 puntos.	**BLOQUE 4:** Hasta 2 puntos.	

Enunciado de la prueba (Junio de 2007)

OBSERVACIONES IMPORTANTES

El alumno deberá responder a una sola de las dos cuestiones de cada uno de los bloques. La puntuación de las dos cuestiones de cada bloque es la misma y se indica en la cabecera del bloque. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan.

BLOQUE 1 [3 puntos]

CUESTIÓN 1

Calcular la matriz inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

CUESTIÓN 2

Una fábrica de bombones tiene almacenados 500 kg de chocolate, l00 kg de almendras y 85 kg de frutas. Produce dos tipos de cajas de bombones: tipo A y tipo B. Cada caja de tipo A contiene 3 kg de chocolate, l kg de almendras y l kg de frutas, mientras que cada caja de tipo B contiene 2 kg de chocolate, 1,5 kg de almendras y l kg de frutas. Los precios de las cajas de tipo A y B son 130 € y 135 € respectivamente.

a) ¿Cuántas cajas debe fabricar de cada tipo para maximizar su ganancia?

b) ¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?

BLOQUE 2 [2 puntos]

CUESTIÓN 1

Dada la función: $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$, se pide

a) Calcular su dominio.

b) Calcular sus asíntotas.

c) Determinar los máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Hacer su representación gráfica aproximada.

CUESTIÓN 2

Cierto artículo se vende a un precio u otro según la cantidad comprada, de acuerdo con los siguientes datos:

$$\begin{array}{lll} \text{a } 10 \text{ € el kg} & \text{si} & 0 \le x < 5 \\ \text{a } 9 \text{ € el kg} & \text{si} & 5 \le x < 10 \\ \text{a } 7 \text{ € el kg} & \text{si} & 10 \le x < 20 \\ \text{a } 5 \text{ € el kg} & \text{si} & 20 \le x \end{array}$$

donde x es el peso en kg de la cantidad comprada.

a) Escribir la función que representa el precio del artículo.

b) Hacer su representación gráfica.

c) Estudiar su continuidad.

BLOQUE 3 [1,5 puntos]

CUESTIÓN 1

Hallar dos números cuya suma sea 20 sabiendo que su producto es máximo.

CUESTIÓN 2

Hallar el área limitada por las curvas $y = x^2 - 4$ e $y = 4 - x^2$.

BLOQUE 4 [2 puntos]

CUESTIÓN 1

Un ordenador personal está contaminado por un virus y tiene cargado dos programas antivirus que actúan independientemente el uno del otro. El programa P_1 detecta la presencia del virus con una probabilidad de 0,9 y el programa P_2 detecta el virus con una probabilidad de 0,8.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el virus no sea detectado por ninguno de los dos programas antivirus?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un virus que ha sido detectado por el programa P_1 sea detectado también por el programa P_2?

CUESTIÓN 2

Los gerentes de unos grandes almacenes han comprobado que el 40 % de los clientes paga sus compras con tarjeta de crédito y el 60 % restante lo hace en efectivo. Ahora bien, si el importe de la compra es superior a 100 €, la probabilidad de pagar con tarjeta pasa a ser 0,6. Si además sabemos que en el 30 % de las compras el importe es superior a 100 €, calcular:

a) Probabilidad de que un importe sea superior a 100 € y sea abonado con tarjeta.

b) Probabilidad de que un importe sea superior a 100 €, sabiendo que fue abonado en efectivo.

BLOQUE 5 [1,5 puntos]

CUESTIÓN 1

El nivel medio de protombina en una población normal es de 20 mg/100 ml de plasma con una desviación típica de 4 mg/100 ml. Se toma una muestra de 40 individuos en los que la media es de 18,5 mg/100 ml. ¿Es la muestra comparable con la población, con un nivel de significación de 0,05?

CUESTIÓN 2

El peso de los niños varones a las 10 semanas de vida se distribuye según una normal con desviación típica de 87 g. ¿Cuántos datos son suficientes para estimar, con una confianza del 95 %, el peso medio de esa población con un error no superior a 15 g?

BLOQUE 1

CUESTIÓN 1

Primero hallamos el determinante de A para comprobar que es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 + 4 + 18 + 3 - 4 + 18 = 42$$

Calculamos la matriz de adjuntos:

$$\text{Adj}\,(A) = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 7 \\ 11 & -6 & 7 \\ 7 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Ahora hallamos su traspuesta:

$$\text{Adj}\,(A)^t = \begin{pmatrix} -1 & 11 & 7 \\ 12 & -6 & 0 \\ 7 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

Dividimos entre el valor del determinante de A y obtenemos su inversa:

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}\,(A)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{42} & \frac{11}{42} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}$$

CUESTIÓN 2

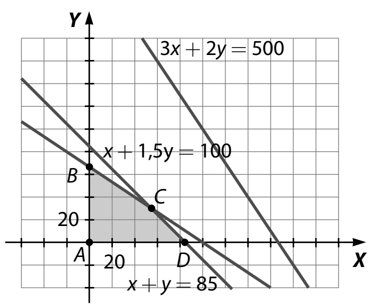
Establecemos las siguientes variables:

x = «Número de cajas de tipo A»

y = «Número de cajas de tipo B»

Definimos las restricciones y la región factible:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y \le 500 \\ x + 1{,}5y \le 100 \\ x + y \le 85 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$



Calculamos los vértices de la región factible:

Vértice A:

$A(0, 0)$

Vértice B:

$$\left.\begin{array}{l} x + 1{,}5y = 100 \\ x = 0 \end{array}\right\} \rightarrow B\left(0, \frac{200}{3}\right)$$

Vértice C:

$$\left.\begin{array}{l} x + 1{,}5y = 100 \\ x + y = 85 \end{array}\right\} \rightarrow C(55, 30)$$

Vértice D:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 85 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow D(85, 0)$$

Sustituimos los vértices de la región factible en la función objetivo: $B(x, y) = 130x + 135y$

$B(0, 0) = 0$ $\quad B(55, 30) = 11.200$

$B\left(0, \frac{200}{3}\right) = 9.000$ $\quad B(85, 0) = 11.050$

El beneficio máximo asciende a 11.200 € y se obtiene fabricando 55 cajas de tipo A y 30 cajas de tipo B.

BLOQUE 2

CUESTIÓN 1

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$

b) • Asíntotas verticales:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{2 - x}{x + 1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{2 - x}{x + 1} = -\infty \end{cases}$$

En $x = -1$ hay una asíntota vertical.

• Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 - x}{x + 1} = -1$$

En $y = -1$ hay una asíntota horizontal.

c) Derivamos y estudiamos el signo de la primera derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{-(x + 1) - (2 - x)}{(x + 1)^2} = \frac{-3}{(x + 1)^2} < 0 \text{ para cualquier valor de } x$$

La función $f(x)$ es siempre decreciente y no tiene máximos ni mínimos relativos.

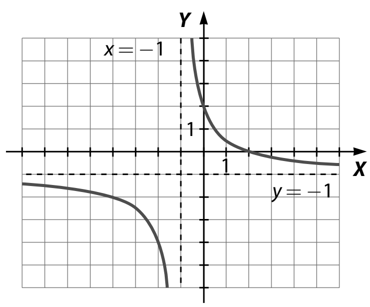
d) Calculamos los puntos de cortes con los ejes y dibujamos la función:

• Corte con el eje X:

$x = 0 \rightarrow f(x) = 2 \rightarrow (0, 2)$

• Corte con el eje Y:

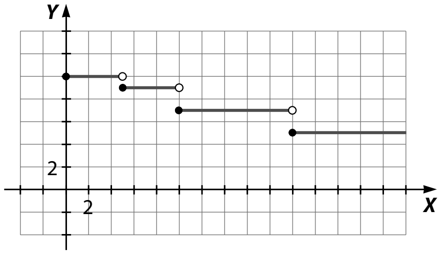
$$y = 0 \rightarrow \frac{2 - x}{x + 1} = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$$



CUESTIÓN 2

a) $f(x) = \begin{cases} 10 & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ 9 & \text{si } 5 \leq x < 10 \\ 7 & \text{si } 10 \leq x < 20 \\ 5 & \text{si } 20 \leq x \end{cases}$

b)



c) Estudiamos la continuidad de $f(x)$ en los puntos $x = 5$, $x = 10$ y $x = 20$:

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = 10 \neq 9 = \lim_{x \to 5^+} f(x)$$
$$\lim_{x \to 10^-} f(x) = 9 \neq 7 = \lim_{x \to 10^+} f(x)$$
$$\lim_{x \to 20^-} f(x) = 7 \neq 5 = \lim_{x \to 20^+} f(x)$$

La función $f(x)$ no es continua en los puntos $x = 5$, $x = 10$ y $x = 20$.

BLOQUE 3

CUESTIÓN 1

Lamamos a y b a los dos números. Estos números tienen que cumplir que el producto $a \cdot b$ sea máximo y que $a + b = 20$.

Construimos una función con una sola variable:

$$a + b = 20 \rightarrow a = 20 - b$$
$$f(b) = (20 - b) \cdot b = 20b - b^2$$

Derivamos e igualamos a cero la función $f(x)$:

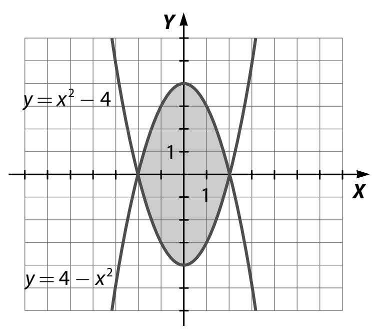
$$f'(x) = 20 - 2b$$
$$f'(b) = 0 \rightarrow 20 - 2b = 0 \rightarrow b \cdot (20 - 2b) = 0 \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 20 - 2b = 0 \rightarrow b = 10 \end{cases}$$

Los números que hacen máximo el producto son 10 y 10.

CUESTIÓN 2

El área que hay que calcular es la zona sombreada.

$$A = 4 \cdot \int_0^2 4 - x^2 \; dx = 4 \cdot \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 \cdot \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{64}{3} \text{ u}^2$$



BLOQUE 4

CUESTIÓN 1

De los datos del enunciado sabemos que:

$P(P_1) = 0{,}9$

$P(P_2) = 0{,}8$

a) Calculamos la probabilidad de que el virus no sea detectado por cada uno de los programas antivirus.

$P(\overline{P}_1) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$

$P(\overline{P}_2) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

Como los sucesos son independientes, se tiene que:

$P(\overline{P}_1 \cap \overline{P}_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$

b) Y como los dos programas antivirus son independientes, resulta que:

$P(P_2 \,/\, P_1) = P(P_2) = 0{,}8$

CUESTIÓN 2

Definimos los siguientes sucesos:

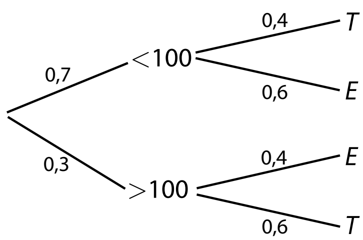
$T =$ «El cliente paga con tarjeta de crédito»

$E =$ «El cliente paga en efectivo»

$<100 =$ «La compra es inferior o igual a 100 €»

$>100 =$ «La compra es superior a 100 €»

Con los datos del problema construimos el siguiente diagrama de árbol:



a) $P(>100 \cap T) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$

b) $P(>100 \,/\, E) = \dfrac{P(>100 \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}4}{0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}4} = 0{,}\widehat{22}$

BLOQUE 5

CUESTIÓN 1

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Para un nivel de significación de $\alpha = 0{,}05$ el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es 1,96.

Sustituyendo todos los datos en el intervalo se tiene que el intervalo de confianza para la media es:

$$\left(20 - 1{,}96 \cdot \frac{4}{\sqrt{40}};\ 20 + 1{,}96 \cdot \frac{4}{\sqrt{40}}\right) = (18{,}76;\ 21{,}24)$$

Como $18{,}5 \notin (18{,}76; 21{,}24)$, la muestra no es comparable con la población con un nivel de significación de 0,05.

CUESTIÓN 2

La relación entre el nivel de confianza, el error admisible y el tamaño de la muestra es:

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Para un nivel de confianza del 95 % el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es 1,96.

Sustituyendo los valores y despejando:

$$15 = 1{,}96 \cdot \frac{87}{\sqrt{n}} \rightarrow \sqrt{n} = \frac{1{,}96 \cdot 87}{15} \rightarrow n = 11{,}368^2 = 129{,}23$$

Por tanto, necesitamos al menos 130 datos.

Criterios específicos de corrección:

BLOQUE 1: Hasta 3 puntos. **BLOQUE 3:** Hasta 1,5 puntos. **BLOQUE 5:** Hasta 1,5 puntos.

BLOQUE 2: Hasta 2 puntos. **BLOQUE 4:** Hasta 2 puntos.