COMUNIDAD FORAL DE NAVARRA

Índice

Enunciados de las pruebas y criterios extraídos de la página web de la Universidad de Navarra:

http://www.unavarra.es

Enunciado de la prueba (Junio de 2008)

INSTRUCCIONES:

El alumno elegirá una opción de cada uno de estos tres ejercicios.

EJERCICIO 1

OPCIÓN A

i) Calcular $A \cdot B$ y $B \cdot A$, si es posible, siendo: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(6 puntos)**

ii) ¿Se pueden encontrar matrices C y D para las que existan los productos $A \cdot C \cdot B$ y $B \cdot D \cdot A$? **(4 puntos)**

OPCIÓN B

Una empresa fabrica dos tipos de piezas: A y B. Cada pieza debe pasar por tres departamentos con limitaciones de tiempo. Las horas necesarias para cada pieza y sus beneficios son:

	Departamento 1	**Departamento 2**	**Departamento 3**	**Beneficios**
Pieza A	2	5	2	11 €
Pieza B	6	2	2	7 €
Horas disponibles	66	50	26	

Calcular la producción que maximiza el beneficio.

i) Plantea el problema. **(4 puntos)**

ii) Resolución gráfica. **(4 puntos)**

iii) Analiza gráficamente qué ocurre si el beneficio de B se reduce en 4 €. **(2 puntos)**

EJERCICIO 2

OPCIÓN A

Dibujar el recinto encerrado por la función $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje X. **(3 puntos)**

Calcular el área de dicho recinto. **(7 puntos)**

OPCIÓN B

Dada la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}$:

i) Hallar los puntos de discontinuidad. **(4 puntos)**

ii) Si existe algún punto de discontinuidad, hallar los límites laterales y el tipo de discontinuidad. **(4 puntos)**

iii) Determinar si se puede completar el dominio de la función de modo que sea continua en toda la recta real. **(2 puntos)**

EJERCICIO 3

OPCIÓN A

En una mesa del comedor universitario están sentados 12 estudiantes, de los cuales 8 son de economía y 4 de ingeniería. Entre los 8 de economía, hay 4 varones y 3 entre los de ingeniería.

Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **(3 puntos)**

Suponiendo que el estudiante elegido ha resultado ser varón, ¿de cuál de las dos titulaciones es más probable que sea? **(7 puntos)**

OPCIÓN B

La duración de un modelo de bombilla de bajo consumo, según el fabricante, se distribuye como una normal de media 5.000 horas y desviación típica 310 horas. Con el fin de contrastar esta hipótesis, se toma una muestra al azar de 40 de esas bombillas y la duración media para esta muestra es de 4.500 horas. ¿Se puede creer al fabricante a un nivel de confianza del 95 %? **(10 puntos)**

Resolución de la prueba (Junio de 2008)

EJERCICIO 1

OPCIÓN A

i) Como las matrices A y B tienen dimensiones 3×2 y 2×3, respectivamente, la matriz producto $A \cdot B$ debe tener dimensión 3×3 y la matriz producto $B \cdot A$ debe tener dimensión 2×2.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 9 & 3 & -5 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

ii) Como la matriz A solo puede multiplicarse por matrices con dos filas, y como para multiplicar por la matriz B las matrices deben tener dos columnas, las matrices C para las que existe el producto $A \cdot C \cdot B$ son matrices cuadradas de orden 2.

Del mismo modo, como la matriz B solo puede multiplicarse por matrices con tres filas, y para poder multiplicar por la matriz A las matrices deben tener tres columnas, las matrices D para las que existe el producto $B \cdot D \cdot A$ son matrices cuadradas de orden 3.

OPCIÓN B

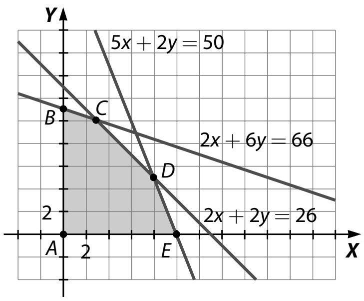
i) Sean x e y las piezas de cada tipo que deben fabricarse, respectivamente.

La función que hay que maximizar es: $f(x, y) = 11x + 7y$

Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 6y \leq 66 \\ 5x + 2y \leq 50 \\ 2x + 2y \leq 26 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

ii)



Los vértices de la región factible son: $A(0, 0)$, $B(0, 11)$, $C(3, 10)$, $D(8, 5)$ y $E(10, 0)$.

Al sustituirlos en la función objetivo tenemos que:

$$f(0, 0) = 0$$
$$f(0, 11) = 77$$
$$f(3, 10) = 11 \cdot 3 + 7 \cdot 10 = 103$$
$$f(8, 5) = 11 \cdot 8 + 7 \cdot 5 = 123$$
$$f(10, 0) = 110$$

Luego han de fabricarse 8 piezas de tipo A y 5 piezas de tipo B.

iii) Si el beneficio de *B* se reduce, la función que hay que maximizar es: $f(x, y) = 11x + 3y$

La región factible es la misma y, al evaluar los vértices de esta en la nueva función objetivo, tenemos que:

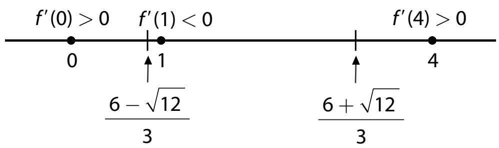
$$f(0, 0) = 0$$
$$f(0, 11) = 33$$
$$f(3, 10) = 11 \cdot 3 + 3 \cdot 10 = 63$$
$$f(8, 5) = 11 \cdot 8 + 3 \cdot 5 = 103$$
$$f(10, 0) = 110$$

Entonces la solución es fabricar solo 10 piezas de tipo *A*.

EJERCICIO 2

OPCIÓN A

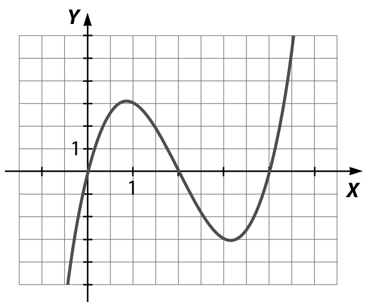
$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 - 6x^2 + 8x \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = 2 \rightarrow (2, 0) \\ x = 4 \rightarrow (4, 0) \end{cases}$$



$$y' = 3x^2 - 12x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6 - \sqrt{12}}{3} \\ x = \dfrac{6 + \sqrt{12}}{3} \end{cases}$$

La función es creciente en $\left(-\infty, \dfrac{6 - \sqrt{12}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{6 + \sqrt{12}}{3}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(\dfrac{6 - \sqrt{12}}{3}, \dfrac{6 + \sqrt{12}}{3}\right)$.

Su representación gráfica es:



El área del recinto encerrado por la función y el eje de abscisas es:

$$\text{Área} = \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx + \int_2^4 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx = \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right]_0^2\right| +$$

$$+ \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2\right]_2^4\right| = 4 + 4 = 8 \text{ u}^2$$

OPCIÓN B

i) $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$

Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$
Los puntos de discontinuidad son los puntos en los que la función no está definida, es decir, en $x = -1$ y $x = 2$.

ii) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow \text{En } x = -1 \text{ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito.}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x+1} = \frac{4}{3}$$

Como existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, pero no existe $f(2)$, en $x = 2$ hay una discontinuidad evitable.

iii) Al ser $x = -1$ un punto de discontinuidad inevitable, no puede completarse el dominio de la función de modo que sea continua en toda la recta real.

EJERCICIO 3

OPCIÓN A

Sean los sucesos:

$E =$ «Estudiar economía» $I =$ «Estudiar ingeniería»
$H =$ «Ser hombre» $M =$ «Ser mujer»

Aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$P(M) = P(E) \cdot P(M / E) + P(I) \cdot P(M / I) = \frac{8}{12} \cdot \frac{4}{8} + \frac{4}{12} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

Y aplicando el teorema de Bayes:

$$P(E / H) = \frac{P(E) \cdot P(H / E)}{P(H)} = \frac{\dfrac{8}{12} \cdot \dfrac{4}{8}}{\dfrac{7}{12}} = \frac{4}{7}$$

$$P(I / H) = \frac{P(I) \cdot P(H / I)}{P(H)} = \frac{\dfrac{4}{12} \cdot \dfrac{3}{4}}{\dfrac{7}{12}} = \frac{3}{7}$$

Por tanto, si el estudiante es varón es más probable que estudie economía.

OPCIÓN B

$N(5.000, 310)$
$n = 100, \bar{x} = 4.500$

El contraste es bilateral:

$$\left.\begin{array}{l} H_0 \colon \mu = 5.000 \\ H_1 \colon \mu \neq 5.000 \end{array}\right\}$$

Para un nivel de confianza del 95 %:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$$

Se admite la hipótesis nula si $\left|\bar{x} - \mu_0\right| < z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Como $\left|4.500 - 5.000\right| = 500 > 1{,}96 \cdot \dfrac{310}{\sqrt{40}} = 96{,}07$; se rechaza la hipótesis nula, es decir, no se puede creer al fabricante a ese nivel de confianza.

Criterios específicos de corrección:

EJERCICIO 1

OPCIÓN A

i) 6 puntos.
ii) 4 puntos.

OPCIÓN B

i) 4 puntos.
ii) 4 puntos.
iii) 2 puntos.

EJERCICIO 2

OPCIÓN A

3 puntos (dibujar el recinto).
7 puntos (calcular el área).

OPCIÓN B

i) 4 puntos.
ii) 4 puntos.
iii) 2 puntos.

EJERCICIO 3

OPCIÓN A

3 puntos (calcular la probabilidad de que sea mujer).
7 puntos (determinar la titulación más probable).

OPCIÓN B

10 puntos.

INSTRUCCIONES:

El alumno elegirá una opción de cada uno de estos tres ejercicios.

EJERCICIO 1

OPCIÓN A

Dadas las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y - z &= 5 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

añadir una ecuación lineal de modo que el sistema resultante sea:

i) Compatible determinado y resolverlo. **(4 puntos)**

ii) Compatible indeterminado y dar su solución. **(4 puntos)**

iii) Incompatible y justificarlo. **(2 puntos)**

OPCIÓN B

Un horticultor desea mezclar fertilizantes que proporcionen un mínimo de 15 unidades de potasa, 20 unidades de nitratos y 24 unidades de fosfatos. Cada unidad de la marca 1 proporciona 3 unidades de potasa, 1 de nitratos y 3 de fosfatos; su costo es de 120 €. Cada unidad de la marca 2 proporciona 1 unidad de potasa, 5 de nitratos y 2 de fosfatos; su costo es de 60 €. ¿Cuál es la combinación de fertilizantes de menor costo que satisface las especificaciones deseadas?

i) Plantea el problema. **(4 puntos)**

ii) Resolución gráfica. **(4 puntos)**

iii) Analiza gráficamente qué ocurre si el precio de la marca 2 aumenta en 20 €. **(2 puntos)**

EJERCICIO 2

OPCIÓN A

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} & x \leq 1 \\ 2x^3 - 1 & x > 1 \end{cases}$

i) ¿En qué punto o puntos es discontinua? ¿De qué tipo? **(4 puntos)**

ii) ¿Es derivable en $x = 1$? ¿Y en $x = -1$? ¿Por qué? **(6 puntos)**

OPCIÓN B

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ -x + 10 & \text{si } 5 < x \leq 10 \end{cases}$

i) Dibujar su gráfica. **(4 puntos)**

ii) Calcular la superficie que encierra con el eje X. **(6 puntos)**

EJERCICIO 3

OPCIÓN A

Una entidad bancaria concede tres tipos de créditos: hipotecarios, para industria y personales. Se sabe que el 50 % de los créditos que concede son hipotecarios, el 20 % para industria y el 30 % restantes son personales. Han resultado impagados el 15 % de los créditos hipotecarios, el 25 % de los créditos para industria y el 30 % de los créditos personales.

i) Seleccionado un crédito al azar, calcular la probabilidad de que se pague. **(4 puntos)**

ii) Un determinado crédito ha resultado impagado, calcular la probabilidad de que sea un crédito hipotecario. **(6 puntos)**

OPCIÓN B

Se cree que la distancia al instituto de las casas de los alumnos se distribuye normalmente con media 2,8 km y desviación típica 0,6 km. Se ha producido un aumento considerable de matrícula en los últimos años y se desea saber si ha variado la distancia media de las casas de los alumnos al centro; para ello se ha elegido una muestra de 35 alumnos y se ha determinado que la distancia media muestral es 3,1 km. ¿Es creíble la afirmación inicial al nivel 5 %? **(10 puntos)**

Resolución de la prueba (Septiembre de 2007)

EJERCICIO 1

OPCIÓN A

i) Para que el sistema sea compatible determinado, la tercera ecuación se elige de modo que no sea combinación lineal de las otras dos.

El sistema puede ser:

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y-z&=5\\ x+y+z&=3\\ x+y&=-1 \end{aligned}\right\}$$

Lo resolvemos por el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2=3F_2-F_1\\ F_3=F_3-F_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 5\\ 0 & 1 & 4 & 4\\ 0 & 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y-z&=5\\ y+4z&=4\\ -z&=-4 \end{aligned}\right\} \rightarrow z=4,\, y=-12 \text{ y } x=11$$

ii) Para que el sistema sea compatible indeterminado, elegimos una tercera ecuación que sea combinación lineal de las ecuaciones dadas.

El sistema puede ser:

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y-z&=5\\ x+y+z&=3\\ 2x+y-2z&=2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 3x+2y-z&=5\\ x+y+z&=3 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} 3x+2y&=5+z\\ x+y&=3-z \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y&=5+z\\ 3x+3y&=9-3z \end{aligned}\right\} \rightarrow y=4-4z$$

Llamamos $z=\lambda$, $y=4-4\lambda$ y $x=3-\lambda-(4-4\lambda)=-1+3\lambda$, $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$.

iii) Para que el sistema sea incompatible, por el teorema de Rouché, el rango de la matriz de los coeficientes ha de ser distinto del rango de la matriz ampliada.

Por tanto, la tercera ecuación se elige de modo que sea la suma de las ecuaciones dadas en el primer miembro, pero no en el segundo.

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y-z&=5\\ x+y+z&=3\\ 4x+3y&=1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}=2 \quad \text{y} \quad \text{Rango}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)=3$$

OPCIÓN B

i) Formamos una tabla para simplificar el enunciado:

	Marca 1	Marca 2	Mínimo de unidades
Potasa	3	1	15
Nitratos	1	5	20
Fosfatos	3	2	24
Coste	120	60	

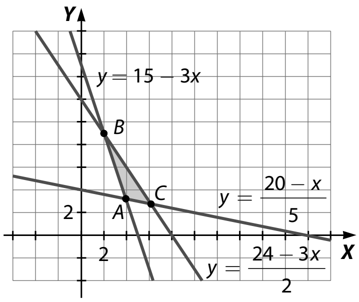
Sean $x =$ «Fertilizantes de la marca 1» e $y =$ «Fertilizantes de la marca 2».

El sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + y \geq 15 \\ x + 5y \geq 20 \\ 3x + 2y \geq 24 \end{array}\right\}$$

La función que hay que minimizar es: $f(x, y) = 120x + 60y$

ii) Dibujamos la función factible y estudiamos el comportamiento de la función objetivo $f(x, y) = 120x + 60y$.



Los vértices de la región factible son:

$$A\left(\frac{55}{14}, \frac{45}{14}\right),\ B(2,9) \text{ y } C\left(\frac{80}{13}, \frac{36}{13}\right)$$

Evaluando los vértices de la región factible en la función objetivo tenemos que:

$$f\left(\frac{55}{14}, \frac{45}{14}\right) = 664{,}29$$

$$f(2, 9) = 780$$

$$f\left(\frac{80}{13}, \frac{36}{13}\right) = 904{,}62$$

Luego la combinación de fertilizantes de menor costo es 3,93 de la marca 1 y 3,21 de la marca 2.

iii) La región factible es la misma que en el caso anterior.

En este caso, la función objetivo es: $f(x, y) = 120x + 80y$

Sustituyendo los vértices de la región factible en la función objetivo tenemos que:

$$f\left(\frac{55}{14}, \frac{45}{14}\right) = 728{,}57$$

$$f(2, 9) = 960$$

$$f\left(\frac{80}{13}, \frac{36}{13}\right) = 960$$

Luego la combinación de fertilizantes de menor costo es 3,93 de la marca 1 y 3,21 de la marca 2, la misma que en el apartado anterior.

EJERCICIO 2

OPCIÓN A

i) Los puntos posibles de discontinuidad son $x = 1$ y $x = -1$.

Estudiamos el comportamiento de la función en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^+} (2x^3 - 1) = 1 \quad \lim_{x \to 1^-} \frac{2x}{x+1} = 1 \quad f(1) = 1$$

No es discontinua en $x = 1$.

Estudiamos el comportamiento de la función en $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{2x}{x+1} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^-} \frac{2x}{x+1} = +\infty$$

Es discontinua inevitable de salto infinito en $x = -1$.

ii) Estudiamos la derivabilidad en $x = 1$:

Las derivadas laterales son: $f'(x^+) = 6x^2$ y $f'(x^-) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

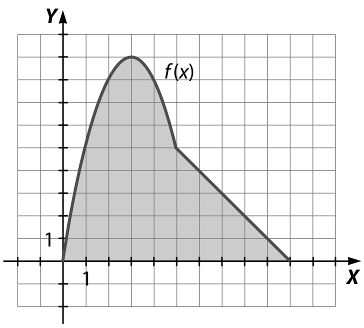
$$f'(1^+) = 6 \cdot 1^2 = 6 \quad f'(1^-) = \frac{2}{(1+1)^2} = \frac{1}{4}$$

Como $f'(1^+) = f'(1^-)$, la función no es derivable en $x = 1$.

En $x = -1$ no es derivable puesto que, como hemos visto en el apartado i), la función no es continua.

OPCIÓN B

i)



ii) $$\text{Área} = \int_0^5 (-x^2 + 6x)\,dx + \int_5^{10} (-x + 10)\,dx = \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right]_0^5 + \left[\frac{-x^2}{2} + 10x\right]_5^{10} =$$

$$= \frac{-125}{3} + \frac{150}{2} + \frac{-100}{2} + 100 - \left(-\frac{25}{2} + 50\right) = \frac{275}{6} = 45{,}83\ \text{u}^2$$

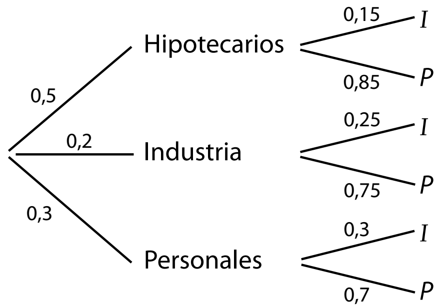
EJERCICIO 3

OPCIÓN A

i) Para resolver el problema construimos el siguiente diagrama de árbol, siendo los sucesos:

I = «Crédito impagado»

P = «Crédito pagado»



Así, la probabilidad de que se pague el crédito será:

$$P(P) = 0,5 \cdot 0,85 + 0,2 \cdot 0,75 + 0,3 \cdot 0,7 = 0,785$$

ii) La probabilidad de ser un crédito hipotecario sabiendo que ha sido impagado es:

$$P(\text{hipotecario} / I) = \frac{P(\text{hipotecario} \cap I)}{P(I)} = \frac{0,5 \cdot 0,15}{1 - 0,785} = \frac{0,075}{0,215} = 0,348$$

OPCIÓN B

Planteamos un contraste bilateral para la media:

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \ \mu = 2,8 = \mu_0 \\ H_1: \ \mu \neq 2,8 \end{array}\right\}$$

Como el nivel de significación es $\alpha = 0,05$; se tiene, buscando en la tabla de la distribución normal, que $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

Sabemos que $\bar{x} = 3,1$; $n = 35$ y $\sigma = 0,6$.

La zona de aceptación es:

$$\left(\mu_0 - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(2,8 - 1,96 \cdot \frac{0,6}{\sqrt{35}}; 2,8 + 1,96 \cdot \frac{0,6}{\sqrt{35}}\right) =$$

$$= (2,8 - 0,198; 2,8 + 0,198) = (2,602; 2,998)$$

Como $\bar{x} = 3,1 \notin (2,602; 2,998)$, se rechaza la hipótesis nula; por tanto, al nivel del 5 % se pone en duda que la distancia media de los alumnos al centro sea de 2,8 km.

Criterios específicos de corrección:

EJERCICIO 1

OPCIÓN A
- i) 4 puntos.
- ii) 4 puntos.
- iii) 2 puntos.

OPCIÓN B
- i) 4 puntos.
- ii) 4 puntos.
- iii) 2 puntos.

EJERCICIO 2

OPCIÓN A
- i) 4 puntos.
- ii) 6 puntos.

OPCIÓN B
- i) 4 puntos.
- ii) 6 puntos.

EJERCICIO 3

OPCIÓN A
- i) 4 puntos.
- ii) 6 puntos.

OPCIÓN B

10 puntos.