PAÍS VASCO

Índice

Junio de 2008 220
Julio de 2007 226

Enunciados de las pruebas y criterios extraídos de la página web de la Universidad del País Vasco:
http://www.sarrera.ehu.es

Enunciado de la prueba

(Junio de 2008)

Notas:
1. Hay que elegir y desarrollar un ejercicio (el 1 o el 2) de cada uno de los cuatro apartados que siguen (A, B, C y D).
2. Los ejercicios de los apartados A y B se evalúan sobre un máximo de tres puntos, y los de los apartados C y D sobre un máximo de dos puntos.
3. Se permite el uso de calculadoras científicas, *excepto las programables*.
4. En hoja aparte hay una tabla de la distribución normal estándar.

APARTADO A

EJERCICIO A1. Un estudiante reparte propaganda publicitaria en su tiempo libre. La empresa A le paga 0,05 € por cada impreso repartido, mientras que la empresa B le paga 0,07 € por impreso. El estudiante lleva dos bolsas: una para los impresos de A, en la que caben 120, y otra para los de B, en la que caben 100. Por experiencia sabe también que cada día puede repartir, a lo sumo, 150 impresos. ¿Cuántos impresos debe repartir de cada clase para que su ganancia diaria sea máxima? ¿A cuánto ascendería dicha ganancia?

EJERCICIO A2. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Hallar los valores de m para los cuales tiene inversa.

b) Cuando $m = 2$, encontrar la matriz X que cumple $X \cdot A = (1 \quad 0 \quad -1)$.

APARTADO B

EJERCICIO B1. Un artículo de consumo estuvo a la venta durante 8 años, y su precio $P(t)$ (en miles de euros) varió con el tiempo t (en años) que llevaba en el mercado, según la función siguiente:

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -\dfrac{5}{2}t + 25 & \text{si } 2 < t \leq 8 \end{cases}$$

a) Representar gráficamente la función.

b) Averiguar en qué momentos se alcanzaron los precios máximo y mínimo, y cuáles fueron esos precios.

EJERCICIO B2. Hallar el valor de $a > 0$ para el cual son iguales las áreas $A_1 = \displaystyle\int_0^a x \; dx$ y $A_2 = \displaystyle\int_0^a x^2 \; dx$, y representar gráficamente los recintos correspondientes a dichas áreas.

APARTADO C

EJERCICIO C1. En una caja hay diez bolas, cinco de las cuales están marcadas con números positivos y las otras cinco con números negativos. Si se extraen, al azar y simultáneamente, dos bolas y se multiplican los números que aparecen en ellas, ¿qué es más probable, un resultado positivo o uno negativo?

EJERCICIO C2. Se hacen tres lanzamientos de un dado equilibrado. Si la suma de las dos primeras puntuaciones es un número par, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las tres puntuaciones sea 15?

APARTADO D

EJERCICIO D1. Una compañía de autobuses sabe que el retraso en la llegada sigue una ley normal de media 5 minutos, y que el 68,26 % de los autobuses llega con un retraso comprendido entre los 2 y los 8 minutos. Hallar la desviación típica de la ley normal y la probabilidad de que un autobús se retrase más de 10 minutos.

EJERCICIO D2. Cierto partido político difunde en su campaña que el 60 % de los electores tiene intención de votarle en las próximas elecciones, pero en una encuesta realizada a 1.000 de esos electores elegidos al azar solo 540 afirmaron tal intención. ¿Es aceptable lo que dice el partido, con un 95 % de confianza? ¿Y con el 99 %?

APARTADO A

EJERCICIO A1

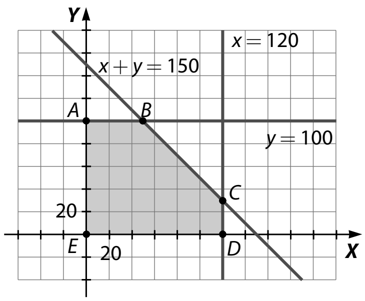
Sean x e y los impresos que se reparten de cada clase, respectivamente.

La función que hay que maximizar es:

$$f(x, y) = 0{,}05x + 0{,}07y$$

Las restricciones son:

$$\left.\begin{array}{r} 0 \leq x \leq 120 \\ 0 \leq y \leq 100 \\ x + y \leq 150 \end{array}\right\}$$



Los vértices del polígono son:

$A(0, 100)$, $B(50, 100)$, $C(120, 30)$, $D(120, 0)$ y $E(0, 0)$.

Al sustituir las coordenadas de estos puntos en la función objetivo, tenemos que:

$$f(0, 100) = 7$$
$$f(50, 100) = 9{,}5$$
$$f(120, 30) = 8{,}1$$
$$f(120, 0) = 6$$
$$f(0, 0) = 0$$

Por tanto, debe repartir 50 impresos de la empresa *A* y 100 impresos de la empresa *B*, con lo que se obtendría una ganancia de 9,50 €.

EJERCICIO A2

a) $|A| = 5 - m^2$

La matriz A tiene inversa si $m \neq \pm\sqrt{5}$.

b) Si $m = 2$, entonces existe la matriz inversa de A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Despejamos en la ecuación:

$$X = (1 \quad 0 \quad -1) \cdot A^{-1} = (1 \quad 0 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix} = (1 \quad 3 \quad 1)$$

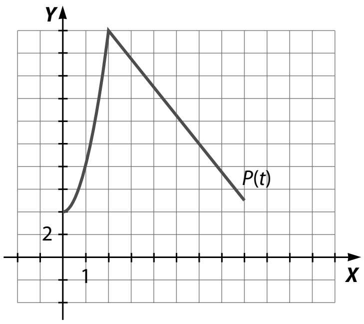
APARTADO B

EJERCICIO B1

a) Teniendo en cuenta los puntos:

x	0	2	8
y	4	20	5

La representación de la función es:



b) Según la representación, el precio mínimo fue de 4.000 € cuando el producto apareció en el mercado, y el máximo fue de 20.000 € y se alcanzó a los dos años.

EJERCICIO B2

$$A_1 = \int_0^a x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{a^2}{2}$$

$$A_2 = \int_0^a x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^3}{3}$$

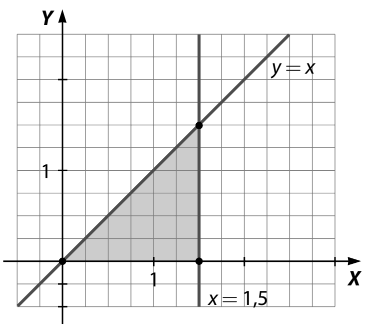
Si las áreas son iguales, entonces tenemos que:

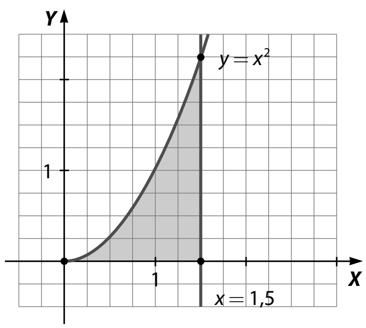
$$\frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{3} \rightarrow 3a^2 - 2a^3 = 0$$

Como $a > 0$, se verifica que:

$$3 - 2a = 0 \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

Los recintos correspondientes son:





APARTADO C

EJERCICIO C1

P(obtener un resultado positivo) $=$ P(extraer dos bolas con números positivos) $+$

$$+\ P(\text{extraer dos bolas con números negativos}) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{4}{9}$$

P(obtener un resultado negativo) $=$ P(extraer una bola con un número positivo y otra

$$\text{con un negativo}) = \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{5}{9}$$

Por tanto, es más probable obtener un resultado negativo.

EJERCICIO C2

Si la suma de las tres puntuaciones es 15, es necesario que las dos primeras tiradas sumen
como mínimo 9; además, el enunciado indica que la suma es par,
por lo que solo puede ser 10 o 12.

Entonces, tenemos que:

P(obtener suma igual a 15 en tres lanzamientos) $=$

$$= P(\text{obtener 5 en el tercer lanzamiento}) \cdot P(\text{obtener suma igual a 10}) +$$
$$+ P(\text{obtener 3 en el tercer lanzamiento}) \cdot P(\text{obtener suma igual a 12}) =$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{36} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{36} = \frac{4}{216} = \frac{1}{54}$$

APARTADO D

EJERCICIO D1

$$P(2 < X < 8) = P\left(\frac{2-5}{\sigma} < \frac{X-5}{\sigma} < \frac{8-5}{\sigma}\right) = P\left(\frac{-3}{\sigma} < Z < \frac{3}{\sigma}\right) = 2P\left(Z < \frac{3}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}6826$$

$$\rightarrow P\left(Z < \frac{3}{\sigma}\right) = 0{,}8413 \rightarrow \frac{3}{\sigma} = 1 \rightarrow \sigma = 3$$

$$P(X > 10) = P\left(\frac{X-5}{3} > \frac{10-5}{3}\right) = P(Z > 1{,}67) = 1 - P(Z \le 1{,}67) = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$$

EJERCICIO D2

El contraste es bilateral:

$$\left.\begin{array}{l} H_0\colon p = 0{,}6 \\ H_1\colon p \neq 0{,}6 \end{array}\right\}$$

Para un nivel de confianza del 95 %, el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ es: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$

Se admite la hipótesis nula si $\left|\hat{p} - p_0\right| < z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}$.

En la encuesta se tiene que la proporción es:

$$\hat{p} = \frac{540}{1.000} = 0{,}54$$

Como $\left|0{,}54 - 0{,}6\right| = 0{,}06 > 1{,}96 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{1.000}} = 0{,}03$; se rechaza la hipótesis nula, es decir, no se puede aceptar lo que dice el partido a ese nivel de confianza.

Si el nivel de confianza es del 99 %:

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58$$

Análogamente, como $\left|0{,}54 - 0{,}6\right| = 0{,}06 > 2{,}58 \cdot \sqrt{\dfrac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{1.000}} = 0{,}04$; se rechaza la hipótesis nula, y, no se acepta lo que dice el partido con un 99 % de confianza.

Criterios específicos de corrección:

APARTADO A

EJERCICIO A1: Hasta 3 puntos.
EJERCICIO A2: Hasta 3 puntos.

APARTADO B

EJERCICIO B1: Hasta 3 puntos.
EJERCICIO B2: Hasta 3 puntos.

APARTADO C

EJERCICIO C1: Hasta 2 puntos.
EJERCICIO C2: Hasta 2 puntos.

APARTADO D

EJERCICIO D1: Hasta 2 puntos.
EJERCICIO D2: Hasta 2 puntos.

Enunciado de la prueba (Julio de 2007)

Notas:
1. Hay que elegir y desarrollar un ejercicio (el 1 o el 2) de cada uno de los cuatro apartados que siguen (A, B, C y D).
2. Los ejercicios de los apartados A y B se evalúan sobre un máximo de tres puntos, y los de los apartados C y D sobre un máximo de dos puntos.
3. Se permite el uso de calculadoras científicas, *excepto las programables*.
4. Al dorso hay una tabla de la distribución normal estándar.

APARTADO A

EJERCICIO A1. Hallar A^2, A^3, A^4 y A^5, siendo A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Se percibe algún patrón que permita adivinar cuál es A^{50} y, en general, A^n?

EJERCICIO A2. Con 6 kg de un fármaco se desea elaborar pastillas grandes (40 g cada una) y pequeñas (20 g cada una), de manera que el número de pastillas grandes no sea inferior a 30 pero tampoco superior al doble del número de las pequeñas. Si el beneficio que se obtiene en la venta es de 0,25 €, por cada pastilla grande, y 0,15 €, por cada pequeña, ¿cuántas pastillas hay que vender de cada clase si se busca el máximo beneficio posible?

APARTADO B

EJERCICIO B1. Encontrar el dominio de la función $y = \log(1 + x + x^2)$ y los puntos en los que la tangente a la curva es paralela a la bisectriz del primer cuadrante.
(**Nota**: «log» significa «logaritmo neperiano».)

EJERCICIO B2. Hallar el área de la figura OAB, en la que O es el origen de coordenadas, $A(-1, 1)$, $B(2, 1)$, los lados OB y AB son segmentos rectilíneos y OA es un arco de la curva $y = x^2$.

APARTADO C

EJERCICIO C1. Se lanza una moneda (equilibrada) cuatro veces. Hallar la probabilidad de obtener un número impar de caras.

EJERCICIO C2. En una asociación, en la que el 60 % de sus miembros son mujeres, la mitad de estas y el 20 % de los varones asistieron a cierta reunión. Si se elige al azar un miembro de dicha asociación, ¿cuál es la probabilidad de que se trate de una mujer?

APARTADO D

EJERCICIO D1. En una ciudad en la que la edad de sus habitantes se ajusta a una distribución normal de media 35 años, ¿qué grupo es más numeroso: el de los mayores de 65 años o el de los menores de 18 años? Justifica la respuesta.

EJERCICIO D2. En cierta comunidad autónoma, la proporción de ciudadanos contrarios a la construcción de un embalse ascendía, el pasado año, al 30 %. En una reciente encuesta realizada a 400 ciudadanos de esa comunidad (elegidos al azar) 112 de ellos manifestaron ser contrarios al embalse. ¿Puede decirse, con un 95 % de confianza, que ha variado esa proporción de ciudadanos? ¿Y con un 99 % de confianza?

APARTADO A

EJERCICIO A1

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observamos que, para todas las matrices, el elemento a_2 coincide con la potencia de la matriz A.
Por tanto, tenemos que:

$$A^{50} = \begin{pmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y, en general, se verifica que: } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO A2

Planteamos un sistema de inecuaciones lineales con las condiciones del enunciado, siendo
$x =$ «Número de pastillas grandes» e $y =$ «Número de pastillas pequeñas».

$$\left.\begin{array}{l} 40x + 20y = 6.000 \\ x \geq 30 \\ x \leq 2y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + y = 300 \\ x \geq 30 \\ x \leq 2y \end{array}\right\}$$

Dibujamos la región factible y hallamos sus vértices:

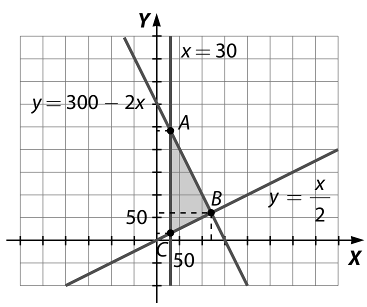
$$\left.\begin{array}{l} y = 300 - 2x \\ x = 30 \\ x = 2y \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} y = 300 - 2x \\ x = 30 \end{array}\right\} \rightarrow A(30, 240) \\ \left.\begin{array}{r} y = 300 - 2x \\ x = 2y \end{array}\right\} \rightarrow B(120, 60) \\ \left.\begin{array}{r} x = 30 \\ x = 2y \end{array}\right\} \rightarrow C(30, 15) \end{array}$$

La función objetivo es: $f(x, y) = 0{,}25x + 0{,}15y$

El máximo lo alcanzará en alguno de los vértices de la región factible:

$$f(30, 240) = 0{,}25 \cdot 30 + 0{,}15 \cdot 240 = 43{,}5$$
$$f(120, 60) = 0{,}25 \cdot 120 + 0{,}15 \cdot 60 = 39$$
$$f(30, 15) = 0{,}25 \cdot 30 + 0{,}15 \cdot 15 = 9{,}75$$

Para que el beneficio sea máximo habrá que vender 30 pastillas grandes y 240 pastillas pequeñas, y el beneficio es de 43,50 €.



APARTADO B

EJERCICIO B1

El dominio estará formado por todos los valores x tales que $1 + x + x^2 > 0$, y esta condición se cumple siempre, el dominio es: Dom $f = \mathbb{R}$.

Calculamos $f(x)$:

$$f'(x)\text{: } f'(x) = \frac{1+2x}{1+x+x^2}$$

La bisectriz del primer cuadrante es la recta $f(x) = x$, que tiene pendiente 1.

Para hallar los puntos en los que la tangente a la curva es paralela a $f(x) = x$, resolvemos la ecuación:

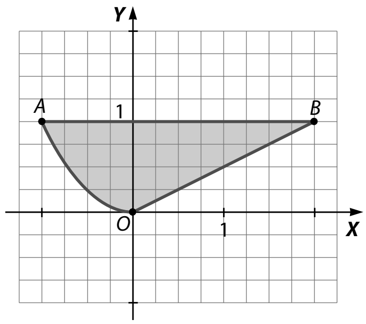
$$\frac{1+2x}{1+x+x^2} = 1 \rightarrow 1+2x = 1+x+x^2 \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Los puntos pedidos son:

$$(0, \log(1+0+0^2)) = (0, 0) \quad \text{y} \quad (1, \log(1+1+1^2)) = (1; 1{,}098)$$

EJERCICIO B2

Dibujamos la figura OAB:



La recta AB es $y = 1$ y la recta OB es $y = \frac{x}{2}$.

$$\text{Área} = \int_{-1}^{0} (1 - x^2)\,dx + \int_{-1}^{2} \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[x - \frac{x^2}{4}\right]_{0}^{2} = 1 - \frac{1}{3} + 2 - 1 = \frac{5}{3}\ \text{u}^2$$

APARTADO C

EJERCICIO C1

$$P[(1 \text{ cara y } 3 \text{ cruces}) \cap (3 \text{ caras y } 1 \text{ cruz})] = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

EJERCICIO C2

Construimos una tabla de contingencia con los datos del enunciado:

	M	*H*	**Totales**
Asistieron	0,3	0,2	*a*
No asistieron	*b*	*c*	*d*
Totales	0,6	0,4	1

Calculamos el resto de las casillas:

Casilla *a*: $0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5$
Casilla *b*: $0{,}6 - 0{,}3 = 0{,}3$
Casilla *c*: $0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$
Casilla *d*: $1 - 0{,}5 = 0{,}5$

La tabla correspondiente es:

	M	*H*	**Totales**
Asistieron	0,3	0,2	0,5
No asistieron	0,3	0,2	0,5
Totales	0,6	0,4	1

- *P*(al elegir al azar un miembro de la asociación sea uno de los asistentes) $= 0{,}5$
- $P(M \,/\, \text{no asistió}) = \dfrac{P(M \cap \text{no asistió})}{P(\text{no asistió})} = \dfrac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$

APARTADO D

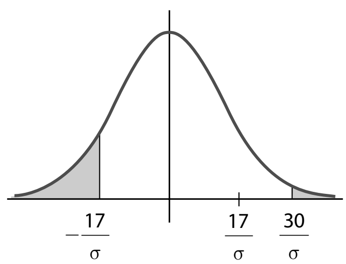
EJERCICIO D1

Llamamos $X =$ «Edad de una persona».

La variable *X* se distribuye según una $N(35, \sigma)$. Tipificando la variable *X* tenemos que:

$$P(X < 18) = P\left(Z < \frac{18 - 35}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{-17}{\sigma}\right)$$

$$P(X > 65) = P\left(Z > \frac{65 - 35}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{30}{\sigma}\right)$$



Por la simetría de la función de distribución de la normal se tiene que:

$$P\left(Z > \frac{30}{\sigma}\right) < P\left(Z < \frac{-17}{\sigma}\right) \rightarrow P(X > 65) < P(X < 18)$$

Por tanto, el grupo más numeroso es el grupo de menores de 18 años.

EJERCICIO D2

Planteamos un test de hipótesis bilateral para la proporción:

$$\left.\begin{array}{l} H_0:\ p = 0,3 = p_0 \\ H_1:\ p \neq 0,3 \end{array}\right\}$$

Del enunciado sabemos que $\hat{p} = \dfrac{112}{400} = 0,28$ y $n = 400$.

El estadístico de contraste viene dado por:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0,28 - 0,3}{\sqrt{\dfrac{0,3(1-0,3)}{400}}} = \frac{-0,02}{0,022} = -0,9$$

- Con un 95 % de confianza, el coeficiente es 0,95 y $\alpha = 0,05$.

  Según la tabla de la distribución normal, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

  Por tanto, la región de aceptación es $(-1,96; 1,96)$.

  Como el estadístico $z = -0,9 \in (-1,96; 1,96)$ aceptamos la hipótesis nula, es decir, que con un nivel de confianza del 95 % no ha variado la proporción de ciudadanos contrarios a la construcción del embalse.

- Con un 99 % de confianza, el coeficiente es 0,99 y $\alpha = 0,1$.

  Según la tabla de distribución normal, $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,58$.

  La región de aceptación es $(-2,58; 2,58)$.

  Como el estadístico $z = -0,9 \in (-2,58; 2,58)$ aceptamos la hipótesis nula, con un nivel de confianza del 99 %, y vemos que tampoco ha variado la proporción de ciudadanos contrarios a la construcción del embalse.

Criterios específicos de corrección:

APARTADO A

EJERCICIO A1: Hasta 3 puntos.
EJERCICIO A2: Hasta 3 puntos.

APARTADO B

EJERCICIO B1: Hasta 3 puntos.
EJERCICIO B2: Hasta 3 puntos.

APARTADO C

EJERCICIO C1: Hasta 2 puntos.
EJERCICIO C2: Hasta 2 puntos.

APARTADO D

EJERCICIO D1: Hasta 2 puntos.
EJERCICIO D2: Hasta 2 puntos.