



Matemàtiques 2 BATXILLERAT

aplicades a les Ciències Socials

Biblioteca del professorat

SOLUCIONARI

El solucionari de **Matemàtiques aplicades a les Ciències Socials** per a 2n de Batxillerat és una obra col·lectiva, concebuda, dissenyada i creada al departament d'Edicions Educatives de Grup Promotor / Santillana, dirigit per **Enric Juan Redal i Pere Macià Arqué**.

En la realització hi han intervingut:

M.ª José Barbero
Ana M.ª Gaztelu
Augusto González
José Lorenzo
Pedro Machín
Miguel Marqués
María José Rey
José del Río

EDICIÓ
Angélica Escoredo
Núria Grinyó
Josep Llongueras
Carlos Pérez

DIRECCIÓ DEL PROJECTE
Domingo Sánchez Figueroa



Projecte **La Casa del Saber**

Grup Promotor
Santillana

Presentació

El nom de la sèrie, **La Casa del Saber**, respon al plantejament de presentar un projecte de Matemàtiques centrat en l'adquisició dels continguts que calen perquè els alumnes es puguin valer en la vida real. El saber matemàtic ha de garantir no només la interpretació i la descripció de la realitat, sinó també l'actuació sobre aquesta.

1

Matrius

OBJECTIUS

- Identificar els elements d'una matriu i classificar-se d'acord amb diferents criteris.
- Calcular la matriu suma i la matriu resta de dues matrius, o més del mateix ordre.
- Trobar, en els casos en què sigui possible, el producte de dues matrius, o més, i també les potències de diferents ordres d'una matriu quadrada.
- Obtenir la matriu inversa d'una matriu invertible.
- Determinar si una matriu és simètrica o antisimètrica.
- Determinar el rang d'una matriu per mitjà del mètode de Gauss.
- Determinar el rang d'una matriu per mitjà del mètode de Gauss-Jordan.
- Obtenir la matriu inversa d'una matriu invertible a partir de la solució del sistema lineal i pel mètode de Gauss-Jordan.

CONTINGUTS

- Exemples d'una matriu: identificació, descripció i utilització dels elements d'una matriu.
- Operacions de suma i resta de dues matrius.
- Operacions de multiplicació i potències de dues matrius.
- Operacions amb matrius:
 - Suma i resta de matrius: propietats.
 - Producte de matrius: propietats.
 - Producte d'una matriu per un nombre: propietats.
 - Propietats de les matrius: propietats.
 - Determinació del rang d'una matriu analitzant-ne la dependència o la independència lineal de les files o les columnes.
 - Calcul del rang d'una matriu per mitjà del mètode de Gauss.
 - Calcul de la matriu inversa a partir de la solució del sistema lineal.
 - Calcul de la matriu inversa utilitzant el mètode de Gauss-Jordan.
 - Validació de la solució de les matrius en diversos contextos reals.
 - Guia per la resolució de problemes relacionats amb matrius.
 - Validació de la resolució de problemes relacionats amb matrius.

CRITERIS D'AVUÀLUACIÓ

- Utilitzar els conceptes de matriu, element, dimensió i rang en contextos reals.
- Determinar la qualitat de dues matrius.
- Identificar els elements d'una matriu.
- Calcular la matriu inversa d'una matriu invertible a partir de la solució del sistema lineal i pel mètode de Gauss-Jordan.
- Calcular el rang d'una matriu per mitjà del mètode de Gauss.
- Calcular la matriu inversa d'una matriu invertible a partir de la solució del sistema lineal i pel mètode de Gauss-Jordan.

10

Representació de funcions

OBJECTIUS

- Obtenir el domini i els punts de tall amb els eixos d'una funció.
- Determinar si una funció és simètrica.
- Estudiar si una funció és periòdica, en el cas que ho sigui, calcular-ne el període.
- Determinar les asintotes verticals, horitzontals i obliques.
- Obtenir els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i els mínims, a partir del estudi de la derivada primera.
- Calcular-ne els intervals de concavitat i convexitat, i els punts d'inflexió, a partir del estudi de la derivada segona.
- Representar gràficament una funció.

CONTINGUTS

- Domini i punts de tall amb els eixos.
- Simetries.
- Períodes.
- Asintotes verticals, horitzontals i obliques.
- Intervals de creixement i decreixement, Màxims i mínims.
- Intervals de concavitat i convexitat. Punt d'inflexió.
- Representació gràfica de funcions polinòmiques, racionals, amb radicals, exponencial, logarítmiques i definides a trossos.

CRITERIS D'AVUÀLUACIÓ

- Trobar el domini i els punts de tall amb els eixos d'una funció.
- Determinar si una funció és simètrica.
- Calcular les asintotes verticals, horitzontals i obliques d'una funció, i determinar la posició relativa de la gràfica d'una funció respecte d'aquestes asintotes.
- Trobar els intervals de creixement i decreixement d'una funció.
- Obtenir els màxims i els mínims d'una funció.
- Determinar els intervals de concavitat i de convexitat d'una funció.
- Trobar els punts d'inflexió d'una funció.
- Representar gràficament una funció a partir de l'estudi de les seves propietats.

En aquest sentit, i considerant les Matemàtiques d'aquests nivells com una matèria essencialment procedimental, recollim en aquest material la **resolució de tots els exercicis i problemes** que hi ha formulats al llibre de l'alumne. Pretenem que aquesta resolució no sigui tan sols un instrument, sinó que es pugui entendre com una proposta didàctica per enfocar l'adquisició dels diferents conceptes i procediments que es presenten al llibre de l'alumne.



Matrïus

ABANS DE COMENÇAR... RECORDA

001 Resol aquests sistemes.

a) $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 4 \\ x - 5y = 7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -2y + z = -1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x - 5y = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 4 \\ x - 5y = 7 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 4 \\ x - 5y = 7 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 4 \\ x - 5y = 7 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x - 3y + 3z = 4 \\ x - 5y = 7 \end{cases}$

002 Resol aquests sistemes.

a) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

ACTIVITATS

001 Escribe una matriu que compleixi les condicions següents:

- Dimensió 3×2 .
- $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$.
- $a_{12} = a_{21} = a_{32} = a_{23} = 1$.

La matriu és:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

002 Verifica si són de dues equacions i de dues incògnites. Si són, resoldes-les. Si no, indica què falta o què sobra.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ (Són de dues equacions i de dues incògnites. Solució: $x = 1, y = 0$).

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ (No són de dues equacions i de dues incògnites. Són de tres equacions i de dues incògnites. Solució: $x = 1, y = 0$).

c) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ (Són de dues equacions i de dues incògnites. Solució: $x = 1, y = 0$).

d) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ (No són de dues equacions i de dues incògnites. Són de tres equacions i de dues incògnites. Solució: $x = 1, y = 0$).

e) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ (Són de dues equacions i de dues incògnites. Solució: $x = 1, y = 0$).

f) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ (No són de dues equacions i de dues incògnites. Són de tres equacions i de dues incògnites. Solució: $x = 1, y = 0$).

Índex

Programació de les unitats

Unitat 1	Matrius	6
Unitat 2	Sistemes d'equacions lineals	8
Unitat 3	Vectors i coordenades en el pla	10
Unitat 4	La recta en el pla	12
Unitat 5	Sistemes d'inequacions lineals	14
Unitat 6	Programació lineal	16
Unitat 7	Límits i continuïtat de funcions	18
Unitat 8	Derivada d'una funció	20
Unitat 9	Aplicacions de la derivada	22
Unitat 10	Representació de funcions	24
Competències bàsiques del batxillerat		26

Resolució de les activitats

Unitat 1	Matrius	42
Unitat 2	Sistemes d'equacions lineals	90
Unitat 3	Vectors i coordenades en el pla	130
Unitat 4	La recta en el pla	168
Unitat 5	Sistemes d'inequacions lineals	220
Unitat 6	Programació lineal	262
Unitat 7	Límits i continuïtat de funcions	316
Unitat 8	Derivada d'una funció	368
Unitat 9	Aplicacions de la derivada	406
Unitat 10	Representació de funcions	458

OBJECTIUS

- Identificar els elements d'una matriu i classificar-la d'acord amb diferents criteris.
- Calcular la matriu suma i la matriu resta de dues matrius, o més, del mateix ordre.
- Trobar, en els casos en què sigui possible, el producte de dues matrius, o més, i també les potències de diferents ordres d'una matriu quadrada.
- Obtenir la matriu transposada d'una matriu donada.
- Determinar si una matriu és simètrica o antisimètrica.
- Determinar el rang d'una matriu per mitjà del mètode de Gauss.
- Obtenir la matriu inversa d'una de donada a partir de la definició de matriu inversa i pel mètode de Gauss-Jordan.

CONTINGUTS

- Elements d'una matriu. Identificació, classificació i utilització dels diferents tipus de matrius.
- Determinació de la igualtat de dues matrius.
- Càlcul de la matriu transposada. Matriu simètrica i antisimètrica.
- Operacions amb matrius:
 - Suma i resta de matrius. Propietats.
 - Producte d'una matriu per un nombre. Propietats.
 - Producte de matrius. Propietats.
- Determinació del rang d'una matriu analitzant-ne la dependència o la independència lineal de les files o les columnes.
- Càlcul del rang d'una matriu per mitjà del mètode de Gauss.
- Càlcul de la matriu inversa a partir de la seva definició.
- Càlcul de la matriu inversa utilitzant el mètode de Gauss-Jordan.
- Valoració de la utilitat de les matrius en diferents contextos reals.
- Gust per la resolució ordenada d'operacions amb matrius.
- Valoració de la necessitat d'efectuar amb cura els càlculs amb matrius.

CRITERIS D'AVUACIÓ

- Utilitzar els conceptes de matriu, element, dimensió i diagonal principal.
- Determinar la igualtat de dues matrius.
- Identificar els diferents tipus de matrius.
- Calcular la matriu transposada d'una de donada.
- Fer sumes, productes de matrius i multiplicacions d'una matriu per un nombre.
- Calcular el rang d'una matriu pel mètode de Gauss.
- Calcular la matriu inversa d'una matriu donada a partir de la seva definició o pel mètode de Gauss-Jordan.

2

Sistemes d'equacions lineals

OBJECTIUS

- Resoldre sistemes transformant-los en sistemes escalonats.
- Analitzar, discutir i resoldre pel mètode de Gauss sistemes d'equacions lineals.
- Expressar sistemes d'equacions lineals per mitjà de matrius.
- Analitzar la compatibilitat i la incompatibilitat dels sistemes d'equacions amb l'aplicació del teorema de Rouché-Fröbenius.
- Discutir la compatibilitat i resoldre sistemes d'equacions lineals homogenis.
- Discutir i resoldre sistemes amb un nombre diferent d'equacions i d'incògnites.
- Plantejar i resoldre problemes per mitjà de sistemes d'equacions lineals.

CONTINGUTS

- Sistemes d'equacions lineals. Sistemes d'equacions escalonats.
- Transformació d'un sistema en un d'escalonat equivalent i resolució d'aquest.
- Mètode de Gauss per solucionar i discutir sistemes d'equacions lineals.
- Teorema de Rouché-Fröbenius.
- Sistemes homogenis.
- Sistemes amb un nombre diferent d'equacions i d'incògnites.

CRITERIS D'AVUACIÓ

- Aplicar correctament el llenguatge algebraic per expressar situacions de la vida quotidiana.
- Obtenir sistemes d'equacions equivalents a un de donat mitjançant procediments diversos.
- Resoldre un sistema d'equacions transformant-lo en sistemes escalonats.
- Aplicar el mètode de Gauss per estudiar i resoldre sistemes.
- Resoldre sistemes d'equacions per mitjà de mètodes matricials.
- Discutir i classificar sistemes d'equacions amb l'aplicació del teorema de Rouché-Fröbenius.
- Discutir i resoldre sistemes d'equacions homogenis.
- Plantejar i resoldre problemes utilitzant sistemes d'equacions lineals.

OBJECTIUS

- Utilitzar el concepte de vector i els seus elements: mòdul, direcció i sentit.
- Distingir si dos vectors són equivalents i calcular les coordenades d'un vector coneguts els seus extrems.
- Efectuar operacions de suma de vectors i producte de vectors per un nombre real, i també combinacions lineals de vectors.
- Distingir si dos vectors en el pla són linealment dependents o independents i si formen base, i obtenir les coordenades d'un vector en una base.
- Obtenir el producte escalar de dos vectors i aplicar-lo al càlcul del mòdul d'un vector i de l'angle que formen dos vectors.

CONTINGUTS

- Vectors: mòdul, direcció i sentit.
- Ús del concepte de vector i els seus elements –mòdul, direcció i sentit– en diferents contextos i determinació de l'existència o no d'equivalència entre dos vectors.
- Operacions amb vectors.
- Elaboració de sumes de vectors, del producte d'un nombre per un vector, i obtenció de combinacions lineals de vectors de manera gràfica.
- Dependència lineal. Bases. Coordenades. Operacions amb coordenades.
- Determinació de la relació de linealitat entre dos vectors i càlcul de les coordenades d'un vector en una base qualsevol.
- Producte escalar. Propietats. Aplicacions del producte escalar.
- Obtenció del producte escalar de dos vectors i utilització de les seves propietats per resoldre diferents problemes: càlcul del mòdul d'un vector, de l'angle que formen dos vectors...
- Aplicacions dels vectors.
- Valoració de la presència de vectors i de sistemes de referència a la realitat.
- Interès per la recerca de situacions en les quals apareguin vectors per resoldre-ho.
- Gust per la realització dels càlculs amb vectors amb cura.
- Gust per la representació gràfica clara i precisa de vectors i punts en el pla.
- Valoració de l'ús dels productes de vectors per resoldre problemes de geometria del pla: determinació d'angles i d'ortogonalitat, i càlcul de distàncies.
- Valoració de les noves tecnologies per utilitzar-les en el càlcul vectorial i la seva representació gràfica.

CRITERIS D'AVUACIÓ

- Determinar el mòdul, la direcció i el sentit d'un vector, si és equivalent o no amb un altre vector, i calcular-ne els components.
- Sumar vectors, multiplicar-los per un nombre real i obtenir combinacions lineals de vectors de manera gràfica.
- Determinar la relació de linealitat entre dos vectors.
- Expressar un vector com a combinació lineal d'altres vectors donats i obtenir analíticament les coordenades d'un vector en una base qualsevol.
- Trobar el producte escalar de dos vectors de manera gràfica i analítica, i utilitzar les seves propietats per resoldre diferents problemes.
- Calcular la distància entre dos punts.
- Trobar l'angle de dos vectors i determinar vectors ortogonals a un de donat.

OBJECTIUS

- Reconèixer i trobar l'equació vectorial, les equacions paramètriques, l'equació contínua, l'equació general, l'equació explícita i l'equació punt-pendent d'una recta.
- Trobar punts de rectes sigui quina sigui l'equació.
- Reconèixer punts i direccions de rectes mitjançant la seva equació.
- Determinar la posició relativa de dues rectes en el pla.
- Emprar correctament els conceptes d'incidència, paral·lisme i intersecció entre rectes.
- Saber calcular correctament distàncies entre punts i rectes.

CONTINGUTS

- Vector director d'una recta.
- Equació vectorial d'una recta. Equacions paramètriques d'una recta.
- Equació contínua.
- Equació general.
- Equació explícita. Equació punt-pendent. Equació segmentària. Rectes paral·leles als eixos de coordenades.
- Determinació de diferents formes de l'equació d'una recta quan en coneixem un punt i el vector director o bé dos punts.
- Obtenció de punts d'una recta i el seu vector director quan en coneixem l'equació.
- Posicions relatives de dues rectes en el pla.
- Reconeixement de rectes paral·leles i perpendiculars.
- Feixos de rectes.
- Resolució de problemes d'incidència i paral·lisme mitjançant feixos de rectes.
- Distàncies d'un punt a una recta i entre dues rectes.
- Angles entre dues rectes.
- Disposició positiva per a l'estudi de la geometria analítica.
- Reconeixement de la necessitat de conèixer i poder determinar l'equació de la recta en el pla.
- Interès per la recerca de situacions en els quals calguin les condicions de paral·lisme i perpendicularitat entre rectes en el pla.
- Gust per la representació gràfica clara i precisa de punts i rectes en el pla.
- Valoració de les noves tecnologies per la utilitat que tenen en la geometria, especialment per a la representació gràfica.

CRITERIS D'AVUACIÓ

- Reconèixer i calcular l'equació vectorial d'una recta.
- Determinar les equacions paramètriques d'una recta a partir de l'equació vectorial.
- Calcular les equacions paramètriques d'una recta que passa per dos punts.
- Trobar les diferents formes d'expressió d'una recta a partir de punts i vectors.
- Transformar l'equació d'una recta donada en una altra forma.
- Distingir si un punt pertany o no a una recta donada.
- Determinar la posició relativa de dues rectes en el pla.
- Obtenir l'expressió d'un feix de rectes paral·leles a una de donada.
- Obtenir l'equació del feix de rectes que passen per un punt donat.
- Obtenir la distància entre un punt i una recta.
- Obtenir la distància entre dues rectes qualssevol.
- Obtenir l'angle que formen dues rectes.
- Trobar les coordenades del baricentre d'un triangle.

OBJECTIUS

- Resoldre gràficament inequacions i sistemes d'inequacions lineals amb dues incògnites.
- Representar gràficament el recinte determinat per un conjunt de restriccions i trobar la regió factible.
- Determinar, tant gràficament com analíticament, la solució òptima d'una regió factible.

CONTINGUTS

- Inequacions de primer grau amb dues incògnites.
- Sistemes d'inequacions de primer grau amb dues incògnites.
- Regions del pla determinades per inequacions. El conjunt de restriccions i la regió factible.
- La funció objectiu.
- Localització de solucions. Tipus de solucions.
- Resolució d'una inequació lineal o d'un sistema d'inequacions lineals amb dues variables.
- Representació d'un conjunt de restriccions i determinació de la seva solució o regió factible.
- Determinació gràfica i analítica dels punts que optimitzen una funció objectiu sotmesa a un conjunt de restriccions.
- Valoració del llenguatge algebraic i del gràfic com a llenguatges idonis per plantejar i resoldre un conjunt de restriccions.
- Interès per la representació gràfica clara i precisa d'un conjunt de restriccions en el pla i de la seva solució.
- Valoració dels recursos informàtics per la utilitat que tenen en la resolució gràfica d'un conjunt de restriccions.

CRITERIS D'AVUACIÓ

- Representar les regions del pla determinades per rectes.
- Resoldre una inequació lineal amb dues variables.
- Resoldre un sistema d'inequacions lineals amb dues variables i determinar-ne la regió factible.
- Determinar gràficament un conjunt de restriccions, representar la regió factible i trobar-ne els vèrtexs.
- Resoldre l'optimització d'una funció objectiu sotmesa a un conjunt de restriccions mitjançant l'estudi analític o gràfic dels vèrtexs de la seva regió factible, sigui acotada o no.

OBJECTIUS

- Plantejar problemes de programació lineal, definir-ne les variables, la funció que es vol optimitzar, i escriure el sistema d'inequacions que determinen les restriccions.
- Trobar les solucions d'un problema de programació lineal utilitzant mètodes algebraics i gràfics.
- Analitzar les solucions d'un problema de programació lineal i determinar si existeix solució òptima, i, en cas afirmatiu, si és única.
- Aplicar la programació lineal a la resolució de problemes reals: producció, dieta i transport.

CONTINGUTS

- Programació lineal.
- Mètodes de resolució.
- Tipus de solucions.
- Problema de la producció.
- Problema de la dieta.
- Problema del transport.
- Reconeixement de la presència de problemes de programació lineal en la realitat, obtenció de la funció objectiu corresponent, representació de la regió factible i determinació dels vèrtexs de la regió factible.
- Resolució de problemes de programació mitjançant el mètode algebraic: determinació de tots els vèrtexs de la regió factible i anàlisi del valor de la funció objectiu en cadascun.
- Resolució de problemes utilitzant el mètode gràfic: representació de rectes paral·leles a la funció objectiu i determinació de quina maximitza o minimitza aquesta funció.
- Anàlisi de les solucions d'un problema de programació.
- Plantejament i resolució de problemes reals de producció, de dieta i de transport per mitjà de programació lineal, utilitzant els mètodes algebraic i/o gràfic, i anàlisi de les solucions obtingudes.
- Curiositat per plantejar de manera matemàtica situacions quotidianes que es poden resoldre mitjançant programació lineal.
- Valoració positiva del llenguatge algebraic i del gràfic com a idonis per plantejar i resoldre problemes de programació lineal.
- Interès per l'origen de la programació lineal i valoració de la importància que ha tingut en la història de les matemàtiques de l'últim segle.
- Coneixement i valoració de la importància de la programació lineal en la resolució de problemes comuns de la societat actual: problema de la producció, de la dieta, del transport, etc.
- Sentit crític davant de les solucions obtingudes.
- Valoració dels recursos informàtics per la utilitat que tenen en la resolució de problemes de programació lineal.

CRITERIS D'AVUACIÓ

- Plantejar un problema de programació lineal, obtenir la funció objectiu, determinar les restriccions de les variables, representar la regió factible i trobar els punts extrems.
- Resoldre un problema de programació lineal algebraicament per mitjà de l'estudi dels vèrtexs de la seva regió factible.
- Resoldre un problema de programació lineal gràficament determinant la recta paral·lela a la funció objectiu que maximitza o minimitza el problema.
- Verificar que en un problema de programació lineal coincideix la solució trobada algebraicament amb la determinada gràficament.
- Analitzar les solucions d'un problema de programació lineal amb dues variables.
- Determinar si existeix o no la solució òptima d'un problema de programació lineal.
- Plantejar, resoldre i analitzar diversos problemes de la producció, la dieta i el transport.

OBJECTIUS

- Determinar el valor del límit d'una funció a l'infinit.
- Aplicar la definició de límit d'una funció a l'infinit a la resolució de límits de funcions.
- Aplicar les operacions amb límit –suma, diferència, producte i quocient– a la resolució de límits.
- Determinar el límit d'una funció en un punt i obtenir-ne els límits laterals.
- Resoldre indeterminacions de diferents tipus a l'hora de calcular límits.
- Analitzar la continuïtat d'una funció en un punt verificant si els límits laterals són iguals al valor que agafa la funció en aquell punt.
- Determinar els punts de discontinuïtat d'una funció i el tipus de discontinuïtat que presenten.

CONTINGUTS

- Límit d'una funció a l'infinit.
- Operacions amb límits.
- Límit de funcions potencials, exponencials i racionals.
- Límits infinits i a l'infinit. Indeterminacions.
- Límits laterals.
- Continuïtat d'una funció en un punt i en un interval.
- Tipus de discontinuïtats d'una funció.

CRITERIS D'AVUACIÓ

- Calcular el límit, si existeix, d'una funció a l'infinit.
- Aplicar les operacions amb límits per resoldre límits de funcions.
- Determinar el límit d'una funció en un punt.
- Calcular els límits laterals d'una funció en un punt.
- Resoldre indeterminacions dels tipus: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^∞ i $\frac{0}{0}$.
- Estudiar la continuïtat d'una funció en un punt.
- Estudiar la continuïtat d'una funció en un interval.
- Determinar les discontinuïtats d'una funció i estudiar el tipus al qual pertanyen.

OBJECTIUS

- Utilitzar la taxa de variació mitjana d'una funció per interpretar situacions de la vida quotidiana.
- Obtindre la derivada d'una funció en un punt, i les seves derivades laterals.
- Analitzar la continuïtat i la derivabilitat d'una funció en un punt considerant les relacions entre totes dues.
- Calcular la funció derivada d'una funció i les derivades successives.
- Calcular derivades per mitjà de les regles de derivació.
- Obtindre derivades d'operacions amb funcions.
- Aplicar la regla de la cadena al càlcul de la derivada d'una funció composta.
- Calcular la derivada de les funcions potencials, exponencials, logarítmiques i trigonomètriques.
- Fer servir les tècniques de derivació per calcular la derivada d'algunes funcions.

CONTINGUTS

- Taxa de variació mitjana.
- Derivada d'una funció en un punt.
- Derivades laterals.
- Continuïtat i derivabilitat.
- Funció derivada.
- Derivada de la suma i de la diferència de funcions.
- Derivada del producte i del quocient de funcions.
- Regla de la cadena.
- Derivades de funcions potencials, exponencials, logarítmiques, trigonomètriques i implícites.

CRITERIS D'AVUACIÓ

- Trobar la taxa de variació mitjana d'una funció en un interval.
- Determinar la derivada d'una funció en un punt, i les seves derivades laterals.
- Analitzar la continuïtat i la derivabilitat d'una funció en un punt.
- Obtenir la funció derivada d'una funció elemental.
- Calcular derivades successives d'una funció.
- Calcular derivades d'operacions amb funcions, i aplicar la regla de la cadena per trobar derivades de funcions compostes.
- Obtenir la derivada de les funcions potencials, exponencials, logarítmiques i trigonomètriques, i de funcions compostes d'aquestes.

OBJECTIUS

- Obtenir l'equació de la recta tangent i de la recta normal a una funció en un punt.
- Determinar els intervals de creixement i de decreixement d'una funció a partir del signe de la derivada primera.
- Obtenir els màxims i els mínims d'una funció a partir de les derivades primera i segona.
- Determinar els intervals de convexitat i de concavitat d'una funció, i els punts d'inflexió, per mitjà de l'estudi de la derivada segona.
- Conèixer els passos que cal seguir per optimitzar una funció donada.
- Optimitzar funcions.

CONTINGUTS

- Interpretació geomètrica de la derivada.
- Creixement i decreixement d'una funció. Màxims i mínims.
- Intervals de creixement i decreixement i màxims i mínims d'una funció a partir de les derivades primera i segona.
- Concavitat i convexitat. Punts d'inflexió.
- Estudi de la derivada segona per determinar els intervals de convexitat i concavitat i els punts d'inflexió d'una funció.
- Optimització. Resolució de problemes reals d'optimització de funcions.

CRITERIS D'AVUACIÓ

- Fer servir la interpretació geomètrica de la derivada per resoldre problemes.
- Obtenir l'equació de la recta tangent i de la recta normal a una funció en un punt.
- Determinar els intervals de creixement i de decreixement d'una funció.
- Obtenir els màxims i els mínims d'una funció.
- Determinar els intervals de concavitat i de convexitat d'una funció.
- Trobar els punts d'inflexió d'una funció.
- Resoldre problemes reals d'optimització de funcions: maximitzar i minimitzar.

OBJECTIUS

- Obtenir el domini i els punts de tall amb els eixos d'una funció.
- Determinar si una funció és simètrica.
- Estudiar si una funció és periòdica i, en el cas que ho sigui, calcular-ne el període.
- Determinar les asímptotes verticals, horitzontals i obliqües.
- Obtenir els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i els mínims, a partir de l'estudi de la derivada primera.
- Calcular-ne els intervals de concavitat i convexitat, i els punts d'inflexió, a partir de l'estudi de la derivada segona.
- Representar gràficament una funció.

CONTINGUTS

- Domini i punts de tall amb els eixos.
- Simetries.
- Periodicitat.
- Branques infinites. Asímtotes verticals, horitzontals i obliqües.
- Intervals de creixement i decreixement. Màxims i mínims.
- Intervals de convexitat i concavitat. Punts d'inflexió.
- Representació gràfica de funcions polinòmiques, racionals, amb radicals, exponencials, logarítmiques i definides a trossos.

CRITERIS D'AVUACIÓ

- Trobar el domini, les simetries i els punts de tall amb els eixos d'una funció.
- Determinar si una funció és periòdica.
- Calcular les asímptotes horitzontals, verticals i obliqües d'una funció, i determinar la posició relativa de la gràfica d'una funció respecte d'aquestes asímptotes.
- Trobar els intervals de creixement i de decreixement d'una funció.
- Obtenir els màxims i els mínims d'una funció.
- Determinar els intervals de concavitat i de convexitat d'una funció.
- Trobar els punts d'inflexió d'una funció.
- Representar gràficament una funció a partir de l'estudi de les seves propietats.

Competències bàsiques del batxillerat

Recomanacions del Parlament Europeu i del Consell sobre les competències clau per a l'aprenentatge permanent

El Parlament Europeu i el Consell fan diferents propostes i recomanacions sobre les competències clau per a l'aprenentatge permanent (desembre 2006). En aquest informe, les competències es defineixen com una combinació de coneixements, capacitats i actituds adequades al context. Les **competències clau** són aquelles que totes les persones precisen per a la seva realització i desenvolupament personals, així com per a la ciutadania activa, la inclusió social i l'ocupació.

El marc de referència estableix les següents vuit competències clau:

CC1. Comunicació en la llengua materna.

CC2. Comunicació en llengües estrangeres.

CC3. Competència matemàtica i competències bàsiques en ciència i tecnologia.

CC4. Competència digital.

CC5. Aprendre a aprendre.

CC6. Competències socials i cíviques.

CC7. Sentit de la iniciativa i esperit d'empresa.

CC8. Consciència i expressió culturals.

Aquestes competències es consideren totes elles importants, ja que cadascuna d'elles pot contribuir a l'èxit en la societat del coneixement. Moltes de les competències se solapen i entrellacen: determinats aspectes essencials en un àmbit donen suport a la competència en un altre.

La competència en les capacitats bàsiques fonamentals de la llengua, la lectura i la escriptura, el càlcul i les tecnologies de la informació i la comunicació (TIC) constitueixen el fonament essencial per a l'aprenentatge, mentre que totes les activitats d'aprenentatge se sustenten en la capacitat d'aprendre a aprendre. Hi ha una sèrie de temes que s'apliquen al llarg del marc de referència i que intervien en les vuit competències clau: el pensament crític, la creativitat, la capacitat d'iniciativa, la resolució de problemes, l'avaluació del risc, la presa de decisions i la gestió constructiva dels sentiments.

Contribució de les Matemàtiques aplicades a les ciències socials a les competències clau

La contribució de les Matemàtiques aplicades a les ciències socials a la consecució de les competències clau és fonamental i es materialitza en les correspondències següents:

[1-2] Competència en comunicació lingüística

La competència en comunicació és l'habilitat per expressar i interpretar conceptes, pensaments, sentiments, fets i opinions de forma oral i escrita (escoltar, parlar, llegir i escriure), i per a interactuar lingüísticament d'una manera adequada i creativa en tots els possibles contextos socials i culturals, com l'educació i la formació, la vida privada i professional, i l'oci.

Les Matemàtiques constitueixen un àmbit de reflexió i alhora de comunicació i expressió. La resolució de problemes consta d'una sèrie de processos i raonaments que ajuden a formalitzar el pensament, per la qual cosa dóna suport i fonament a la comprensió i expressió oral i escrita.

El llenguatge matemàtic és un vehicle de comunicació d'idees que destaca per la precisió en els seus termes i per la capacitat per a comunicar gràcies a un lèxic propi de caràcter sintètic, simbòlic i abstracte. En les Matemàtiques aplicades a les ciències socials del Batxillerat té una gran importància el desenvolupament d'habilitats i destreses que permeten expressar-se verbalment i per escrit en diferents situacions, comprnent i utilitzant termes, notacions i representacions matemàtiques.

[3a] La competència matemàtica

La competència matemàtica és l'habilitat per a desenvolupar i aplicar el raonament matemàtic amb la finalitat de resoldre diversos problemes en situacions quotidianes. Basant-se en un bon domini del càlcul, l'èmfasi se situa en el procés i l'activitat, encara que també en els coneixements. La competència matemàtica entranya –en diferents graus– la capacitat i la voluntat d'utilitzar maneres matemàtiques de pensament (pensament lògic i espacial) i representació (fórmules, models, construccions, gràfics i diagrames)

Les matemàtiques, per la seva pròpia naturalesa, es troben íntimament associades als aprenentatges que es plantegen i treballen en el procés d'ensenyament-aprenentatge de la matèria ja que les diferents formes de pensament matemàtic per a interpretar i descriure la realitat i actuar sobre ella, i l'habilitat per a utilitzar les eines matemàtiques en la comprensió de diferents fenòmens socials, formen part del propi objecte d'aprenentatge.

Tots els continguts estan orientats a aplicar habilitats i destreses que fan possible comprendre arguments i expressar i comunicar en el llenguatge matemàtic. Però també inclou actituds com la disposició per a utilitzar el pensament crític, per a mostrar una actitud flexible i oberta davant altres argumentacions i opinions i per a utilitzar procediments rigorosos de verificació i precisió.

[3b] Les competències bàsiques en ciència i tecnologia

La competència en matèria científica al·ludeix a la capacitat i la voluntat d'utilitzar el conjunt dels coneixements i la metodologia emprats per a explicar la naturalesa, amb la finalitat de plantejar preguntes i extreure conclusions basades en proves. Per competència en matèria de tecnologia s'entén l'aplicació d'aquests coneixements i metodologia en resposta al que es percep com desitjos o necessitats humans. Les competències científica i tecnològica comporten la comprensió dels canvis causats per l'activitat humana i la responsabilitat de cada individu com ciutadà.

Una gran part dels continguts de les matemàtiques té a veure amb aquesta competència del coneixement i interacció amb el món físic, econòmic, social i tecnològic. Cal ressaltar les aportacions de la modelització que té les matemàtiques, entenent aquesta modelització com el procés pel qual s'interpreta matemàticament una determinada situació per tal de conèixer el seu comportament i controlar-la.

La comprensió del món real està lligada, en gran mesura, al coneixement de la matemàtica. La matemàtica facilita la creació de models simplificats del món real que permeten una interpretació acotada d'aquest i alhora generen problemes adequats al moment educatiu de l'alumne/a tot facilitant el seu esperit crític i despertant la seva creativitat.

La modelització permet identificar i seleccionar les característiques rellevants d'una situació real, representar-la simbòlicament i determinar pautes de comportament, regularitats i invariants, a partir de les quals poder fer prediccions sobre l'evolució, la precisió i les limitacions del model.

[4] Competència digital

La competència digital comporta l'ús segur i crític de les tecnologies de la societat de la informació (TSI) per al treball, la comunicació i l'oci. Se sustenta en les competències bàsiques en matèria de TIC: l'ús d'ordinadors per a obtenir, avaluar, emmagatzemar, produir, presentar i intercanviar informació, i comunicar-se i participar en xarxes de col·laboració a través d'Internet.

Aquesta competència es desenvolupa dins de les matemàtiques per mitjà de l'ús de diferents recursos treballats al llarg dels cursos i etapes: recaptació d'informació, simulació de situacions, obtenció i tractament de dades, i altres situacions d'ensenyament aprenentatge, que constitueixen vies de tractament de la informació, i consegüentment treballen la sistematització, la reflexió crítica i l'habilitat per a comunicar amb eficàcia els resultats del propi treball i que contribuiran a un bon autoaprenentatge dels alumnes.

[5] **Aprendre a aprendre**

«Aprendre a aprendre» és l'habilitat per a iniciar l'aprenentatge i persistir en ell, per a organitzar el propi aprenentatge i gestionar el temps i la informació eficaçment, ja sigui individualment o en grups. Aquesta competència comporta ser conscient del procés d'aprenentatge propi i de les necessitats d'aprenentatge de cadascun, determinar les oportunitats disponibles i ser capaç de superar els obstacles amb la finalitat de culminar l'aprenentatge amb èxit. Aquesta competència significa adquirir, processar i assimilar nous coneixements i capacitats, així com buscar orientacions i fer-ne ús. El fet d'«aprendre a aprendre» fa que els alumnes es recolzin en experiències vitals i d'aprenentatge anteriors amb la finalitat d'utilitzar i aplicar els nous coneixements i capacitats en molt diversos contextos, com els de la vida privada i professional i l'educació i formació. La motivació i la confiança són crucials per a l'adquisició d'aquesta competència.

Les activitats de les matemàtiques, sobretot pel que fa al gran bloc de resolució de problemes facilita la capacitat d'aprendre a aprendre ja que participa de l'experimentació, observació, establiment de resultats conjecturals (hipòtesis) i d'arribar a resultats que es puguin confrontar amb altres. Aquest tipus d'actuació a l'aula de matemàtiques participa del que anomenem *proactivitat*, entesa com la capacitat per planificar, organitzar la feina, treballar en equip i que la comunicació d'aquest treball en equip sigui funcional.

Aprendre a prendre decisions està relacionat amb l'esperit crític i la visió global. Si a l'alumne li diem que un problema no té solució, poc haurà après. Si a més, fem que experimenti (amb un paper essencial de les TIC) i que descobreixi la utilitat de les diverses eines, haurà après molt més. Si un problema no es pot resoldre, potser variant les condicions o emprant més recursos, sí que serà resoluble. I aquesta dinàmica no és d'aplicació exclusiva a la matemàtica, sinó traslladable a altres àmbits, ja que l'alumne/a aprèn a no limitar la presa de decisions a unes condicions i recursos estàtics.

En definitiva, l'activitat matemàtica associada a la resolució de problemes no només permet validar l'aprenentatge de l'alumne, sinó que participa plenament en els processos de creixement personal i de relació amb els altres i permet incrementar la motivació de l'alumnat.

[6] **Competències socials i cíviques**

Aquestes competències inclouen les personals, interpersonals i interculturals i recullen totes les formes de comportament que preparen a les persones per a participar d'una manera eficaç i constructiva en la vida social i professional, especialment en societats cada vegada més diversificades, i, si escau, per a resoldre conflictes.

Aquestes competències també estan vinculades a les Matemàtiques a través del desenvolupament de les eines pròpies de la matèria per a estudiar i descriure fenòmens socials de l'entorn proper. L'ús d'aquestes eines mostra el seu paper per a conèixer i valorar problemes de la societat actual: fenòmens com la diversitat cultural, el respecte al medi ambient, la salut, el consum, la igualtat d'oportunitats entre els sexes o la convivència pacífica. La participació, la col·laboració, la valoració de l'existència de diferents punts de vista i l'acceptació de l'error de manera constructiva constitueixen també continguts d'actitud que cooperaran en el desenvolupament d'aquestes competències.

El tractament de diverses fonts d'informació, la simulació de diverses situacions, els processos de resolució de problemes i altres situacions realitzen una aportació significativa perquè serveixen en incrementar la capacitat de l'alumne en el seu desenvolupament futur.

[7] Competència en iniciativa i sentit d'empresa

Per sentit de la iniciativa i esperit d'empresa s'entén l'habilitat de la persona per a transformar les idees en actes. Està relacionat amb la creativitat, la innovació i l'assumpció de riscos, així com amb l'habilitat per a planificar i gestionar projectes amb la finalitat d'arribar a objectius. En aquesta competència es donen suport totes les persones, no només en la vida quotidiana, a casa i en la societat, sinó també en el lloc de treball, al ser conscients del context en el qual es desenvolupa el seu treball i ser capaços d'aprofitar les oportunitats, i és el fonament d'altres capacitats i coneixements més específics que precisen les persones que estableixen o contribueixen a una activitat social o comercial. Això ha d'incloure una conscienciació sobre els valors ètics i promoure la bona governança.

De la mateixa manera que en el punt [5], aquesta competència està relacionada amb una gestió proactiva dels projectes –resolució de problemes–. entesa com la capacitat per planificar, organitzar la feina i, en el treball en equip, liderar, delegar, informar o comunicar.

La proactivitat inclou també la capacitat per determinar els punts forts i febles d'un mateix, d'assumir riscos, així com d'avaluar les capacitats pròpies.

També està relacionada amb la motivació i la determinació per al compliment dels objectius ja siguin comuns o de grup.

En definitiva, l'activitat matemàtica associada a la resolució de problemes ja sigui de forma individual o en grup permet no només validar l'aprenentatge de l'alumne, sinó que participa plenament en els processos de creixement i d'iniciativa de l'alumne i contribueix a que desenvolupi majors cotes d'autonomia i iniciativa en els processos de presa de decisions.

[8] La competència en expressió cultural

La competència de consciència i expressió cultural és l'apreciació de la importància de l'expressió creativa d'idees, experiències i emocions de diferents mitjans, inclosa la música, les arts escèniques, la literatura i les arts plàstiques.

Aquesta competència cultural i artística també està vinculada als processos d'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques. Les matemàtiques sempre han constituït una gran expressió de la cultura. Conèixer la seva història, analitzar les diverses èpoques, la seva creativitat i sensibilitat i també els diferents pensaments divergents són importants i ressalten el valor formatiu de les matemàtiques en aspectes com la recerca de la bellesa i l'harmonia i l'estímul de la creativitat.

Competències bàsiques de les Matemàtiques aplicades a les ciències socials al batxillerat

Ser competent en matemàtiques requereix tenir uns coneixements, capacitats i habilitats que han de facilitar que l'alumne/a pugui i vulgui afrontar els reptes que se li plantegin.

Ser competent en matemàtiques és per tant, tenir les habilitats per desenvolupar i aplicar el raonament matemàtic amb la finalitat de resoldre problemes en situacions diverses.

Mètodes de treball a les matemàtiques

El currículum de les matemàtiques aplicades a les ciències socials explicita les competències específiques que s'hi treballen, així com la contribució de la matemàtica al desenvolupament de les competències bàsiques abans descrites.

El treball en les matemàtiques aplicades a les ciències socials se centra bàsicament en la **resolució de problemes**, la qual cosa permet desenvolupar a l'aula els cinc vessants següents de l'activitat matemàtica:

- Resoldre problemes matemàtics.
- Comunicar-se matemàticament.
- Raonar matemàticament.
- Valorar la matemàtica i la seva construcció.
- Tenir confiança en la pròpia capacitat matemàtica.

Aquests vessants han de ser sempre presents en l'activitat matemàtica i per això conformen els processos que caldrà desenvolupar de manera general al llarg de tota l'etapa.

a un dels grans objectius del batxillerat: la formació de persones autònomes i crítiques que sàpiguen acceptar els propis errors i, alhora, les virtuts de les altres persones. Mitjançant la resolució de problemes, la matemàtica ensenya a saber actuar quan ens equivoquem, i a no mantenir una postura inflexible a causa de no voler assumir els errors comesos. Ensenyar una fórmula o un algorisme i resoldre exercicis que són aplicació immediata hauria de requerir poc temps. Ara bé, experimentar, plantejar problemes, establir plans de treball, conjecturar, equivocar-se, corregir, tornar a errar per experimentar i conjecturar de nou fins a obtenir-ne una que sigui plausible, proposar la solució, redactar les conclusions i exposar-les en públic requereix temps per al qual cal una bona planificació.

La presència de calculadores i ordinadors en el context educatiu de la matemàtica permet les proves i els assajos en la cerca de patrons de comportament matemàtic, anàlogament al que es realitza en les ciències experimentals.

Les activitats dissenyades des d'aquest punt de vista i orientades cap a la construcció de coneixement, difícilment són possibles amb els mitjans tradicionals del llapis i el paper. I la potència que ens permeten aquests mitjans tecnològics no ha de quedar reduïda al càlcul: és possible i desitjable realitzar activitats en les quals la representació gràfica reveli regularitats i variacions.

Les noves tecnologies han de contemplar l'experimentació i la comunicació de les idees per donar pas al raonament matemàtic i a la comunicació oral i escrita d'aquestes idees.

Competències bàsiques del batxillerat i el seu desenvolupament

Escamilla i Lagares (2006) defineixen les competències bàsiques com capacitats relacionades, de manera prioritària, amb el saber fer; però des d'un vessant de funcionalitat i practicitat que no la redueix a un caràcter merament mecànic: el saber fer ha de tenir una **dimensió de caràcter teòric comprensiu** (elements de treball, tasques, formes de resolució) i una **dimensió de caràcter actitudinal** (en funció del bagatge de coneixements, la forma d'incorporar-los, la valoració de les diferents opcions).

Les competències formen un element de formació a què, per la seva complexitat, cal apropar-se de manera **convergent** (des de les diferents matèries) i **gradual** (des de diferents moments i situacions d'aprenentatge –cursos i etapes).

El desenvolupament d'aquestes competències bàsiques constitueix, en les nostres concrecions del currículum, una obligació i per tant s'han de concretar en enunciats més concrets en cada matèria definint els mètodes operatius que

identifiquin la corresponsabilitat de cada àmbit del currículum per a la seva adquisició i desenvolupament.

D'aquesta manera, mostrarem unes competències **específiques** com a elements d'acompliment en contextos determinats d'ensenyament-aprenentatge; quedaran supeditades, doncs, a les bàsiques.

Dins d'aquest entrellaçament que hem vist abans sobre les diferents competències clau, les matemàtiques aplicades a les ciències socials al batxillerat continuen el desenvolupament de les competències bàsiques de l'ESO i preparen per a la vida activa i per actuar de manera eficient en els estudis superiors i es poden sintetitzar en les següents **competències bàsiques** extretes d'aquests competències clau i descomptant la competència matemàtica que, evidentment, està incorporada en tota la resta:

[CB1] *Competència comunicativa: Interpretar i explicar amb símbols i eines matemàtiques els enunciats de problemes propis de les matemàtiques aplicades a les ciències socials: fenòmens socials, econòmics i humanístics, d'una forma clara, precisa i coherent (competències clau 1 i 2).*

Les Matemàtiques aplicades a les ciències socials desenvolupen una tasca fonamental per a l'evolució d'una personalitat formada i equilibrada que integra l'estímul de diferents capacitats, entre elles de les cognitives, en millorar el pensament reflexiu incorporant al llenguatge les formes d'expressió i raonament matemàtic i reconeixent, plantejant i resolent, per mitjà de diferents estratègies, situacions susceptibles de ser formulades en termes matemàtics.

L'ensenyament a través de la resolució de problemes parteix de l'experimentació i l'observació, facilita el descobriment, permet arribar a l'establiment de conjectures i, per tant, contribueix decisivament a l'assoliment de la competència comunicativa ja que l'alumne ha de defensar, oralment o per escrit, aquesta conjectura mitjançant arguments que l'han conduït a establir-la però sabent que no té la seguretat que sigui certa, la qual cosa és molt més propera a allò que succeeix en la vida real, que no pas la seguretat a què es pot arribar en determinats resultats obtinguts per l'aplicació rutinària de fórmules i algorismes.

Per això aquest enfocament metodològic de l'ensenyament de la matemàtica participa en l'assoliment de la competència comunicativa més enllà de l'àmbit d'acció disciplinària. L'ensenyament de la matemàtica a través de la resolució de problemes facilita la formulació d'activitats que enaminen l'estudiant cap a l'establiment de conjectures i llur contrast.

[CB2] *Competència en coneixement i interacció amb el món: Descriure esdeveniments, situacions, tècniques, mètodes, etc., procedents de l'àmbit científic, tecnològic, social, econòmic i altres de la vida quotidiana i del nostre entorn mitjançant el llenguatge científic adient relacionat amb les matemàtiques (competència clau 3b).*

L'ensenyament de la matemàtica ha de facilitar entorns d'aprenentatge que facilitin un pensament matemàtic que no sigui purament formal a través de la generalització de casos, replantejament de problemes per analogia amb altres, situacions concertes, etc. Aquest tipus de treball permet plantejar problemes inspirats en el món real i que es presenten en models simplificats. La seva resolució i posterior traducció al món real permet una interpretació del món que possibilita adoptar nous punts de vista i tenir-ne un coneixement més ampli.

[CB3] *Competència en gestió i tractament de la informació digital: Utilitzar de forma precisa i autònoma les diferents eines tecnològiques: calculadores numèriques i gràfiques, els ordinadors i els diferents programes d'aplicació matemàtica per tal de millorar la comprensió dels diferents continguts d'aquest nivell: matrius, equacions, càlcul d'expressions algebraïques i límits, derivades, gràfics de funcions i altres problemes de processament de dades (competència clau 4).*

Aquesta competència s'adquireix mitjançant l'ús de recursos diversos que es treballen al llarg del desenvolupament de la matèria: La cerca d'informació a través de fonts diverses (tradicionals o electròniques), i la seva posterior estructuració, és una competència necessària per a tot alumne en el món actual, i les activitats obertes com les que es proposen en aquest currículum requereixen sovint recursos tecnològics que fomenten l'autoaprenentatge de l'alumne.

Cal incidir en la comprensió dels processos matemàtics però procurant no caure en l'execució de rutines que amb tanta facilitat poden inundar el temps disponible dels alumnes. I la millor manera d'evitar-ho és fer-ne ús tot ensenyant, des de l'experimentació, amb les aplicacions que ens ofereixen les TIC.

Les noves tecnologies poden integrar-se en l'ensenyament de la matemàtica amb finalitats diametralment oposades. Tot tenint en compte la gran facilitat i freqüència dels alumnes en l'ús de les noves tecnologies, el professorat ha d'orientar el seu ús per tal que estiguin al servei de l'alumne i no aquest a disposició d'elles.

La selecció dels recursos tecnològics ha de permetre, a més, que siguin una eina que s'empri en la resolució de problemes per experimentar, observar, proposar conjectures i contrastar-les, en definitiva, una eina al servei de la creativitat. El disseny d'activitats que participen de la capacitació tecnològica i la competència digital són àmplies i és desitjable afavorir aquelles que faciliten el descobriment per part de l'alumne.

[CB4] *Aprendre a aprendre i competència en recerca: Formular hipòtesi sobre diferents fets i conceptes diversos per tal d'estudiar-los i analitzar-los des de diferents vessants de recerca per tal de millorar la capacitat de raonament lògic i matemàtic (competència clau 5).*

La resolució de problemes facilita la capacitat creativa i impulsa la competència en recerca. L'experimentació, l'observació, l'establiment de resultats conjecturals (hipòtesis), l'estudi de casos concrets sobre aquests tot acceptant-los o refutant-los, la reformulació de conjectures i la cerca d'arguments que donin transparència als resultats descoberts, són activitats que participen en l'adquisició de la competència en recerca. Les capacitats que potencia el currículum de matemàtiques faciliten l'establiment de raonaments quantitius sobre situacions de la vida real i sobre el món que ens envolta.

[CB5] *Competències socials, culturals i cíviques: Reflexionar i raonar de forma matemàtica –amb l'àlgebra, l'anàlisi, la geometria, etc.– sobre el coneixement de la cultura i de la història en l'anàlisi de situacions i fets procedents del nostre entorn natural, cultural, científic i tecnològic (competències clau 6 i 8).*

L'activitat matemàtica que genera la resolució de problemes ofereix una intensa contribució a la formació integral de l'alumne més enllà de l'àmbit disciplinari, en particular a l'assoliment de la competència personal i interpersonal.

Les Matemàtiques aplicades a les ciències socials desenvolupen una tasca fonamental per a l'evolució d'una personalitat formada i equilibrada que integra l'estímul de les capacitats personals i interpersonals, que ha d'estimular l'alumne a manifestar una actitud positiva davant la resolució de problemes mostrant confiança en la capacitat per a enfrontar-se a ells amb èxit i valorant les Matemàtiques com part integrant de la nostra cultura, des d'un punt de vista històric i des del seu paper en la societat actual, aplicant les competències matemàtiques adquirides per a analitzar i valorar fenòmens socials com la diversitat cultural, el

respecte al medi ambient, la salut, el consum, la igualtat de gènere o la convivència pacífica.

Les Matemàtiques aplicades a les Ciències Socials ha de permetre desenvolupar, en l'alumne, la capacitat de raonament i el sentit crític per a analitzar la realitat social en les seves diverses manifestacions econòmiques, artístiques, humanístiques, polítiques, etc., des d'una perspectiva matemàtica

[CB6] *Competència en autonomia i iniciativa: Utilitzar de forma autònoma i rigorosa les eines de l'àlgebra, l'anàlisi, i la geometria per tal de plantejar i resoldre problemes, argumentar tècniques i mètodes i detectar incorreccions de tipus lògic o procedimental que estimulin el raonament lògic i la capacitat per expressar idees amb arguments adients propis (competència clau 7).*

Un dels objectius de les matemàtiques és el d'impulsar i fomentar el desenvolupament de l'esperit emprenedor i la confiança en si mateix, la participació, el sentit crític, la capacitat d'iniciativa personal i de autonomia i la capacitat per a planificar, prendre decisions i assumir responsabilitats.

Tot el procés de recaptació de informació i el seu tractament per arribar a conclusions, contribueixen que l'alumne desenvolupi majors cotes d'autonomia i iniciativa.

Per descomptat, els propis processos de resolució de problemes realitzen una aportació significativa a l'avanç per part de l'alumne en autonomia i iniciativa ja que s'utilitzen per a planificar estratègies, assumir reptes i contribueixen a conviure amb la incertesa controlant al mateix temps els processos de presa de decisions.

No oblidem per aquesta competència els temes de la sistematització, la reflexió crítica i l'habilitat per a comunicar amb eficàcia els resultats del propi treball.

Les matemàtiques aplicades a les ciències socials treballen les habilitats relacionades amb l'establiment d'hipòtesi, l'aplicació d'estratègies i l'extrapolació dels resultats obtinguts a altres situacions semblants. Les activitats que es plantegin han d'afavorir la possibilitat d'aplicar les eines matemàtiques a l'anàlisi de fenòmens d'especial rellevància social.

Per tant l'avanç en iniciativa i autonomia personal per tal de triar el mètode més adequat o de buscar nous mètodes apareixerà en moltes de les competències lligades a temes de resolució de problemes, construccions espacials, càlcul d'àrees, etc.

Competències específiques que es treballen i relació amb les competències generals

BLOC I. ÀLGEBRA LINEAL I GEOMETRIA DEL PLA

Matrius

- Utilitzar el llenguatge algebraic en general i el relatiu a matrius en particular per a descriure i resoldre situacions problemàtiques en diferents contextos (CB1, CB2, CB3, CB6).
- Operar de diferents maneres amb les matrius i aplicar-les a l'estudi de determinats fenòmens (CB2 i CB6).
- Processar i comunicar informació mitjançant l'exposició de taules numèriques, gràfics i matrius i ser capaços de passar d'uns mètodes als altres (CB2, CB3, CB4 i CB5).
- Utilitzar aplicacions informàtiques per a operar amb matrius mitjançant les ordres adients en la resolució dels problemes d'àlgebra lineal, i d'altres (CB3, CB4 i CB5).
- Construir models mitjançant l'aplicació de procediments amb matrius (CB3 i CB4).
- Avançar en iniciativa i autonomia personal per tal de triar el mètode més adequat o de buscar nous mètodes en la resolució de problemes relacionats amb el càlcul matricial ja siguin de les matemàtiques o d'altres ciències (CB2, CB3, CB4 i CB6).

Sistemes d'equacions lineals

- Utilitzar el llenguatge algebraic per a descriure i resoldre situacions problemàtiques en diferents contextos (CB1, CB2, CB3 i CB6).
- Utilitzar les aplicacions informàtiques en la resolució de sistemes d'equacions lineals (CB3 i CB4).
- Analitzar la validesa dels resultats obtinguts al resoldre sistemes d'equacions lineals utilitzats per a descriure problemes en diverses situacions i interpretar-los dins del seu context (CB5 i CB6).
- Desenvolupar l'autonomia i iniciativa personal a l'hora de buscar nous mètodes en la resolució de problemes reals en qualsevol context (CB2, CB3, CB4 i CB6).

Vectors. La recta en el pla

- Utilitzar els vectors per a expressar magnituds físiques vectorials del món quotidià, com la força, l'acceleració o la velocitat (CB1, CB2 i CB5).

- Reconèixer la utilitat de les representacions vectorials i saber interpretar-les en múltiples aspectes de la vida diària: senyals de tràfic, mapes meteorològics, diagrames de flux, etc. (CB2, CB4, CB5 i CB6).
- Resoldre de manera clara, rigorosa i exacta, utilitzant vectors i representacions gràfiques, problemes propers tant de Geometria com de Física (CB2, CB3 i CB6).
- Utilitzar les noves tecnologies per a efectuar representacions precises de punts i vectors (CB3 i CB5).
- Expressar de forma rigorosa i en llenguatge matemàtic (algebraic), de diferents formes, la relació que verifiquen els punts d'una recta (CB1, CB4 i CB6).
- Reconèixer la utilitat de les diferents expressions de l'equació d'una recta, i usar en cada cas la més adequada (CB1, CB2, i CB6).
- Potenciar la creativitat dels alumnes permetent-los i suggerint-los diferents mètodes per a afrontar i resoldre un problema geomètric (CB4 i CB6).
- Resoldre de manera clara, precisa i exacta, utilitzant elements geomètrics i representacions gràfiques adequades, problemes geomètrics en el plànol mitjançant les noves tecnologies (CB2, CB3 i CB6).
- Calcular de forma rigorosa i en llenguatge algebraic, aplicant les fórmules adients, angles, distàncies i condicions de perpendicularitat en el pla. (CB1 i CB4).
- Efectuar representacions gràfiques precises, utilitzant el material adequat, de cadascun dels elements geomètrics en el pla (CB3, CB5 i CB6).
- Potenciar la creativitat dels alumnes, permetent-los i suggerint-los diferents mètodes per a afrontar i resoldre problemes mètrics de geometria plana (CB4 i CB6).
- Resoldre els problemes de manera clara i precisa, utilitzant elements geomètrics i representacions gràfiques adequades, mitjançant les noves tecnologies (CB3 i CB6).

BLOC II. PROGRAMACIÓ LINEAL

Programació lineal

- Utilitzar diferents tipus de llenguatge, algebraic i gràfic, en la descripció i resolució de situacions problemàtiques en diversos contextos (CB1, CB3 i CB6).
- Descriure les possibles solucions d'un problema donat mitjançant un conjunt de condicions i restriccions (CB1, CB2, CB4 i CB6).
- Resoldre problemes de diferents matèries mitjançant el plantejament i resolució de sistemes d'inequacions lineals i amb les tècniques pròpies de la programació lineal (CB2, CB3, CB4 i CB5).

- Interpretar i analitzar la regió factible associada a un problema de programació lineal, i escollir la que optimitza una determinada funció objectiu (CB1, CB2, CB4 i CB6, C8).
- Utilitzar els mitjans tecnològics en la resolució de problemes de programació lineal (CB3 i CB4).
- Conèixer el context històric en el què va sorgir i és va desenvolupar la programació lineal, i la gran influència d'aquesta matèria en la solució de molts problemes de la societat actual (CB2, CB4, CB5 i CB6).
- Potenciar l'autonomia i la iniciativa personal a l'hora de buscar mètodes nous en la resolució de problemes (CB4, CB5 i CB6).

BLOC III. ANÀLISI

Límits i continuïtat de funcions

- Conèixer i operar correctament l'aritmètica de l'infinit, les indeterminacions i els processos per a resoldre-les (CB4 i CB5).
- Utilitzar la calculadora i els programes informàtics, per tal d'obtenir expressions decimals per a estimar el valor d'un límit i per a estudiar les discontinuïtats i les asímptotes d'una funció (CB3 i CB6).
- Utilitzar taules, el llenguatge algebraic i el llenguatge gràfic per a transmetre informacions referents a la dependència, evolució i tendència d'una magnitud física o social respecte d'altra (CB1, CB3, CB5 i CB6).
- Utilitzar els conceptes de continuïtat i discontinuïtat en altres matèries, sobretot la Física on hi ha nombrosos exemples (CB2, CB4, CB5 i CB6).
- Utilitzar les noves tecnologies per a obtenir, analitzar i difondre informacions, relatives a temes científics que continguin taules de dades relacionades, o representacions gràfiques dels mateixos (CB1, CB2, CB3, CB4, CB5 i CB6).
- Utilitzar les noves tecnologies per a estudiar el comportament de certes variables en les proximitats d'un punt i la seua tendència a llarg termini (CB3, CB4 i CB6).
- Expressar tendències i comportaments a llarg termini de determinades variables de la demografia, l'economia i altres ciències, mitjançant el càlcul de límits (CB1, CB2, CB4 i CB5).

Derivades. Càlcul. Aplicacions

- Utilitzar el llenguatge algebraic i gràfic per a descriure la relació que existeix entre les variacions que es produeixen en una magnitud i les variacions que, com a conseqüència d'aquestes, apareixen en altra (CB1, CB5 i CB6).

- Conèixer l'evolució històrica del problema del càlcul de la tangent a una corba en un punt (CB2, CB4 i CB5).
- Utilitzar les funcions algebraicament i gràficament per a analitzar i explicar el comportament d'un fenomen donat per una expressió algebraica (CB1, CB4 i CB6).
- Interpretar de manera adequada les diverses informacions gràfiques existents en els mitjans de comunicació o científics relatives a l'evolució, en funció del temps, d'algunes variables de caràcter científic i d'altres (CB1, CB4, CB5 i CB6).
- Utilitzar la derivada d'una funció en un punt per a extraure i elaborar conclusions sobre el comportament d'aquesta funció en les proximitats d'aquest punt (CB1, CB2, CB5 i CB6).
- Abordar la resolució de problemes d'optimització siguin de caràcter científic o funcional amb l'ús de la terminologia adequada (CB2, CB5 i CB6).
- Utilitzar aplicacions informàtiques per a obtenir i representar funcions derivades mitjançant les seves corresponents expressions algebraiques (CB3, CB5 i CB6).
- Utilitzar aplicacions informàtiques que ens permetin la resolució de problemes matemàtics i d'altres ciències relacionats amb les derivades (CB3 i CB4).
- Conèixer el desenvolupament històric dels conceptes de diferencial i de derivada, apreciar l'aportació de determinats matemàtics a aquest tema i la seva influència en el desenvolupament científic i tecnològic posterior (CB4 i CB5).
- Reconèixer a les matemàtiques i a les seves aplicacions tecnològiques el desenvolupament de la humanitat en el coneixement de les diferents ciències per a aconseguir una millora en les seves condicions de vida (CB5).

Representació de funcions

- Utilitzar les funcions i especialment les seves gràfiques per a descriure, analitzar i determinar el comportament d'un fenomen donat per una expressió algebraica (CB1, CB3, CB4 i CB6).
- Utilitzar aplicacions informàtiques per a representar i analitzar el comportament local i global de les funcions i la seva posterior representació gràfica. (CB3, CB4 i CB6).
- Analitzar el comportament d'una funció mitjançant l'anàlisi de les seves propietats globals i locals (CB4 i CB6).
- Utilitzar les noves tecnologies per a representar i analitzar el comportament local i global de les funcions. (CB3, CB4 i CB6)

LITERATURA I MATEMÀTIQUES

L'escarabat d'or

[Juntament amb les restes d'un vaixell pirata, el protagonista va trobar un pergami amb un missatge ple de signes:

$(53 \pm \pm + 305))6^*; 4826)4 \pm .)4 \pm); 806^*; 48 + 8\pi 6 \dots$

Va sospitar que indicava la posició d'un tresor i va començar a desxifrar-lo.]

Vaig comptar tots els signes i vaig formar aquesta taula.

Signe	8	;	4	$\pm$	)	*	5	6	(	+	1	0	9	2	:	3	ζ	π	-	.
Freqüència	33	26	19	16	16	13	12	11	11	8	8	6	5	5	4	4	3	2	1	1

La lletra més freqüent en un text anglès és la *e*. Després, la sèrie és la següent: *a o i d h n r s t u y c f g l m w b k p q x z*. La *e* predomina fins al punt que és difícil trobar una frase d'alguna longitud de la qual no sigui el caràcter principal. Com que el signe predominant és el 8, començarem per assignar-lo a la *e* de l'alfabet natural. [...] Ara, de totes les paraules, *the* és la més usual; per tant, hem de veure si està repetida una combinació de tres signes, l'últim dels quals sigui el 8. [...] Hi ha ni més ni menys que set combinacions dels signes ; 4 8. Podem, per tant, suposar que ; representa *t*, 4 representa *h*, i 8 representa *e*.

Acabem de fixar una sola paraula; pero aquesta paraula ens permet també descobrir alguns principis i finals d'unes altres paraules. Vegem, per exemple, el penúltim cas en què apareix la combinació ;48 gaire al final del missatge. Sabem que el ; que ve immediatament després és el principi d'una paraula, i dels sis signes que segueixen a aquest *the*, en coneixem, al menys, cinc. Substituïm, doncs, aquests signes per les lletres que representen, i deixem un espai per al desconegut: *t_eeth*.

Provem l'alfabet complet per trobar una lletra que es pugui adaptar a aquest forat i formi una paraula amb sentit. Ens n'adonem que no existeix. Per tant, hem de descartar el grup *th* com a part d'aquesta paraula. Així doncs, reduïm els signes a *t_ee*.

Emprem l'alfabet, si cal, com abans, i arribem a la paraula *tree* (arbre), com l'única intel·ligible. Obtenim, així, una altra lletra, la *r* representada per (.

EDGAR ALLAN POE

L'escarabat d'or

Edgar Allan Poe

A tots ens agradaria trobar un *tesor* que resolgués els nostres problemes. De vegades no sabem exactament com hauria de ser. D'altres vegades ho sabem, però no tenim el mapa; o tenim un mapa amb les instruccions codificades. Això és el que va li va passar a en Legrand, el protagonista de *L'escarabat d'or*. Havia trobat el pergami al costat de les restes d'un vaixell pirata, l'havia posat al foc perquè surtís a la llum el missatge escrit amb tinta invisible, però només hi va aparèixer el reguitzell de signes que veiem en el paràgraf seleccionat.

Per la firma, de seguida va adonar-se que aquest missatge amagava un text en anglès. Desxifrar-lo era el preu que en Legrand havia de pagar pel seu tresor. I ho va aconseguir. En aquest paràgraf explica a un amic com va començar a desxifrar el missatge que el portaria fins al tresor amagat pels pirates. La seva estratègia inicial va ser comparar la freqüència dels signes en el missatge amb la freqüència de cada lletra en la llengua anglesa. El missatge desxifrat en anglès el podem trobar en qualsevol edició del relat, i traduït al català, literalment, seria:

«Un bon got a l'hostal del bisbe a la cadira del diable quaranta-un graus i tretze minuts Nord-est i des del Nord branca principal setè brot costat Est solar quart de l'ull esquerre del cap de mort una línia recta des de l'arbre a través de la bala cinquanta peus cap a fora».

Podem veure que el missatge encara té un aire misteriós i incompreensible, i, ara, el problema consisteix a interpretar-lo. Amb imaginació, constància i una mica de sort, en Legrand va entendre què significa aquest aparent galimaties va aconseguir desenterrar un tresor fabulós. Per saber com va fer-ho, s'ha d'acabar de llegir el relat, que és un dels més extraordinaris d'Edgar Allan Poe.

Una taula numèrica com $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ és un exemple de matriu. Serveix per *codificar* problemes o situacions com aquest: «Una empresa d'autobusos té tres línies: A, B i C. Dilluns van sortir 4 autobusos de la línia A, 5 de la B i 3 de la C. Dimarts en van sortir 1 de la A, 7 de la B i 3 de la C. Dimecres, 4 de la A, 5 de la B i 6 de la C. Representa en forma de matriu el tràfic d'aquesta empresa durant els tres dies».

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

A la matriu, les files representen els dies de la setmana, i les columnes cadascuna de les línies d'autobús.

ABANS DE COMENÇAR... RECORDA

001 Resol aquests sistemes.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x - 2y - z = 4 \\ x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -2y + z = -1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x - 5y = 7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x - 2y - z = 4 \\ x - 3y + 2z = 4 \end{cases} &\xrightarrow{x = -y - 3z} \begin{cases} 2(-y - 3z) - 2y - z = 4 \\ -y - 3z - 3y + 2z = 4 \end{cases} \\ &\rightarrow \begin{cases} -4y - 7z = 4 \\ -4y - z = 4 \end{cases} \\ &\quad \underline{-6z = 0} \\ &\rightarrow z = 0 \end{aligned}$$

$$-4y - z = 4 \xrightarrow{z=0} y = -1$$

$$x + y + 3z = 0 \xrightarrow{y=-1, z=0} x = 1$$

La solució del sistema és $x = 1, y = -1$ i $z = 0$.

$$\text{b) } \begin{cases} -2y + z = -1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x - 5y = 7 \end{cases} \xrightarrow{z = 2y - 1} \begin{cases} 2x + y - 3(2y - 1) = 0 \\ x - 5y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 5y = -3 \\ x - 5y = 7 \end{cases}$$

$$x - 5y = 7 \xrightarrow{x = -10} y = -\frac{17}{5}$$

$$z = 2y - 1 \xrightarrow{y = -\frac{17}{5}} z = -\frac{34}{5} - 1 = -\frac{39}{5}$$

La solució del sistema és $x = -10, y = -\frac{17}{5}$ i $z = -\frac{39}{5}$.

002 Resol aquests sistemes.

$$\text{a) } \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 3 \\ 3x - 4y = -1 \\ -x - 2y = -3 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2x + y = 5 \end{cases} \xrightarrow{x = 2y} 4y + y = 5 \rightarrow y = 1$$

$$y = 1 \xrightarrow{y = 2y} x = 2$$

$2x - 3y = 1 \xrightarrow{x=2, y=1} 4 - 3 = 1$. En aquest cas, la solució del sistema és vàlida.

$$\text{b) } \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$3x = 3 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 1$$

$$3x - 4y = -1 \xrightarrow{x=1, y=1} 3 - 4 = -1$$

$$-x - 2y = -3 \xrightarrow{x=1, y=1} -1 - 2 = -3$$

En aquest cas, la solució del sistema és vàlida.

ACTIVITATS

001 Escriu una matriu que compleixi les condicions següents:

- Dimensió 3×2 .
- $a_{32} = -a_{21} = a_{11} = 1$
- $a_{22} = a_{12} = -a_{31} = -2$

La matriu és:
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

002 Venen llistons de dues qualitats i de dues longituds. Els llistons grans de baixa qualitat costen 0,75 €, i els d'alta qualitat, 1 €, mentre que els llistons petits de baixa qualitat costen 0,45 €, i els d'alta qualitat, 0,60 €. Escriu aquestes dades en forma de matriu.

La matriu serà de dimensió 2×2 . Les files n'indiquen la qualitat; les columnes, la mida, i els elements de la matriu, el preu.

$$\begin{pmatrix} 0,45 & 0,75 \\ 0,60 & 1 \end{pmatrix}$$

003 Troba el valor de cada incògnita perquè les dues matrius siguin iguals:

$$\begin{pmatrix} x+1 & 3 & 0 \\ z+1 & x+2 & z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & y+1 & 0 \\ y+2 & 3 & y \end{pmatrix}$$

Perquè les matrius siguin iguals han de tenir la mateixa dimensió i tots els seus elements han de ser iguals.

Les dues matrius són de dimensió 2×3 .

$$x+1=2 \rightarrow x=1 \quad z+1=y+2 \rightarrow z=y+1 \rightarrow z=3$$

$$3=y+1 \rightarrow y=2 \quad x+2=3 \rightarrow x=1$$

$$0=0 \quad z-1=y \rightarrow z=1+2=3$$

La solució és $x=1, y=2$ i $z=3$.

004 Escriu un exemple de les matrius següents:

- Una matriu fila amb quatre columnes.
- Una matriu columna amb quatre files.
- Una matriu quadrada d'ordre 4.

Resposta oberta. Per exemple:

a) $A = (1 \quad 3 \quad -1 \quad 0)$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Matrius

005 Escriu matrius que compleixin les condicions següents:

a) Matriu diagonal d'ordre 4 que compleixi que $a_{ii} = 7$.

b) Matriu identitat amb tres files.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

006 Calcula $(A \cdot B)^t$, si A i B són les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} \right]^t = \left[\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^t \right] = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 15 & -40 \\ 57 & 24 & -27 \end{pmatrix}$$

007 Efectua l'operació amb matrius següent:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

008 Determina els elements que falten si $A + B = C$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & a & b \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & c & d \\ e & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} f & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & c & d \\ e & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4+c & 5+d \\ 5+e & a+3 & b-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 7 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f = 5$$

$$4 + c = 7 \rightarrow c = 3$$

$$5 + d = 6 \rightarrow d = 1$$

$$5 + e = 1 \rightarrow e = -4$$

$$a + 3 = -1 \rightarrow a = -4$$

$$b - 1 = 0 \rightarrow b = 1$$

009 Fes aquesta operació amb matrius:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -12 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & 15 & -13 \end{pmatrix}$$

010 Efectua aquestes operacions:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) $2(A - B) + 3C$

b) $(-2)(A - C) - 3(B + 2C)$

a) $2(A - B) + 3C = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 15 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$

b) $(-2)(A - C) - 3(B + 2C) = (-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -18 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$

011 Calcula l'operació amb matrius següent:

$$2 \cdot (3 \ 1 \ 4) \cdot 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot (3 \ 1 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot (3 \ 1 \ 4) \cdot 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 3 \cdot (3 \ 1 \ 4) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (6 \ 2 \ 8) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix} - (9 \ 3 \ 12) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ = 6 \cdot 0 + 2 \cdot 5 - 8 \cdot 10 - 9 \cdot 5 + 3 \cdot 1 - 12 \cdot 0 = 10 - 80 - 45 + 3 = -112$$

012 Troba el valor de x en aquesta igualtat de matrius:

$$(1 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} - (1 \ x \ 9) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} - (1 \ x \ 9) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x - 1 - (3 - x) = 0 \rightarrow 2x = 4 \rightarrow x = 2$$

013 Efectua els productes que siguin possibles entre les matrius A , B i C .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -13 & 11 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -5 & 2 & -8 \\ 8 & -3 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ 7 & 0 \\ -11 & 2 \end{pmatrix} \quad C \cdot A = \begin{pmatrix} -9 & 4 & -14 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \cdot C$ no es poden multiplicar ja que la dimensió de A és 2×3 i la de C és 2×2 .

$C \cdot B$ no es poden multiplicar ja que la dimensió de C és 2×2 i la de B és 3×2 .

Matrius

- 014 Determina la dimensió de la matriu que resulta d'aquesta operació i, després, comprova-ho efectuant les operacions.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La dimensió de la matriu que en resulta és 2×3 .

$$\begin{aligned} 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 9 & -1 \\ 12 & 15 & 3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 22 & 25 & -3 \\ 42 & 45 & 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 015 Comprova si es compleix que $A \cdot (B + C) = B \cdot A + C \cdot A$, en què:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si no és certa, aplica correctament la propietat.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La igualtat correcta és: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

- 016 Extreu en primer lloc factor comú de la matriu A i efectua l'operació $B \cdot A + C \cdot A$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Quina propietat has aplicat quan has extret factor comú?

Per extreure factor comú apliquem la propietat distributiva per la dreta.

$$B \cdot A + C \cdot A = (B + C) \cdot A$$

$$(B + C) \cdot A = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & -5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & -25 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$$

- 017 Completa els elements que falten a la matriu perquè les files siguin linealment dependents:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & b & 2 \\ -9 & a & 0 & c \end{pmatrix}$$

Perquè les dues files siguin dependents han de ser proporcionals, $F_2 = \lambda F_1$.

$$\begin{cases} -9 = 3\lambda \\ a = -\lambda \\ 0 = b\lambda \\ c = 2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = -3 \\ a = 3 \\ 0 = b \\ c = -6 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & b & 2 \\ -9 & a & 0 & c \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ -9 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

018 Determina el rang de les matrius següents:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

a) Cap de les tres files no és proporcional a una altra fila.

Comprovem si alguna fila és combinació lineal de les altres dues:

$$F_1 = \lambda F_2 + \mu F_3 \rightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda \\ -1 = \lambda + \mu \\ 3 = -\lambda + \mu \\ 0 = \lambda - \mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ -1 = \frac{1}{2} + \mu \\ 3 = -\frac{1}{2} + \mu \\ 0 = \frac{1}{2} - \mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \mu = -\frac{3}{2} \\ \mu = \frac{7}{2} \\ \mu = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Com que els valors de μ són diferents, el sistema no té solució. Cap fila és combinació lineal de les altres dues, així doncs, les tres files són linealment independents i, per tant, el rang de la matriu és 3.

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

b) Com que $F_2 = 2F_1$ i $F_3 = 3F_1$, totes les files són proporcionals. Així doncs, el nombre de files linealment independents és 1 i, per tant, el rang de la matriu és 1.

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} = 1$$

019

Calcula el rang per mitjà del mètode de Gauss: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 + \frac{5}{3}F_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & \frac{19}{3} & \frac{35}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 + \frac{19}{3}F_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{73}{3} \end{pmatrix}$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Matrius

020 Troba el rang mitjançant el mètode de Gauss: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 8 & -3 & -2 & 14 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 8 & -3 & -2 & 14 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 - 8F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 21 & -42 & -42 \\ 0 & 7 & -14 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - \frac{1}{3}F_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 21 & -42 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 8 & -3 & -2 & 14 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

021 Calcula, si és possible, la inversa d'aquestes matrius mitjançant la definició:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ 2a + 4c = 0 \\ 2b + 4d = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ 2(a + 2c) = 0 \\ 2(b + 2d) = 1 \end{cases}$$

El sistema no té solució. Per tant, no existeix la matriu inversa.

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3a - 5c = 1 \\ 3b - 5d = 0 \\ -a + 2c = 0 \\ -b + 2d = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a - 5c = 1 \\ 3b - 5d = 0 \\ a = 2c \\ b = 2d - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6c - 5c = 1 \\ 6d - 3 - 5d = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = 1 \\ d = 3 \end{cases}$$

Comprovem que $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ n'és la matriu inversa:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

022 Determina, si és possible, la inversa d'aquesta matriu: $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 2a - 3d + g = 1 \\
 2b - 3e + h = 0 \\
 2c - 3f + i = 0 \\
 3a + d + g = 0 \\
 \rightarrow 3b + e + h = 1 \\
 3c + f + i = 0 \\
 d = 0 \\
 e = 0 \\
 f = 1
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{l}
 2a + g = 1 \\
 2b + h = 0 \\
 2c + i = 3 \\
 3a + g = 0 \\
 3b + h = 1 \\
 3c + i = -1
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{l}
 2a + g = 1 \\
 3a + g = 0 \\
 2b + h = 0 \\
 3b + h = 1 \\
 2c + i = 3 \\
 3c + i = -1
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{array}{l}
 a = -1 \\
 b = 1 \\
 c = -4 \\
 g = 3 \\
 h = -2 \\
 i = 11
 \end{array}$$

Comprovem que $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$ n'és la matriu inversa:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

023 Calcula, pel mètode de Gauss-Jordan, la inversa d'aquestes matrius:

a) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 12 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 6 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{F_1 = \frac{1}{6}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{2}{6} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{b) } \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = F_2 + \frac{2}{3}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array} \right) \\
 \xrightarrow{F_1 = F_1 + 21F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & 0 & 15 & 21 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 = -\frac{1}{3}F_1 \\ F_2 = -3F_2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \end{array} \right)
 \end{array}$$

024 Troba, pel mètode de Gauss-Jordan, la inversa de la matriu:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrius

$$\begin{aligned}
 &\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = F_2 - \frac{2}{3}F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{F_3 = F_3 - \frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{\substack{F_1 = F_1 + \frac{9}{4}F_3 \\ F_2 = F_2 - \frac{15}{4}F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{4} & -\frac{15}{4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{\substack{F_1 = \frac{1}{3}F_1 \\ F_2 = \frac{1}{3}F_2 \\ F_3 = \frac{9}{4}F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & \frac{9}{4} \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

025 Classifica les matrius i determina'n la dimensió:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$A = (1 \ 2 \ 2) \rightarrow$ Matriu fila de dimensió 1×3

$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriu columna de dimensió 3×1

$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriu quadrada d'ordre 2

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriu diagonal d'ordre 2

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ Matriu unitat d'ordre 2

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriu triangular inferior d'ordre 2}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriu rectangular de dimensió } 2 \times 3$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriu triangular superior d'ordre 3}$$

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriu triangular inferior d'ordre 2}$$

026 Són triangulars les matrius següents? Per què?

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{No, perquè ni tots els elements situats per sobre de la diagonal principal ni tots els que hi estan situats per sota són zero.}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{No, perquè no és quadrada.}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Sí, perquè tots els elements situats per sobre de la diagonal són zero.}$$

027 Posa dos exemples d'aquestes matrius:

a) Matriu columna.

c) Matriu diagonal.

e) Matriu triangular superior.

b) Matriu fila.

d) Matriu quadrada.

f) Matriu triangular inferior.

Resposta oberta. Per exemple:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } (3 \quad -2 \quad 9)$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{f) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

028 Calcula la matriu transposada de cadascuna d'aquestes matrius:

$$A = (1 \quad 7 \quad 2)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrius

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad B^t = (0 \quad 1 \quad 7) \quad C^t = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D^t = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad E^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 9 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

029 Una empresa d'autobusos té tres línies: A, B i C.

Dilluns van sortir 5 autobusos a la línia A, 3 a la B i 4 a la C.

Dimarts van sortir 2 autobusos a la línia A, 1 a la B i 4 a la C.

Dimecres en van sortir 1 a la línia A, 3 a la B i 5 a la C.

Representa-ho en forma de matriu.

Ho representem en una matriu de dimensió 3×3 . Les files representen els dies de la setmana: dilluns, dimarts i dimecres. Les columnes corresponen a les línies A, B i C, respectivament. Cada element de la matriu és el nombre d'autobusos.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

030 Una fàbrica elabora dos tipus de productes, X i Y, que ven a tres empreses, A, B i C. Al principi distribuïa 1.000 unitats de cada producte a cadascuna, però aquest mes l'empresa A va rebre 600 unitats de X i 300 de Y; l'empresa B va rebre 400 unitats de X i 800 de Y, i l'empresa C va rebre 900 unitats de X i 700 de Y. Representa mitjançant una matriu les disminucions percentuals que s'han produït en la distribució dels productes a aquestes empreses.



Les files corresponen a cada tipus d'empresa, A, B i C, i les columnes corresponen al tipus de producte, X i Y. Cada element de la matriu és la disminució percentual de la producció.

$$\begin{aligned} 100 - 100 \cdot \frac{600}{1.000} &= 40 & 100 - 100 \cdot \frac{300}{1.000} &= 70 \\ 100 - 100 \cdot \frac{400}{1.000} &= 60 & 100 - 100 \cdot \frac{800}{1.000} &= 20 \\ 100 - 100 \cdot \frac{900}{1.000} &= 10 & 100 - 100 \cdot \frac{700}{1.000} &= 30 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} 40 & 70 \\ 60 & 20 \\ 10 & 30 \end{pmatrix}$$

031 Considera les matrius: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & -9 \end{pmatrix}$

Comprova amb aquestes matrius la propietat commutativa de la suma.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 12 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ 1 & 8 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 12 \\ 0 & 12 & -6 \end{pmatrix}$$

032 Considera les matrius: $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Quina relació hi ha entre $A - B$ i $B - A$?

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ -8 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A - B$ i $B - A$ són matrius oposades.

033 Considera les matrius: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
 Calcula.

a) $A + B - C$

c) $-A - B + C$

e) $A - (B - C)$

b) $A - B + C$

d) $-A + B + C$

f) $C - (A + B)$

a) $A + B - C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

d) $-A + B + C = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A - B + C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

e) $A - (B - C) = A - B + C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

c) $-A - B + C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

f) $C - (A + B) = -A - B + C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

034 Determina una matriu X que verifiqui que $A + X = B$, en què $A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
 i $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$.

$$A + X = B \rightarrow X = B - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

035 Considera les matrius: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Efectua, si és possible, els productes següents:

a) AB

b) BA

c) AC

d) BC

Matrius

$$a) AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -20 \end{pmatrix}$$

b) No es pot multiplicar B i A , ja que la dimensió de B és 2×3 i la de A és 2×2 .

c) No es pot multiplicar A i C , ja que la dimensió de A és 2×2 i la de C és 3×3 .

$$d) BC = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

036

Comprova que, en general, el producte de matrius no compleix la propietat commutativa multiplicant aquestes matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 26 & 7 & -20 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 6 & 10 & -6 \\ 5 & 5 & -19 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

037

Comprova que es compleix la propietat distributiva del producte de matrius respecte de la suma mitjançant aquestes matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(B + C) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 12 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$$

038

Considera les matrius: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Alguna de les operacions següents no es poden efectuar; raona per què. Efectua les que sigui possible de fer.

$$A + B \quad A^t + B \quad AB \quad AB^t$$

(Activitat de Selectivitat)

No es pot efectuar $A + B$, perquè el nombre de files i columnes de A i B no coincideixen.

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad A^t + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

AB^t no es pot efectuar, perquè el nombre de columnes de A no coincideix amb el nombre de files de B^t .

039 Amb les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, calcula, si és possible:

- a) $2A - 3B$ b) $2A \cdot 3B$ c) $A(B + C)$ d) $A - 3B$

$$\text{a) } 2A - 3B = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -16 \end{pmatrix} \quad \text{c) } A(B + C) = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 9 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } 2A \cdot 3B = \begin{pmatrix} 6 & -24 \\ 24 & -48 \end{pmatrix} \quad \text{d) } A - 3B = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 0 & -14 \end{pmatrix}$$

040 Amb les matrius següents: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, calcula, si és possible:

- a) ABC b) $2AB$ c) $A(B - C)$ d) $B \cdot 3C$

$$\text{a) } ABC = (AB)C = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -17 \\ 28 & 75 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } 2AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 18 & 28 \end{pmatrix}$$

c) No es pot efectuar aquesta operació, ja que B i C no es poden restar perquè no tenen la mateixa dimensió.

$$\text{d) } B \cdot 3C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 39 \\ 30 & 90 \\ 48 & 135 \end{pmatrix}$$

041 Amb les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, comprova que es compleixen les propietats següents:

a) $(A^t)^t = A$

b) $(A + B)^t = A^t + B^t$

c) $(AB)^t = B^t A^t$

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow (A^t)^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = A$$

$$\text{b) } A + B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow (A + B)^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} A^t + B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow (A + B)^t = A^t + B^t$$

$$\text{c) } AB = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow (AB)^t = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} B^t A^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 12 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \rightarrow (AB)^t = B^t A^t$$

Matrius

- 042 Determina quines matrius són simètriques o antisimètriques, i efectua els càlculs que indiquem, si és possible:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) $A^t C$ d) DD^t
b) CD^t e) $A^t C^t$
c) $(B + E)^t$ f) $(3E)^t$

Són simètriques les matrius A i B , i és antisimètrica la matriu C .

a) $A^t C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -7 \\ 1 & 10 & -17 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

b) No és possible, perquè C té 3 columnes i D^t té dues files.

c) $(B + E)^t = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

d) $DD^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

e) $A^t C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 7 \\ -1 & -10 & 17 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

f) $(3E)^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

- 043 Respon aquestes preguntes:

- a) Existeix sempre el producte $A^t \cdot A$, en què A és una matriu qualsevol?
Per què?
- b) El producte de dues matrius simètriques de la mateixa dimensió, també és una matriu simètrica? Per què?
- a) Si que existeix, perquè el nombre de columnes de A^t sempre és igual al nombre de files de A .
- b) En general no, perquè $(AB)^t = B^t A^t = BA$.

044 Considera les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula AB .

(Activitat de Selectivitat)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

045

Considera les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

Calcula AB i BA .

(Activitat de Selectivitat)

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -3 & -8 & -10 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -11 & -3 \end{pmatrix}$$

046

Considera les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$:

a) Calcula $A^2 + 2AB + B^2$.

b) Calcula $(A + B)^2$.

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}^2 &= \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 11 \\ 2 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right]^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$$

047

Considera aquesta matriu 2×2 : $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Calcula $A^t A$ i AA^t .

(Activitat de Selectivitat)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 29 \end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 26 \end{pmatrix}$$

Matrius

048 Amb les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Comprova la propietat associativa del producte de matrius.

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{aligned} A(B + C) &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 43 & 34 \end{pmatrix} \\ AB + AC &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 27 & 32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 16 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 43 & 34 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

049 a) Considera la matriu $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Escriu dues matrius d'ordre tres diferents i multiplica cadascuna d'aquestes matrius per D .

b) Com actua D quan la multipliquem per una matriu A qualsevol?

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 10 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10 & -15 & 5 \\ 25 & -20 & 10 \\ -5 & 0 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Actua igual com si multipliquéssim la matriu pel número 5, ja que $D = 5I$.

050 Indica tots els productes de dues matrius diferents que podem efectuar amb les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad E = (a \quad b)$$

(Activitat de Selectivitat)

Podem efectuar: $AC, AD, BA, BC, BD, CB, DE, EA, EC, ED$.

051 Considera les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determina la dimensió de la matriu M perquè el producte AMC es pugui efectuar.

b) Determina la dimensió de N perquè $C^t N$ sigui una matriu quadrada.

(Activitat de Selectivitat)

- a) La matriu M ha de tenir tantes files com columnes té A i tantes columnes com files té C ; per tant, serà de dimensió 3×3 .
- b) CC^t és $3 \times 2 \rightarrow C^t$ és 2×3 ; així doncs, N serà 3×2 .

- 052 Considera A una matriu de dimensió 5×3 , B una matriu de dimensió $m \times n$ i C una matriu de dimensió 4×7 . Si sabem que podem obtenir la matriu ABC , quines són les dimensions de B i de ABC ?

Per poder obtenir el producte, B ha de tenir tantes files com columnes tingui A , i tantes columnes com files tingui C . És a dir, la dimensió de B és 3×4 i la dimensió del producte ABC és 5×7 .

- 053 Donades dues matrius A i B de mida 2×2 . És certa la igualtat $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$? Si és cert, prova-ho, i si és fals, busca'n un contraexemple.

(Activitat de Selectivitat)

No és certa, perquè el producte no és commutatiu.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A + B)(A - B) &= A^2 - AB + BA - B^2 = \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 25 & 21 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 12 & 14 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$$

- 054 Amb les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

calcula $(A + B)^2$ i $A^2 + 2A \cdot B + B^2$. Per què no coincideixen els resultats? Quina seria la fórmula correcta per al quadrat d'una suma de matrius?

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & -4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 22 & 31 & -34 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -8 \\ 40 & 10 & -26 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -9 \\ 47 & 32 & -36 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Com que el producte de matrius no és commutatiu, el càlcul correcte és:

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

Tornem a calcular el segon membre per comprovar-ho:

$$\begin{aligned} A^2 + AB + BA + B^2 &= \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 16 & -6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 20 & 5 & -13 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -5 & 4 & -11 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 22 & 31 & -34 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matrius

055 Considera la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Determina la regla del càlcul de les potències

successives de A , és a dir, de A^n per a qualsevol nombre natural n .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad A^4 = IA = A$$

Si dividim n entre 3 tenim que $n = 3p + q$, on q és el residu de dividir n entre 3 i és un nombre natural més petit que 3.

$$A^n = A^{3p+q} = A^{3p}A^q = IA^q = A^q \quad \text{i} \quad A^q = \begin{cases} A & \text{si } q = 1 \\ A^2 & \text{si } q = 2 \\ I & \text{si } q = 0 \end{cases}$$

056 Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, troba A^3 , A^5 i A^n .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{En general: } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

057 Calcula $A^{2.000}$, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = 2^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2^3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En general:

- Si n és un nombre parell, tenim que: $A^n = 2^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Si n és un nombre senar, tenim que: $A^n = 2^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Així, tenim que: $A^n = 2^{2.000} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

058 Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, troba $A^{2.004}$.

(Activitat de Selectivitat)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{2.004} = (A^2)^{1.002} = I^{1.002} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

059 Considera la matriu 1×3 :

$$A = (1 \quad 2 \quad a)$$

Calcula el valor de a si saps que $AA^t = 5$.

(Activitat de Selectivitat)

$$AA^t = 1^2 + 2^2 + a^2 = a^2 + 5$$

$$AA^t = 5 \rightarrow a^2 + 5 = 5 \rightarrow a = 0$$

060 Considera les matrius $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Troba el valor, o els valors, de x de manera que $B^2 = A$.

b) Determina x perquè $AB = I_2$.

(Activitat de Selectivitat)

a) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$B^2 = A \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \rightarrow x = 1$$

b) $AB = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+1 \\ x+1 & x+2 \end{pmatrix}$

$$AB = I_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x+1 \\ x+1 & x+2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{No té solució.}$$

061 Donada la matriu 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

Calcula el valor de a si saps que AA^t és una matriu diagonal.

(Activitat de Selectivitat)

$$AA^t = \begin{pmatrix} a & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + 9 & 2a - 12 \\ 2a - 12 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + 9 & 2a - 12 \\ 2a - 12 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \rightarrow 2a - 12 = 0 \rightarrow a = 6$$

Matrius

062 Considera $A = \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & -y \end{pmatrix}$.

a) Calcula A^2 .

b) Calcula tots els valors de x i y per als quals es verifica que $A^2 = \begin{pmatrix} x+1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(Activitat de Selectivitat)

a) $A^2 = \begin{pmatrix} x^2 - 1 & -x - y \\ x + y & y^2 - 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x^2 - 1 & -x - y \\ x + y & y^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = x + 1 \\ x + y = 2 \\ y^2 - 1 = -1 \rightarrow y = 0 \end{cases}$

$x + y = 2 \xrightarrow{y=0} x = 2$

063 Determina els valors de x i y que fan certa la igualtat següent:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \begin{cases} x - y = 3 + 2x \\ 3x + 2y = 3y - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x - y = 3 \\ 3x - y = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5}{4} \\ y = \frac{-7}{4} \end{cases}$$

064 Considera les dues matrius, d'ordre 2×3 , $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ y & 3 & 5 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & x & 1 \\ -3 & z & x+z \end{pmatrix}$

en què x, y i z denoten valors numèrics desconeguts.

a) Determina, de manera raonada, els valors de x, y i $z \in \mathbb{R}$ de manera que $A = B$.

b) És possible calcular AB ? Raona la resposta.

(Activitat de Selectivitat)

a) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ y & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x & 1 \\ 3 & z & x+z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2 = x \\ y = 3 \\ 3 = z \\ x + z = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 3 \end{cases}$

b) No és possible, perquè el nombre de columnes de A no coincideix amb el nombre de files de B .

065 Considera les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix}$$

- a) Considera x i y dues variables, i a un paràmetre. Troba el sistema de dues equacions i dues incògnites que resulta quan plantejem $AB - C = D$.
 b) Estudia el sistema per als diferents valors de a .
 c) Troba una solució per a $a = 2$.

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{aligned} \text{a) } AB - C = D &\rightarrow \begin{pmatrix} ax + y \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} ax \\ y(1-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-ay \\ 1-a \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{cases} ax = 6-ay \\ y(1-a) = 1-a \end{cases} \end{aligned}$$

b) És compatible indeterminat per a $a = 1$.

És incompatible per a $a = 0$.

Per a la resta de valors de a és compatible determinat.

$$\text{c) } \begin{cases} 2x = 6 - 2y \\ -y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

066 En cadascuna de les matrius següents, determina mentalment quin és el nombre més gran de files i de columnes linealment independents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow 1$ fila i 3 columnes

$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow 3$ files i 1 columna

$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow 3$ files i 3 columnes (1a i 2a) i 2 files

$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 2$ files i 2 columnes

$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow 2$ files i 3 columnes

$F = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow 3$ files i 3 columnes

Matrius

067 Calcula el rang de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

El rang de A és 2, perquè la segona columna és proporcional a la primera.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 = C_2 - 4C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 2 \\ 2 & -6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 = C_3 - \frac{2}{7}C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 \\ 2 & -6 & \frac{12}{7} \end{pmatrix}$$

Com que aquesta matriu és escalonada per columnes, rang (B) = 3.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 = F_3 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rang}(C) = 2$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 = F_3 + 5F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rang}(D) = 3$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Com que aquesta matriu és escalonada, rang (E) = 3.

068 Quin és el nombre més gran de columnes linealment independents

de la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 = C_3 - 2C_1 - C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Com que el rang per columnes és 2, només hi ha dues columnes linealment independents.

069 Si saps que el rang de la matriu següent és 2, determina el valor de a .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ -11 & -4 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -1 \\ -11 & -4 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 = C_3 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & -8 \\ -11 & -4 & a+11 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 = C_3 + 4C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ -11 & -4 & a-5 \end{pmatrix}$$

Perquè el rang sigui 2, com que aquesta matriu és escalonada per columnes, l'element $a - 5$ ha de ser zero, per tant $a = 5$.

070 Troba el valor de k , si existeix, perquè el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 \\ 5 & k & -10 \\ 1 & 1/3 & -2 \end{pmatrix}$ sigui 1.

La tercera columna és proporcional a la primera; per tant, el rang és, com a molt, 2.

Perquè el rang sigui 1, la segona columna ha de ser proporcional a la primera,

però això és impossible perquè: $\frac{1}{-3} \neq \frac{1/3}{1}$.

Així doncs, no hi ha cap valor de k per al qual el rang sigui 1.

071 Una matriu quadrada d'ordre 3 té rang 2.

a) Quin és el rang de la matriu que en resulta quan traiem una fila?

b) Quin és el rang de la matriu que en resulta si eliminem una columna?

c) Què passaria en els casos anteriors si el rang de la matriu inicial fos 3?

a) El rang de la matriu és 2 si n'eliminem una fila que depèn linealment de les altres, i és 1 si les dues files que queden són proporcionals.

b) El rang de la matriu és 2 si n'eliminem una columna que depèn linealment de les altres, i és 1 si les dues columnes que queden són proporcionals.

c) En aquest cas, el rang sempre és 2, perquè les dues línies que queden són sempre linealment independents.

072 Calcula la matriu inversa de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrius

$$\cdot \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1=F_1+2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2=-F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\cdot \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2=F_2+5F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -11 & 5 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1=11F_1-2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} -11 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -11 & 5 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1=-\frac{1}{11}F_1 \\ F_2=-\frac{1}{11}F_2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{11} & -\frac{1}{11} \end{array} \right) \rightarrow B^{-1} = \left(\begin{array}{cc} -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \\ -\frac{5}{11} & -\frac{1}{11} \end{array} \right)$$

$$\cdot \left(\begin{array}{cc|cc} -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1=-\frac{1}{6}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow C^{-1} = \left(\begin{array}{cc} -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\cdot \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2=F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_3=4F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -2 & -1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2=\frac{1}{4}F_2 \\ F_3=-\frac{1}{8}F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\rightarrow D^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\cdot \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2=2F_2-F_3 \\ F_1=2F_1+F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_1=2F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1=\frac{1}{4}F_1 \\ F_2=\frac{1}{4}F_2 \\ F_3=-\frac{1}{2}F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\rightarrow E^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \bullet \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\substack{F_1 = F_1 + F_3 \\ F_2 = F_2 - 3F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = 2F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\substack{F_1 = \frac{1}{2}F_1 \\ F_2 = \frac{1}{4}F_2 \\ F_3 = -F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right) \rightarrow F^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \bullet \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\substack{F_1 = 7F_1 + F_2 \\ F_3 = 7F_3 - F_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 3 & -1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 = 10F_1 + 3F_3 \\ F_2 = 10F_2 + 3F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 70 & 0 & 0 & 49 & 7 & 21 \\ 0 & 70 & 0 & -21 & 7 & 21 \\ 0 & 0 & -20 & 3 & -1 & 7 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\substack{F_1 = \frac{1}{70}F_1 \\ F_2 = \frac{1}{70}F_2 \\ F_3 = -\frac{1}{20}F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{7}{20} \end{array} \right) \rightarrow G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{3}{20} & \frac{1}{20} & -\frac{7}{20} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\bullet \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 = \frac{1}{2}F_2 \\ F_3 = -\frac{1}{2}F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \rightarrow H^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\bullet I^{-1} = I$$

$$\bullet \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 = \frac{1}{3}F_1 \\ F_2 = \frac{1}{3}F_2 \\ F_3 = \frac{1}{3}F_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \rightarrow J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Matrius

073 a) Considera la matriu: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. Té inversa?

b) Calcula la inversa de la matriu: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(Activitat de Selectivitat)

a) No té inversa, perquè el seu rang és 1, ja que la segona fila és igual a la primera multiplicada per 2.

$$\begin{aligned} \text{b) } \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{F_2 = F_2 - 3F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{F_2 = \frac{F_2}{-2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

074 Considera aquesta matriu 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcula A^t i A^{-1} .

(Activitat de Selectivitat)

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

075 Considera les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -0 \\ 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -0 \end{pmatrix}$$

Troba:

a) $C + AB$ b) $C^{-1} + (AB)^{-1}$ c) $(C + AB)^{-1}$

(Activitat de Selectivitat)

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } C^{-1} &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{F_1 = F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$AB = C^{-1} \rightarrow (AB)^{-1} = C$$

$$C^{-1} + (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } C + AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (C + AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

076 Considera la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcula A^2 i $(A^2)^{-1}$.

(Activitat de Selectivitat)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A^2)^{-1} &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = F_2 - \frac{3}{7}F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{19}{7} & -\frac{3}{7} & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{F_1 = F_1 - \frac{21}{19}F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 0 & \frac{28}{19} & -\frac{21}{19} \\ 0 & \frac{19}{7} & -\frac{3}{7} & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{\substack{F_1 = \frac{F_1}{7} \\ F_2 = \frac{7F_2}{19}}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{19} & -\frac{3}{19} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{19} & \frac{7}{19} \end{array} \right) \rightarrow (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{19} & -\frac{3}{19} \\ -\frac{3}{19} & \frac{7}{19} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

077 Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula $(A^{-1})^{-1}$ i $B^{-1}B$.

Per què obtenim aquest resultat?

Per la definició de matriu inversa: $(A^{-1})^{-1}A^{-1} = I$. Si multipliquem a la dreta per A els dos membres, obtenim: $(A^{-1})^{-1} = A$.

Per la definició de matriu inversa: $B^{-1}B = I$.

078 Considera les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Comprova que $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

b) Calcula $(B^2)^{-1}$, de la manera més ràpida possible.

$$\text{a) } (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } (B^2)^{-1} = (BB)^{-1} = B^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrius

079 Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, calcula $(A^t A^{-1})^2 A$.

(Activitat de Selectivitat)

$$(A^t A^{-1})^2 A = A^t A^{-1} A^t A^{-1} A = A^t A^{-1} A^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 3 & 4 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -2 & | & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 = F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2 & 1 \\ 0 & -2 & | & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 = -\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2 & 1 \\ 0 & 1 & | & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^t A^{-1} A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & -1/2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 11/2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

080 Considera les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Troba el producte de A per B .
- Calcula la matriu inversa del producte de A per B .
- Troba el producte de la inversa de B per la inversa de A . Quina relació hi ha entre aquesta matriu i la de l'apartat anterior? Justifica la resposta.

(Activitat de Selectivitat)

$$a) AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b) (AB)^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 2 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & | & 1 & 0 \\ 0 & -1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 = F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -1 & 1 \\ 0 & -1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = -F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -1 & 1 \\ 0 & 1 & | & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c) A^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 2 & 3 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & -1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 = F_1 + 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -3 & 2 \\ 0 & -1 & | & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = -F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -3 & 2 \\ 0 & 1 & | & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 = F_1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Són matrius iguals, ja que es verifica:

$$B^{-1} A^{-1} \cdot (AB) = B^{-1} A^{-1} AB = B^{-1} IB = B^{-1} B = I \rightarrow B^{-1} A^{-1} = (AB)^{-1}$$

081 Considera les matrius: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

Calcula $A^{-1}(B - A^t)$.

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{aligned}
 A^{-1} &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{F_1 = \frac{F_1}{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 B - A^t &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\
 A^{-1}(B - A^t) &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

082 Considera les matrius: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Calcula $((A^t B - 2I_2)^{-1})$ (I_2 és la matriu unitat d'ordre 2 i A^t és la transposada de A).

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{aligned}
 A^t &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & A^t B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 A^t B - 2I_2 &= \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
 (A^t B - 2I_2)^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\
 ((A^t B - 2I_2)^2)^{-1} &\rightarrow \text{No existeix, perquè el seu rang és 1.}
 \end{aligned}$$

083 Considera la matriu: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcula $AA^t - 5A^{-1}$, en què A^t i A^{-1} són les matrius transposada i inversa de A , respectivament.

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{aligned}
 AA^t &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \\
 \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{F_2 = F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = 5F_1 - 2F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{F_1 = \frac{F_1}{5}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = \frac{F_2}{5}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/5 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \\
 AA^t - 5A^{-1} &= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 3/5 & -2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Matrius

084 Considera la matriu 2×2 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calcula el valor de a si saps que no existeix la matriu inversa de A .

(Activitat de Selectivitat)

Si no existeix la inversa, el rang de A és 1; per tant, les dues files són proporcionals i resulta que:

$$\frac{1}{2} = \frac{a}{4} \rightarrow a = 2$$

085 Considera les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

- a) Estudia, en funció dels valors reals de k , si la matriu BA té inversa.
b) Estudia el mateix per a la matriu AB .

(Activitat de Selectivitat)

$$a) \quad BA = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

No té inversa quan les files són proporcionals.

$$\frac{k}{3} = \frac{1}{k+2} \rightarrow k^2 + 2k = 3 \rightarrow k^2 + 2k - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = 1 \end{cases}$$

Per a un valor de k diferent d'1 i -3 , la matriu té inversa.

$$b) \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 3k & k & 2+2k \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} k & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3k & k & 2+2k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_1 = F_2 - (1+k)F_3 \\ F_1 = F_1 - \frac{F_3}{2}}]{\substack{F_2 = F_2 - (1+k)F_3 \\ F_1 = F_1 - \frac{F_3}{2}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} k - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2k - 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 - k \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_1 = F_1 - \frac{F_2}{2}}]{\substack{F_1 = F_1 - \frac{F_2}{2}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{k}{2} \\ 2k - 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 - k \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Com que el rang de la matriu és 2, la matriu AB mai no té inversa.

086 Donada la matriu $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, calcula el valor de b perquè $B^2 = I_2$.

(Activitat de Selectivitat)

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+b & b^2 \end{pmatrix} \quad B^2 = I_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+b & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow b = -1$$

- 087 Calcula els valors de a per als quals la inversa de la matriu $A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$ coincideix amb la seva transposada.

(Activitat de Selectivitat)

$$A = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix} \quad A^t = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} a & -4 \\ 4 & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } A^{-1} = A^t &\rightarrow \frac{1}{5} \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} a & -4 \\ 4 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{25} \begin{pmatrix} a^2 + 16 & 0 \\ 0 & a^2 + 16 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{a^2 + 16}{25} = 1 \rightarrow a^2 + 16 = 25 \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

- 088 Considera la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x + 2 \end{pmatrix}$.

- a) Troba els valors de x per als quals es verifica $A^2 = 2A$.
b) Per a $x = -1$, troba A^{-1} . Comprova'n el resultat calculant AA^{-1} .

(Activitat de Selectivitat)

$$\text{a) } A^2 = \begin{pmatrix} 4 & x^2 + 4x \\ 0 & x^2 + 4x + 4 \end{pmatrix} \quad 2A = \begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 0 & 2x + 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^2 = 2A &\rightarrow \begin{pmatrix} 4 & x^2 + 4x \\ 0 & x^2 + 4x + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 0 & 2x + 4 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x = 2x \\ x^2 + 4x + 4 = 2x + 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 0 \\ x^2 + 2x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x^2 + 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = F_1 + F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = \frac{F_1}{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 089 És possible que una matriu de mida 3×2 coincideixi amb la seva transposada? I amb la seva inversa?

(Activitat de Selectivitat)

No pot coincidir amb la seva transposada, ja que no tenen el mateix nombre de files i columnes. I no pot coincidir amb la seva inversa, perquè no té inversa: només tenen inversa les matrius quadrades.

Matrius

090 Donades les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Troba el valor o els valors de x de manera que $B^2 = A$.

b) Igualment perquè $B + C = A^{-1}$.

c) Determina x perquè $A + B + C = 3I_2$.

(Activitat de Selectivitat)

$$a) B^2 = \begin{pmatrix} x^2 + 1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix}$$

$$A = B^2 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix} \rightarrow x = 1$$

$$b) B + C = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ x-1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B + C = A^{-1} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ x-1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow x = 0$$

$$c) A + B + C = \begin{pmatrix} 3 & x \\ x & 3 \end{pmatrix}$$

$$3I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A + B + C = 3I_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & x \\ x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow x = 0$$

091 Considera les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} -x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula, si existeix, la matriu inversa de B .

b) Si $AB = BA$ i $A + A^t = 3I_2$, calcula x i y .

(Activitat de Selectivitat)

$$a) B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_1 = -F_1 \\ F_2 = \frac{F_2}{2}}]{\substack{F_1 = -F_1 \\ F_2 = \frac{F_2}{2}}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$BB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } AB &= \begin{pmatrix} -x+y & 2y \\ x+y & 2x \end{pmatrix} \\
 BA &= \begin{pmatrix} -x-y & -y \\ x-2y & y+2x \end{pmatrix} \\
 AB = BA &\rightarrow \begin{pmatrix} -x+y & 2y \\ x+y & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-y & -y \\ x-2y & y+2x \end{pmatrix} \rightarrow y = 0 \\
 A + A^t &= \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} \\
 3I_2 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 A + A^t = 3I_2 &\rightarrow \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow x = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

092 Suposa que A és una matriu 2×3 i B és una matriu 3×2 . Té sentit escriure $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$?

(Activitat de Selectivitat)

No té sentit, ja que, tot i que AB és una matriu quadrada 2×2 i sí que pot tenir inversa, les matrius A i B no són quadrades i no poden tenir inversa.

093 Considera les matrius $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcula una matriu X que compleixi les igualtats següents.

$$\begin{array}{llll}
 \text{a) } A + X = B & \text{c) } 2A + X = B & \text{e) } A + X = 2B & \text{g) } A - X = -B \\
 \text{b) } A - X = B & \text{d) } 2A - X = B & \text{f) } A - X = 2B & \text{h) } -A - X = B
 \end{array}$$

$$\text{a) } X = B - A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e) } X = 2B - A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } X = A - B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{f) } X = A - 2B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } X = B - 2A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{g) } X = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } X = 2A - B = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{h) } X = -A - B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

094 Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -0 & -1 \\ 3 & -1 & -0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

resol les equacions matricials següents:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a) } -2A - X = B & \text{d) } 2A + 2X = B & \text{g) } \frac{1}{2}A - X = B \\
 \text{b) } A + 2X = B & \text{e) } A + 2X = 2B & \\
 \text{c) } A - 2X = B & \text{f) } A + \frac{1}{2}X = B & \text{h) } \frac{1}{2}A + 2X = B
 \end{array}$$

Matrius

$$\begin{array}{ll} \text{a) } X = -2A - B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & -1 & -2 \\ -5 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{e) } X = \frac{2B - A}{2} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-5}{2} & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ \text{b) } X = \frac{B - A}{2} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} & \text{f) } X = 2(B - A) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & -2 \\ -8 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{c) } X = \frac{A - B}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{-3}{2} & 0 \end{pmatrix} & \text{g) } X = \frac{A}{2} - B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{-5}{2} & 0 \end{pmatrix} \\ \text{d) } X = \frac{B - 2A}{2} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ -2 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{-7}{2} & 2 & 0 \end{pmatrix} & \text{h) } X = \frac{B - \frac{A}{2}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-5}{4} & \frac{5}{4} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

095

Calcula la matriu X solució de l'equació: $2X + \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{aligned} 2X + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 2X + \begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -9 & -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ \rightarrow 2X &= \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -14 & 15 \\ -9 & -11 \end{pmatrix} \\ \rightarrow 2X &= \begin{pmatrix} 13 & -11 \\ 13 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & \frac{-11}{2} \\ \frac{13}{2} & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

096

Considera $6A + 2I = B$ una expressió matricial, en què B denota una matriu quadrada d'ordre 2×2 , tal que $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ i I és la matriu unitat d'ordre corresponent.

Es demana:

- Quina dimensió té la matriu A ?
- Determinar els elements que integren la matriu A , és a dir, $a_{ij} \in A_{p \times q}$.
- Calcular $A + 2I$.

(Activitat de Selectivitat)

a) La matriu A té dimensió 2×2 .

$$\text{b) } 6A + 2I = B \rightarrow A = \frac{B - 2I}{6} = \frac{\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{6} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A + 2I = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

097 Troba una matriu X que verifiqui $X - B^2 = A \cdot B$, on:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

(Nota: $A \cdot B$ denota el producte de A per B .)

(Activitat de Selectivitat)

$$X - B^2 = AB \rightarrow X = AB + B^2 \rightarrow X = (A + B)B$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 13 & 10 & 25 \\ 0 & 0 & 48 \end{pmatrix}$$

098 Resol els sistemes matricials següents:

$$\text{a) } \begin{cases} 2X + Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \\ 3Y - X = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{array}{l} 2X + Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ + \\ X - Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 4/3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 4/3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -2 \\ -11/3 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrius

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \begin{aligned} X + Y &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \\ + \quad & \\ -X + 3Y &= \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 12 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \\ \hline & 4Y = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -16 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -16 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \\ & X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 099 Calcula dues matrius quadrades A i B si saps que $2A + 3B = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ i que $A - B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{aligned} 2A + 3B &= \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ A - B &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \rightarrow 5A = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 100 Determina les matrius A i B que verifiquen:

$$2A - B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -7 \\ -6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Justifica la resposta.

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{aligned} 2A - B &= \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\ A + 2B &= \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \rightarrow 5A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 10 \\ 15 & 5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2A - B = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}} B = 2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- 101 Si saps que $2A - B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 12 & 7 \end{pmatrix}$ i que $3A + 2B = \begin{pmatrix} 11 & 25 & 20 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix}$:

- Quines són les dimensions de A i B ?
- Calcula les matrius A i B .

(Activitat de Selectivitat)

a) A i B són matrius de dimensió 3×2 .

$$\left. \begin{aligned} \text{b) } 2A - B &= \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ 3A + 2B &= \begin{pmatrix} 11 & 25 & 0 \\ 20 & 10 & 35 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \rightarrow 7A = \begin{pmatrix} 21 & 49 & 14 \\ 28 & 14 & 49 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$2A - B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}} B = 2 \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 12 & 7 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\ \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

102 Aïlla la matriu X de l'equació $AX = B$ i calcula-la si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

i $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Multipliquem per l'esquerra els dos membres de l'equació per la inversa de A , que existeix perquè $\text{rang}(A) = 2$.

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

103 Calcula la matriu A que fa que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} -12 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

104 Troba la matriu A que verifica $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix}$

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{-3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 28 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{-3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix}$$

Matrius

105 Considera les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Esbrina si existeix una matriu C que verifiqui $BC = A$, i, si existeix, troba-la.

(Activitat de Selectivitat)

Si té solució, es verifica que: $BC = A \rightarrow C = B^{-1}A$

Això no és possible, ja que B té rang 1 i, per tant, no té inversa i no hi ha solució.

106 Troba de manera raonada la matriu X que verifica $AX = 2B - C$, en què:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$$

(Activitat de Selectivitat)

$$AX = 2B - C \rightarrow X = A^{-1}(2B - C)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{5} \\ 1 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$2B - C = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(2B - C) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{5} \\ 1 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -15 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

107 Considera les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 16 & 25 \end{pmatrix}$$

a) Aïlla X en l'equació matricial $A^2X = B$.

b) Calcula X .

(Activitat de Selectivitat)

$$a) A = (A^2)^{-1}B$$

$$b) A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{25} & \frac{-1}{25} \\ \frac{-3}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix}$$

$$X = (A^2)^{-1}B \rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{4}{25} & \frac{-1}{25} \\ \frac{-3}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 16 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

108 Considera les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula $A^{-1}(2B + 3I_2)$.

b) Determina la matriu X perquè $XA = A + I_2$.

(Activitat de Selectivitat)

$$\text{a) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2B + 3I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}(2B + 3I_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -9 & -14 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } XA = A + I_2 \rightarrow X = (A + I_2)A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad A + I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = (A + I_2)A^{-1} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

109 Troba una matriu X que verifiqui la igualtat $AX = B$, en què $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. La matriu X també verifica la igualtat $XA = B$?

(Activitat de Selectivitat)

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-3}{2} \\ \frac{-1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$XA = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \neq B$$

No verifica la segona igualtat.

110 Considera les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula les matrius $M = AB$ i $N = BA$.

b) Calcula P^{-1} , si $P = (N - I)$, on I representa la matriu identitat.

c) Resol el sistema $PX = C$.

(Activitat de Selectivitat)

Matrius

$$a) M = (2 \ 1 \ -1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$N = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 1 \ -1) = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -4 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b) P = N - I = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}$$

$$c) PX = C \rightarrow X = P^{-1}C \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

111 Calcula la matriu X tal que $AX = A + B$, en què:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Activitat de Selectivitat)

$$AX = A + B \rightarrow X = A^{-1}(A + B)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}(A + B) \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

112 Considera les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 16 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Determina la matriu X que verifica l'equació $AX = BC$. Justifica la resposta.

(Activitat de Selectivitat)

$$AX = BC \rightarrow X = A^{-1}BC$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \\ 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \quad BC = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 16 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & 28 \\ 95 & 37 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}BC \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 5 \\ 3 & -2 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 & 28 \\ 95 & 37 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 35 & 13 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$$

113 Considera les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcula la matriu $C = BA - A^t B^t$.

b) Troba la matriu X que verifiqui $ABX = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(Activitat de Selectivitat)

$$a) BA = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^t B^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) ABX = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow X = (AB)^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (AB)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ 6 \end{pmatrix}$$

114 Considera la matriu $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula:

a) $A^2 - 2A - 8I$

b) X tal que $AX = I$ (I és la matriu identitat 3×3).

(Activitat de Selectivitat)

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix}, 2A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, 8I = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 2A - 8I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) AX = I \rightarrow X = A^{-1}$$

$$X = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

Matrius

- 115 Troba una matriu X que verifiqui $AX + B = I$, amb:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

I és la matriu identitat.

$$AX + B = I \rightarrow X = A^{-1}(I - B)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, I - B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- 116 Determina la matriu X de dimensió 2×2 de manera que:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{aligned} X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -23 & 14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 117 Troba la matriu X que verifica l'equació matricial:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 15 \\ 12 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X &= \begin{pmatrix} 0 & 12 & 15 \\ 12 & 11 & 10 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X &= \begin{pmatrix} 2 & 11 & 14 \\ 11 & 11 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 11 & 14 \\ 11 & 11 & 11 \end{pmatrix} \\ \rightarrow X &= \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 11 & 14 \\ 11 & 11 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{-11}{5} & -4 \\ \frac{-13}{5} & \frac{-22}{5} & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

PREPARA LA SELECTIVITAT

(Activitats de Selectivitat)

- 1 En una clínica dental col·loquen tres tipus de pròtesis, P_1 , P_2 i P_3 , en dos models diferents, M_1 i M_2 . El nombre de pròtesis que tenen fetes està reflectit a la matriu A . El preu, en euros, de cada pròtesi està reflectit a la matriu B .

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} M_1 & M_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad B = \begin{matrix} & \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} M_1 \\ M_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- a) Troba, si és possible, les matrius $C = A \cdot B$ i $D = B \cdot A$.
 b) Quina informació proporcionen els elements c_{12} de la matriu C i l'element d_{22} de D ?
 c) Quin element de C o D proporciona el valor total de totes les pròtesis del tipus P_2 ?

$$a) C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.060 & 5.750 & 7.260 \\ 4.920 & 4.840 & 6.480 \\ 4.290 & 4.100 & 5.240 \end{pmatrix}$$

$$D = B \cdot A = \begin{pmatrix} 150 & 160 & 240 \\ 210 & 190 & 220 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 21 \\ 16 & 12 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.370 & 8.430 \\ 7.330 & 9.770 \end{pmatrix}$$

- b) L'element c_{12} expressa el preu del total de pròtesis de tipus P_1 si es venguessin al preu de les pròtesis de tipus P_2 .
 L'element d_{22} expressa el preu del total de pròtesis del model M_2 .
 c) El valor total de totes les pròtesis de tipus P_2 l'expressa l'element c_{22} .

- 2 Els preus, en euros, de les entrades a un parc temàtic per a adults (AD) i nens i jubilats (NJ) en temporada alta (TA), temporada mitjana (TM) i temporada baixa (TB) són a la matriu P . El nombre de visitants, en milers, d'aquest parc al llarg d'un any és a la matriu N .

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} TA & TM & TB \end{matrix} \\ \begin{matrix} AD \\ NJ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 25 & 20 & 14 \\ 20 & 15 & 7 \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad N = \begin{matrix} & \begin{matrix} AD & NJ \end{matrix} \\ \begin{matrix} TA \\ TM \\ TB \end{matrix} & \begin{pmatrix} 500 & 600 \\ 350 & 300 \\ 125 & 100 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- a) Troba, si és possible, les matrius $R_1 = P \cdot N$ i $R_2 = N \cdot P$.
 b) A quants euros puja la recaptació total corresponent als nens i jubilats? I la que correspon a la temporada baixa?
 c) Quin element de R_1 o de R_2 ens proporciona informació sobre la recaptació total corresponent als adults?
 d) A quants euros puja la recaptació total?

Matrius

$$a) R_1 = P \cdot N = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 14 \\ 20 & 15 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500 & 600 \\ 350 & 300 \\ 125 & 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21.250 & 22.400 \\ 16.375 & 17.400 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = N \cdot P = \begin{pmatrix} 500 & 600 \\ 350 & 300 \\ 125 & 100 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 20 & 14 \\ 20 & 15 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.500 & 19.000 & 12.400 \\ 14.750 & 11.500 & 7.600 \\ 5.125 & 4.000 & 2.650 \end{pmatrix}$$

- b) La recaptació total corresponent als nens i jubilats puja 17.400 €. La recaptació total corresponent a la temporada baixa puja 2.650 €.
- c) Aquesta informació ve donada per l'element a_{11} de la matriu R_1 .
- d) La recaptació total puja 38.650 €, que es correspon amb la suma dels elements de la diagonal principal de qualsevol de les dues matrius, R_1 o R_2 .

- 3 Considera les matrius $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Resol l'equació matricial

$AX + B^t = B$, on X és una matriu quadrada d'ordre 2.

$$AX + B^t = B \rightarrow AX = B - B^t \rightarrow X = A^{-1}(B - B^t)$$

Calculem la matriu inversa de A :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = 3F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = 4F_1 - F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 12 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 8 & -2 & 3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} F_1 = \frac{1}{12}F_1 \\ F_2 = \frac{1}{8}F_2 \end{array}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X = A^{-1}(B - B^t) &\rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 4 Troba una matriu A que verifiqui: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

Calculem la matriu inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} F_2 = \frac{1}{2}F_2 \\ F_3 = \frac{1}{3}F_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 5 Determina la matriu X en l'equació matricial $A^2X = \frac{1}{2}(A + BC)$, en què:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2X = \frac{1}{2}(A + BC) \rightarrow X = (A^2)^{-1} \left(\frac{1}{2}(A + BC) \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 = F_1 - 3F_2} \begin{pmatrix} 4 & 0 & | & 1 & -3 \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 = \frac{1}{4}F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} X &= (A^2)^{-1} \left(\frac{1}{2} \cdot (A + BC) \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \right) \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \right) \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 20 & 11 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & \frac{11}{2} \\ 5 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 5 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

LITERATURA I MATEMÀTIQUES

L'oncle Petros i la conjectura de Goldbach

En la nostra primera nit junts, mentre sopàvem al menjador de la universitat per conèixer-nos millor, li vaig dir amb naturalitat [al meu company d'habitació]:

—Com que ets un geni de les matemàtiques, Sammy, estic segur que podràs provar fàcilment que qualsevol nombre parell més gran que 2 és la suma de dos nombres primers.

Es va posar a riure.

—Si pogués demostrar això, company, no seria aquí sopant amb tu; ja seria catedràtic, potser fins i tot tindria la medalla Fields, el Nobel de les matemàtiques.

Abans que acabés de parlar, en un instant de revelació, vaig endevinar l'horrible veritat. En Sammy ho va confirmar amb el que va dir tot seguit:

—L'afirmació que acabes de fer és la conjectura de Goldbach, un dels problemes irresolts més difícils de tots els camps de les matemàtiques!

Les meves reaccions van passar per les fases anomenades (si no recordo malament el que vaig aprendre en Psicologia elemental a la universitat) les quatre etapes del dol: negació, ira, depressió i acceptació.

De totes quatre, la primera va ser la que va durar menys.

—No... no és possible! [...]

—Què vols dir, que no és possible? —va preguntar—. Ho és! La conjectura de Goldbach, que així s'anomena la hipòtesi, ja que no s'ha demostrat mai, és que tots els nombres parells són la suma de dos nombres primers. Ho va afirmar per primera vegada un matemàtic anomenat Goldbach en una carta que va escriure a Euler. Tot i que s'ha demostrat que és veritat fins i tot en nombres primers altíssims, ningú n'ha aconseguit formular una prova general. [...]

—Maleit! —vaig exclamar en grec—. Que Déu el condemni! Que es podreixi a l'infern!

El meu nou company d'habitació, totalment al·lucinat davant del fet que una hipòtesi de teoria de nombres pogués provocar un rampell de passió mediterrània semblant, em va pregar que li expliqués què em passava; però jo no estava en condicions de donar explicacions.

CONSTANTINOS APOSTULU DOXIADIS

L'oncle Petros i la conjectura de Goldbach

Constantinos Apostulu Doxiadis

Petros Papachristos vivia en una casa als afores d'Atenes, retirat del món, sense dona ni fills; les seves úniques ocupacions eren tenir cura del jardí i jugar a escacs. Havia estat un matemàtic notable, tot i que en opinió dels seus dos germans petits, que mantenien amb el seu esforç l'empresa heretada del pare, era el «fiasco de la família». En canvi, un dels seus nebots, el narrador de la història que hi ha dins d'aquesta novel·la, l'admirava per l'antiga reputació que havia tingut. Quan va acabar el penúltim curs del batxillerat, un dia li va preguntar si ell també podria arribar a ser un bon matemàtic.

El noi accepta la prova que li proposa el seu oncle i que consisteix a resoldre al llarg de l'estiu, sense consultar els llibres, el problema següent: demostrar que tot enter parell més gran que 2 és igual a la suma de dos primers.

Després d'emplenar durant els mesos estivals centenars de quartilles que van acabar a la paperera, el noi no va aconseguir demostrar aquella «senzilla» conjectura. Va admetre que era incapaç de fer-ho i va complir la seva promesa, es va matricular en la llicenciatura d'Econòmiques, en una de les millors universitats nord-americanes. Al tercer any li va tocar compartir habitació amb Sammy Epstein, un noi famós entre els estudiants del primer cicle perquè era un prodigi de les matemàtiques. Durant la seva primera trobada, li demana que resolgui el problema que li havia proposat l'oncle Petros. Aquesta conversa és la que recull el text seleccionat.

Quan descobreix la «broma», el jove grec decideix venjar-se'n, i aquesta és la trama de la segona part d'aquesta novel·la, en la qual es narra la lluita d'una persona per construir les matemàtiques: els temptejos, els desànim, els èxits i els fracassos.

Comprova que la conjectura de Goldbach es compleix per a tots els nombres parells més petits que 20. Troba un nombre parell que sigui, alhora, suma d'un nombre primer amb 11 i d'un altre nombre primer amb 17; els dos nombres primers són més petits que 30.

Resposta oberta. Per exemple:

$$4 = 2 + 2$$

$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 3 + 5$$

$$10 = 3 + 7$$

$$12 = 5 + 7$$

$$14 = 3 + 11$$

$$16 = 5 + 11$$

$$18 = 7 + 11$$

Resposta oberta. Per exemple:

$$11 + 29 = 40$$

$$17 + 23 = 40$$

Sistemes d'equacions lineals

ABANS DE COMENÇAR... RECORDA

001 Resol aquests sistemes:

a)
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

a)
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \rightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$$

002 Escriu tres equacions equivalents a aquestes:

a) $x - 2 = 7$

b) $2x = -3$

c) $\frac{x}{2} - 4 = 6$

a) Resposta oberta. Per exemple:

$x - 9 = 0 \quad 2x - 4 = 14 \quad 2 - x = -7$

b) Resposta oberta. Per exemple:

$4x + 6 = 0 \quad 1 - 6x = 10 \quad 10x + 15 = 0$

c) Resposta oberta. Per exemple:

$x - 8 = 12 \quad 16 - 2x = -24 \quad 3x = 60$

003 Escriu dos sistemes equivalents a aquest.

a)
$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases}$$

a) Resposta oberta. Per exemple:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

b) Encara que el sistema és incompatible, podem considerar sistemes equivalents. Hem obtingut els sistemes següents multiplicant les equacions per una constant:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ 4x - 4y = 6 \end{cases}$$

ACTIVITATS

001 Escriu una equació amb tres incògnites de coeficients 4, -1 i 1, respectivament, i amb terme independent -2.

Calcula tres solucions d'aquesta equació.

L'equació és $4x - y + z = -2$, i tres solucions són:

$x = 1, y = 6 \text{ i } z = 0$

$x = -1, y = 0 \text{ i } z = 2$

$x = 0, y = 2 \text{ i } z = 0$

002 Determina una solució d'aquest sistema:

$$\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Resposta oberta. Per exemple: $x = 0, y = 2, z = 2$

003 Classifica aquests sistemes segons el nombre de solucions que tenen:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} -2x + y = 2 \\ 2x - y = -2 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \end{array}$$

a) Té infinites solucions. El sistema és compatible indeterminat.

b) No té solució. El sistema és incompatible.

$$\text{c) } \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Té solució única. El sistema és compatible determinat.

004 Converteix aquest sistema en un d'escalonat i troba'n la solució:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 2z = 1 \\ -x = 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 2z = 1 \\ -x = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 2z = 1 \\ -y - z = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 2z = 1 \\ z = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 13 \\ z = 7 \end{cases} \end{array}$$

005 Resol aquests sistemes d'equacions lineals per mitjà del mètode de Gauss:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -x - y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases} & \text{b) } \begin{cases} y - z = 1 \\ 2x - 2y + z = 3 \\ 3x - 2z = 7 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -6 & 7 & -5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + z = 3 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Sistemes d'equacions lineals

006 Resol mitjançant el mètode de Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} y + z = -5 \\ 2x - y = 0 \\ x + z = -4 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -x - y + z + t = 4 \\ 3x - 2y - t = -2 \\ x + 2y - 2z - t = 0 \\ y + z - 4t = -4 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + z = -4 \\ y + z = -5 \\ -z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \\ z = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 3 & -2 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & 6 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 14 & -30 & -34 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & -8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 14 & -30 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 22 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z - t = 0 \\ y + z - 4t = -4 \\ 14z - 30t = -34 \\ -2t = 22 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -19 \\ y = -22 \\ z = -26 \\ t = -11 \end{cases}$$

007 Discuteix aquests sistemes d'equacions lineals per mitjà del mètode de Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -x - y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} -2x + y - z = 1 \\ 2x - 2y - z = 3 \\ -y - 2z = 7 \end{cases}$$

$$\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sistema compatible indeterminat

$$\text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Sistema incompatible

008 Discuteix mitjançant el mètode de Gauss:

$$\begin{cases} -x + y + z - 2t = -5 \\ 2x - y + \quad - t = 0 \\ x + \quad \quad z - 3t = -2 \\ -x + y - 2z + t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Sistema incompatible

009 Escriu mitjançant equacions aquest sistema i soluciona'l amb el mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -2x + y - z = -2 \\ -2y + z = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ 5y - 5z = 0 \\ -5z = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

010 Determina l'expressió matricial d'aquest sistema i soluciona'l com si fos una equació matricial:

$$\begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ -x - 2y + z = -2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B \quad |A| = 11 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Sistemes d'equacions lineals

011 Discuteix els sistemes per mitjà del teorema de Rouché-Frobenius i troba'n la solució

$$\begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = -2 \\ -x - y + 2z = 0 \\ x - 4y + 3z = -2 \end{array} \right\} \quad \text{a)} \quad \left. \begin{array}{l} x + 3y - 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 0 \\ -x - z = 7 \end{array} \right\} \quad \text{b)}$$

a) Treballem amb la matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 + 2F_2 \rightarrow F_2 \\ F_1 - 2F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminat:

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 4y + 3z = -2 \\ -5y + 5z = -2 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-2 + 5\lambda}{5} \\ y = \frac{2 + 5\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{array} \right. \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

b) Treballem amb la matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ F_1 + F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{array} \right)$$

Per tant, $\text{rang}(A) = 2$ i $\text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible

012 Discuteix el sistema utilitzant el teorema de Rouché-Frobenius i troba'n la solució.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y - z + t = 1 \\ x - 3y + z - t = 0 \\ 3x - 2y = 1 \\ y - 2z = 4 \end{array} \right\}$$

Treballem amb la matriu ampliada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 - 2F_2 \rightarrow F_2 \\ 3F_1 - 2F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 - F_3 \rightarrow F_3 \\ F_2 - 7F_4 \rightarrow F_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 3 & -27 \end{array} \right)$$

Per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 < 4 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminat: si anomenem $t = \lambda$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 - \lambda \\ 0 & 7 & -3 & 1 - 3\lambda \\ 0 & 0 & 11 & -27 - 3\lambda \end{array} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-3 - 4\lambda}{11} \\ y = \frac{-10 + 6t}{11} \\ z = \frac{-27 - 3\lambda}{11} \\ t = \lambda \end{array} \right. \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

013 Resol aquest sistema:

$$\begin{cases} 5x - y + 2z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2F_1 + 5F_2 \rightarrow F_2 \\ F_1 + 5F_3 \rightarrow F_3}} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_2 + F_3 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Per tant, rang $(A) = 3 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

014 Escriu un sistema d'equacions lineals homogeni amb quatre equacions i que tingui:

a) Solució única.

b) Infinites solucions.

a) Resposta oberta. Per exemple:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$$

b) Resposta oberta. Per exemple:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \\ x + y = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$$

015 Planteja un sistema per al problema següent:

«En Joan, en Pere i en Xavier volen aconseguir 26 € per comprar un regal. Han decidit que en Joan n'hi ha de posar el doble que en Pere i que en Xavier n'hi ha de posar les dues terceres parts del que hi posi en Joan. Quant ha de posar cadascun?».

Considerem x, y, z les quantitats que han de posar en Joan, en Pere i en Xavier, respectivament.

$$\begin{cases} x + y + z = 26 \\ x = 2y \\ z = \frac{2}{3}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 26 \\ x - 2y = 0 \\ 2x - 3z = 0 \end{cases}$$

016 En una fàbrica treballen 22 persones entre obrers, oficinistes i directius. El doble del nombre d'oficinistes més el triple del nombre de directius és igual al doble del nombre d'obers.

Amb aquestes dades, és possible saber el nombre d'obers que hi ha a la fàbrica?

Considerem x, y, z els obrers, els oficinistes i els directius que treballen a la fàbrica, respectivament.

$$\begin{cases} x + y + z = 22 \\ 2y + 3z = 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 22 \\ 2x - 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

El nombre d'equacions és més petit que el nombre d'incògnites, per la qual cosa el sistema no pot ser compatible determinat. Amb aquestes dades, no podem determinar el nombre d'obers.

Sistemes d'equacions lineals

- 017 El preu de l'estada diària en un hotel és de 30 € per persona. Els nens paguen el 50 % d'aquest preu, i els jubilats paguen el 70 % d'aquest preu.

Determina el nombre de nens i de jubilats que hi havia un dia a l'hotel si saps que: hi havia 200 persones, el nombre de jubilats era igual al 25 % del nombre de nens i que van recaptar 4.620 € per l'estada de tots.

Considerem x, y, z el nombre de persones que no són ni nens ni jubilats, el nombre de nens i el nombre de jubilats, respectivament.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 200 \\ z = 0,25y \\ 30x + 15y + 21z = 4.620 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 200 \\ 0,25y - z = 0 \\ 30x + 15y + 21z = 4.620 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0,25 & -1 & 0 \\ 30 & 15 & 21 & 4.620 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & -15 & -9 & 1.380 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -69 & -1.380 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 200 \\ y - 4z = 0 \\ -69z = -1.380 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 100 \\ y = 80 \\ z = 20 \end{array} \right.$$

Hi havia 80 nens, 20 jubilats i 100 persones que no eren ni nens ni jubilats.

- 018 El pressupost per a mobles d'un institut és cinc vegades la suma del de llibres més el del material d'oficina. El pressupost per a llibres és el triple del de material d'oficina. La suma del pressupost per a mobles i material d'oficina és 7 vegades el pressupost de llibres.

- a) Amb aquestes dades, podem saber els diners destinats a cada compra?
b) Determina'n les quantitats si per a llibres hi ha 1.800 €.

- a) Considerem x, y, z els pressupostos per a mobles, llibres i material d'oficina, respectivament.

$$\left. \begin{array}{l} x = 5(y + z) \\ y = 3z \\ x + z = 7y \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 5y - 5z = 0 \\ y - 3z = 0 \\ x - 7y + z = 0 \end{array} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -7 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{2F_2 - F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc} 1 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Per tant, $\text{rang}(A) = 2$ i és un sistema és compatible indeterminat, per la qual cosa no podem saber quant han destinat a cada compra.

- b) Si $y = 1.800 \rightarrow z = 600$ $x = 5 \cdot 2.400 = 12.000$

Per a mobles destinen 12.000 €, i per a material d'oficina, 600 €.

- 019 Una persona va a la bodega i compra tres classes de vi, A, B i C. En total, en compra 20 ampolles i gasta 100 €.

L'ampolla de A val 3 €, la de B 7 € i la de C 8 €.

Troba el nombre d'ampolles de cada classe que ha comprat si saps que, almenys, n'ha comprat una de cada.

(Activitats de Selectivitat)

Anomenem x, y i z el nombre d'ampolles de cada classe. Les condicions del problema són:

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 20 \\ 3x + 7y + 8z & = & 100 \\ x & \geq & 1 \\ y & \geq & 1 \\ z & \geq & 1 \end{array} \right\}$$

Resolem per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 3 & 7 & 8 & 100 \end{array} \right) \xrightarrow{-3F_1 + F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 4 & 5 & 40 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x = 10 + \frac{\lambda}{4} \\ y = \frac{40 - 5\lambda}{4} = 10 - \frac{5\lambda}{4} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Com que les variables han d'agafar valors enters positius, z ha de ser múltiple de 4:

- $z = 4 \rightarrow y = 5$ i $x = 11$. Solució vàlida.
- $z = 8 \rightarrow y = 0$. Solució no vàlida, i per a qualsevol valor més gran que 8, la y agafaria valors negatius, i aleshores no compliria les hipòtesis del problema; per tant, l'única solució possible és $z = 4, y = 5$ i $x = 11$.

020

De tres nombres, A, B i C , sabem que si al doble del segon li restem el primer, el resultat és 3; que si al triple del segon li restem $C - A$, el resultat és 4, i que si al quintuple de $A + B$ li restem el triple del tercer, el resultat és 6.

- Demostra que no tenim prou dades per determinar els tres nombres.
- Si $C = 3$, determina A i B .

a) Les condicions del problema són:

$$\left(\begin{array}{rcl} 2B - A = 3 \\ 3B - (C - A) = 4 \\ 5(A + B) - 3C = 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{ordenem}} \left(\begin{array}{rcl} -A + 2B & = & 3 \\ A + 3B - C & = & 4 \\ 5A + 5B - 3C & = & 6 \end{array} \right)$$

Resolem per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 4 \\ 5 & 5 & -3 & 6 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ 5F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 15 & -3 & 21 \end{array} \right) \xrightarrow{3F_2 - F_3 \rightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array} \right)$$

Per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2$ i es tracta d'un sistema indeterminat, per la qual cosa no podem determinar els nombres.

b) Si $C = 3$, obtenim el sistema:

$$\left(\begin{array}{rcl} -A + 2B & = & 3 \\ 5B - 3 & = & 7 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 2 \\ C = 3 \end{cases}$$

Sistemes d'equacions lineals

021 Resol mitjançant el mètode de Gauss.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \quad \left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 5z = 1 \\ 4x + 7y + 13z = -1 \\ 2x + 3y + 7z = -3 \end{array} \right\} & \text{d)} \quad \left. \begin{array}{l} 3y + z = 3 \\ 3x + 4y = 11 \\ -2x + 2z = -8 \end{array} \right\} & \text{g)} \quad \left. \begin{array}{l} 3x - y + 2z = 7 \\ -x + 2y + 5z = -2 \\ 3x + 4y + 19z = 8 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{b)} \quad \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 1 \end{array} \right\} & \text{e)} \quad \left. \begin{array}{l} x - 2y - z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \end{array} \right\} & \text{h)} \quad \left. \begin{array}{l} 2a - 4b - c = -7 \\ -3a + 2b - 3c = -4 \\ -a - 3b - 8c = -12 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c)} \quad \left. \begin{array}{l} 5x + 2y + 3z = 5 \\ -x + 3y - 2z = 12 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\} & \text{f)} \quad \left. \begin{array}{l} -p + 3q - r = 12 \\ 3p + 2r = 7 \\ 5p - 6q + 4r = 5 \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\text{a)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 13 & -1 \\ 2 & 3 & 7 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 5z = 1 \\ y + 3z = -3 \\ 2z = -4 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{b)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \\ \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ -y - 2z = 0 \\ z = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{c)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 12 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 12 \\ 5 & 2 & 3 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 14 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \end{array} \right) \\ \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 & 14 \\ 0 & 0 & -11 & 22 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 4y - z = 14 \\ -11z = 22 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{d)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \\ -2 & 0 & 2 & -8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 2 & -8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 8 & 6 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 0 & 11 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & -30 \end{array} \right) \\ \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 11 \\ 3y + z = 3 \\ 10z = -30 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -3 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{e)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -10 & -8 \end{array} \right) \\ \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y - z = -1 \\ y + 3z = 3 \\ -10z = -8 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3}{5} \\ z = \frac{4}{5} \end{cases} \end{array}$$

$$f) \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 3 & 0 & 2 & 7 \\ 5 & -6 & 4 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 9 & -1 & 43 \\ 0 & 9 & -1 & 65 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 12 \\ 0 & 9 & -1 & 43 \\ 0 & 0 & 0 & 22 \end{array} \right)$$

Sistema incompatible

$$g) \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 19 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 19 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 17 & 1 \\ 0 & 10 & 34 & 2 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 5 & 17 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + 5z = -2 \\ 5y + 17z = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{12 - 9\lambda}{5} \\ y = \frac{1 - 17\lambda}{5} \\ z = \lambda \end{array} \right. \text{ amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$h) \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -1 & -7 \\ -3 & 2 & -3 & -4 \\ -1 & -3 & -8 & -12 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ -3 & 2 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & -1 & -7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ 0 & 11 & 21 & 32 \\ 0 & -10 & -17 & -31 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & 12 \\ 0 & 11 & 21 & 32 \\ 0 & 0 & 23 & -21 \end{array} \right) \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 3y + 8z = 12 \\ 11y + 21z = 32 \\ 23z = -21 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{123}{23} \\ y = \frac{107}{23} \\ z = -\frac{21}{23} \end{array} \right.$$

022 Discuteix els sistemes d'equacions següents.

$$a) \left. \begin{array}{l} 6x - 3y = 9 \\ -4x + 2y = -6 \end{array} \right\} \quad e) \left. \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 4 \\ -x + 3y + 4z = 6 \\ -2x + 11y + 19z = 28 \end{array} \right\} \quad i) \left. \begin{array}{l} 3a + b - c = 2 \\ -2a + 3b + 2c = 5 \\ 11b + 4c = 19 \end{array} \right\}$$

$$b) \left. \begin{array}{l} -x - 3y = 2 \\ 2x + y = -1 \end{array} \right\} \quad f) \left. \begin{array}{l} -4p + 2q = -8 \\ 6p - 3q = 5 \end{array} \right\} \quad j) \left. \begin{array}{l} 3a + 2(b - c) = 9 - c \\ -a + 5(b - 2) = b - 4 \\ 2(7b - c) = 5 - c \end{array} \right\}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} x - y + 2z = 4 \\ 2x - 2y + z = 6 \\ 5x - 5y + 4z = 16 \end{array} \right\} \quad g) \left. \begin{array}{l} 3x - 3y = 3 \\ 2x = 0 \end{array} \right\}$$

$$d) \left. \begin{array}{l} 3a + 2b + 2c = 1 \\ 2a + b + c = 0 \\ 3b + 2c = -1 \end{array} \right\} \quad h) \left. \begin{array}{l} 2x + 3y - z = 3 \\ 3x + 4y + 2z = 5 \\ 5x + 7y + z = 1 \end{array} \right\}$$

$$a) \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 9 \\ -4 & 2 & -6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminat}$$

$$b) \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema compatible determinat}$$

Sistemes d'equacions lineals

$$c) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 4 \\ 2 & -2 & 1 & | & 6 \\ 5 & -5 & 4 & | & 16 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & -3 & | & -2 \\ 0 & 0 & -6 & | & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & -3 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Sistema compatible indeterminat

$$d) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & | & 1 \\ 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & 2 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 3 & 2 & | & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -1 & | & -7 \end{pmatrix}$$

Sistema compatible determinat

$$e) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & | & 4 \\ -1 & 3 & 4 & | & 6 \\ -2 & 11 & 19 & | & 28 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & | & 6 \\ 2 & -1 & 3 & | & 4 \\ -2 & 11 & 19 & | & 28 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & | & 6 \\ 0 & 5 & 11 & | & 16 \\ 0 & 5 & 11 & | & 16 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & | & 6 \\ 0 & 5 & 11 & | & 16 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Sistema compatible indeterminat

$$f) \begin{pmatrix} -4 & 2 & | & -8 \\ 6 & -3 & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 & | & -8 \\ 0 & 0 & | & -7 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

$$g) \begin{pmatrix} 3 & -3 & | & 3 \\ 2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & | & 0 \\ 3 & -3 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & -3 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Sistema compatible determinat}$$

$$h) \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 3 \\ 3 & 4 & 2 & | & 5 \\ 5 & 7 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 3 \\ 0 & -1 & 7 & | & 1 \\ 0 & -1 & 7 & | & -13 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 3 \\ 0 & -1 & 7 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -14 \end{pmatrix}$$

Sistema incompatible

$$i) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & | & 2 \\ -2 & 3 & 2 & | & 5 \\ 0 & 11 & 4 & | & 19 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 11 & 4 & | & 19 \\ 0 & 11 & 4 & | & 19 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 11 & 4 & | & 19 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Sistema compatible indeterminat

$$j) \begin{cases} 3a + 2b - c = 9 \\ -a + 4b = 6 \\ 14b - c = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & | & 9 \\ -1 & 4 & 0 & | & 6 \\ 0 & 14 & -1 & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & | & 6 \\ 3 & 2 & -1 & | & 9 \\ 0 & 14 & -1 & | & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & | & 6 \\ 0 & 14 & -1 & | & 27 \\ 0 & 14 & -1 & | & 5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & | & 6 \\ 0 & 14 & -1 & | & 27 \\ 0 & 0 & 0 & | & 22 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

023 Troba totes les solucions del sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ 2x - y + z = 0 \\ -2x + 7y + z = -4 \end{cases}$$

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 1 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & 3 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + y + z = -1 \\ -3y - z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -2 - 3\lambda \end{cases} \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

024 Discuteix pel mètode de Gauss el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ -x + 3y + z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Sistema compatible determinat}$$

025 Resol i classifica el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y = 1 + z \\ 2x + z = 2 + y \\ y = z \end{cases}$$

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

026 Resol el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Canvia'n només un signe i transforma'l, si és possible, en compatible indeterminat.

(Activitat de Selectivitat)

Sistemes d'equacions lineals

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \text{Sistema compatible determinat}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ -2y = 0 \\ -2z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Resposta oberta. Per exemple:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminat}$$

027 Considera les matrius $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = (x \ m)$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix}$.

- a) Si $(A \cdot B)(2C - D) = E$, planteja un sistema de dues equacions i dues incògnites (representades per x, y) en funció de m .
- b) Per a quins valors de m el sistema té solució? Quan és única? Resol el sistema si $m = 4$.

(Activitat de Selectivitat)

$$a) (AB)(2C - D) = E \rightarrow \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (x \ m)\right] \cdot \left[2\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 3x & 3m \\ x & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3x + 3m \\ x + m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + 2m + 2 \\ -2x - my + 5 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 3x + 3m = -y + 2m + 2 \\ x + m = -2x - my + 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x + y = -m + 2 \\ 3x + my = -m + 5 \end{array}\right.$$

b) Resolem per Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -m + 2 \\ 3 & m & -m + 5 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & -m + 2 \\ 0 & -m + 1 & -3 \end{array}\right)$$

Per tant, si $m = 1 \rightarrow \text{rang}(A) = 1$ i $\text{rang}(A^*) = 2$, i el sistema serà incompatible, per tant per a valors $m \neq 1$ el sistema tindrà solució:

$$\text{Si } m = 4 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x + y = -2 \\ 3x + 4y = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = 1 \end{array}\right.$$

028 Escriu mitjançant equacions aquests sistemes.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y + 5z = 3 \\ x + 2y - z = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{cases} a + 4b = -1 \\ 2a + 3b = 4 \\ a + 5b = 2 \\ -6a + 7b = 5 \end{cases}$$

029 Escriu en forma matricial aquests sistemes d'equacions lineals.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y - 3z = -2 \\ -x - y + 2z = 3 \\ 3y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y - z + t - v = -1 \\ 2x - 3z + 6v = 8 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} p + q + r - s = 3 \\ 2p - q + 2s = 5 \\ q + 3r - 5s = -1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x + y - z = 3 \\ -x + z = -7 \\ 2x + y + 4z = 5 \\ 3y - 9z = -1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

030 Considera $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ la matriu dels coeficients d'un sistema d'equacions lineals i $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

la matriu dels seus termes independents.

a) Escriu les tres equacions que formen el sistema.

b) Troba totes les solucions del sistema.

(Activitat de Selectivitat)

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

Sistemes d'equacions lineals

031 Escriu aquests sistemes en forma matricial i troba'n la solució a partir de la matriu inversa.

$$\text{a) } \begin{cases} 4x - y = 18 \\ 3x + 2y = 8 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - z = -7 \\ 2x + y - 3z = -26 \\ 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$$

$$|A| = 11 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{3}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -26 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$$

$$|A| = 6 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -26 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \\ z = 8 \end{cases}$$

032 Considera el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - y + z = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

expressa'l matricialment, $AX = B$, calcula la matriu inversa de A i troba'n la solució.

(Activitat de Selectivitat)

Definim: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$$

$$|A| = -1 \neq 0 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

033 Considera l'equació matricial següent:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Troba de manera raonada els valors de x, y, z .

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{pmatrix} 3x - 2y \\ -2x + y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4x - 2y \\ -2x + 2y \\ y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x - 2y = -10 \\ -2x + 2y = 6 \\ y + z = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

034 Discuteix els sistemes d'equacions lineals utilitzant el teorema de Rouché-Frobenius:

a) $\begin{cases} x + 3y - 5z = -8 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \\ 4x + 9y - 10z = -8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3a + 2b - 6c + 3d = 7 \\ a - b + 2c - d = 6 \\ 6a - b = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 8x - 6y + 2z = -1 \\ 3x + y - z = 10 \\ -x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2(x + y) - 3y + 5 = 0 \\ 3 = x - 2(x + 2y) \\ 3(x + y + 2) + 2 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3a + 2b - 6c + 3d = 7 \\ a - b + 2c - d = 6 \\ 7a + b - 6c + 3d = 32 \end{cases}$

f) $\begin{cases} a + 5b = 7 \\ -2a + 2b + 3c = -2 \\ -a + 3b + 2c = 1 \\ 4b + c = 4 \end{cases}$

Sistemes d'equacions lineals

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 6 & -5 \\ 4 & 9 & -10 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & -8 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 4 & 9 & -10 & -8 \end{pmatrix}$$

Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -8 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 4 & 9 & -10 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3F_1 - F_2 \rightarrow F_2 \\ 4F_1 - F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -8 \\ 0 & 3 & -10 & 24 \\ 0 & 3 & -10 & -24 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -5 & -8 \\ 0 & 3 & -10 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2 \rightarrow$ sistema compatible indeterminat

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 10 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -6 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 10 \\ -1 & 3 & -2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3F_1 - 8F_2 \rightarrow F_2 \\ F_1 + 8F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -6 & 2 & -1 \\ 0 & -26 & 14 & -82 \\ 0 & 18 & -14 & 39 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -6 & 2 & -1 \\ 0 & -26 & 14 & -82 \\ 0 & -8 & 0 & -43 \end{array} \right)$$

Per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ sistema compatible determinat

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 7 & 1 & -6 & 3 & 32 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 7 & 1 & -6 & 3 & 32 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 - 3F_2 \rightarrow F_2 \\ 7F_1 - 3F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & -12 & 6 & -11 \\ 0 & 11 & -26 & 12 & -47 \end{array} \right)$$

Ja es veu que la 3a fila no és múltiple de la 2a, per tant:

$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 < \text{nre. d'incògnites} \rightarrow$ sistema compatible indeterminat

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 6 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 6 \\ 6 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 - 3F_2 \rightarrow F_2 \\ 2F_1 - F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & -12 & 6 & -11 \\ 0 & 5 & -12 & 6 & 11 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & -6 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & -12 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Per tant, $\text{rang}(A) = 2$ i $\text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ sistema incompatible

$$\text{e) } \begin{cases} 2x - y = -5 \\ x + 4y = -3 \\ 3x + 3y = -8 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & 3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ordenem el sistema: } \begin{cases} 2x - y = -5 \\ -x - 4y = 3 \\ 3x + 3y = -8 \end{cases}$$

Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -5 \\ -1 & -4 & 3 \\ 3 & 3 & -8 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 + 2F_2 \rightarrow F_2 \\ 3F_1 + 2F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -5 \\ 0 & -9 & 1 \\ 0 & -9 & 1 \end{array} \right)$$

Per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2 = \text{nre. d'incògnites} \rightarrow$ sistema compatible determinat

$$f) \quad A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{array} \right) \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 7 \\ -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ F_1 + F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 12 & 3 & 12 \\ 0 & 8 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2F_2 + 3F_3 \rightarrow F_3 \\ F_2 + 3F_4 \rightarrow F_4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 12 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Per tant, $\text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(A^*) = 2 < \text{nre. d'incògnites} \rightarrow$ sistema compatible indeterminat

035 Resol, aplicant el teorema de Rouché-Frobenius, aquests sistemes compatibles indeterminats.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases} & \text{c) } \begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ -3x + y - 2z = -3 \\ 2x - 3y + z = -3 \end{cases} & \text{e) } \begin{cases} 2a - b = 0 \\ 11a - b - 3c = 0 \\ a - 2b + c = 0 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} x + 2y + z = 6 \\ -3x + y - 2z = -3 \end{cases} & \text{d) } \begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x - y + z = 1 \\ y - z + t = 1 \end{cases} & \text{f) } \begin{cases} 3p - 3q + 11r = 0 \\ 4p + 7r = 0 \\ 5p + 3q + 3r = 0 \\ -6p - 6q + r = 0 \end{cases} \end{array}$$

a) Plantegem el sistema de la manera següent:

$$\begin{cases} x + 2y = 6 - z \\ -3x + y = -3 + 2z \end{cases} \xrightarrow{3Eq_1 + Eq_2 \rightarrow Eq_2} \begin{cases} x + 2y = 6 - z \\ 7y = 15 - z \end{cases}$$

D'on obtenim la solució:

$$z = \lambda \quad y = \frac{15 - \lambda}{7} \quad x = \frac{12 - 5\lambda}{7} \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ -6x + 3y = -9 \end{cases} \xrightarrow{3Eq_1 + 2Eq_2 \rightarrow Eq_2} \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \lambda}{2} \\ y = \lambda \end{cases}$$

Sistemes d'equacions lineals

c) Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ -3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ 2F_1 - F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & 1 & 15 \\ 0 & 7 & 1 & 15 \end{array} \right)$$

que ens dóna un sistema compatible indeterminat: $\begin{cases} x + 2y = 6 - z \\ 7y = 15 - z \end{cases}$,
d'on obtenim la solució:

$$z = \lambda \quad y = \frac{15 - \lambda}{7} \quad x = \frac{12 - 5\lambda}{7} \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

d) Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 2F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Que ens permet escriure el sistema equivalent següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 - t \\ 2y = 3 - t \\ 2z = 1 + t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \frac{3 - \lambda}{2} \\ z = \frac{3 - \lambda}{2} \\ t = \lambda \end{cases} \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

e) Es traca d'un sistema homogeni. Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 11 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{11F_1 - 2F_2 \rightarrow F_2 \\ F_1 - 2F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + 3F_3 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Que ens permet escriure el sistema equivalent següent:

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -9y = -6z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\lambda}{3} \\ y = \frac{2\lambda}{3} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

f) Es tracta d'un sistema homogeni. Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 11 & 0 \\ 4 & 0 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ -6 & -6 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{4F_1 - 3F_2 \rightarrow F_2 \\ 5F_1 - 3F_3 \rightarrow F_3 \\ 2F_1 + F_4 \rightarrow F_4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 11 & 0 \\ 0 & -12 & 23 & 0 \\ 0 & -24 & 46 & 0 \\ 0 & -12 & 23 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2F_2 - F_3 \rightarrow F_3 \\ F_2 + F_4 \rightarrow F_4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 11 & 0 \\ 0 & -12 & 23 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Que ens permet escriure el sistema equivalent següent:

$$\begin{cases} 3p - 3q = -11r \\ -12q = -23r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p = \frac{7\lambda}{4} \\ q = \frac{23\lambda}{12} \\ r = \lambda \end{cases} \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

036 Discuteix i resol aquests sistemes d'equacions lineals:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} a + c = 0 \\ b - c = 1 \\ a + 3b - 2c = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2y + 3z = 2 \\ 3x + y + 3z = 7 \end{cases}$$

$$\text{f) } \begin{cases} 2x - y + t = 0 \\ x + 2y - z + 4t = -1 \\ 3x - 4y + z - 2t = 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 16x + 17y + 7z = 0 \\ 4x - y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\text{g) } \begin{cases} 2a - b + c = 7 \\ 3a + 2b - 2c = 1 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} a + c = 0 \\ b - c = 1 \\ a + 3b + c = 5 \end{cases}$$

$$\text{h) } \begin{cases} 2x - 4y + z = 7 \\ -3x + 6y - 2z = 4 \\ 11x - 22y + 6z = 24 \end{cases}$$

a) Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 - F_2 \rightarrow F_2 \\ 2F_1 - F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right)$$

que ens dóna el sistema equivalent següent:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ y + 4z = 0 \\ 3z = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 4 \\ z = -1 \end{cases}$$

b) Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{3F_1 - F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right); \text{ per tant, es tracta d'un sistema}$$

indeterminat, que ens dóna el sistema equivalent següent:

$$\begin{cases} x + y = 3 - 2z \\ 2y = 2 - 3z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{4 - \lambda}{2} \\ y = \frac{2 - 3\lambda}{2} \\ z = \lambda \end{cases} \text{ amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 16 & 17 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2F_1 - 5F_2 \rightarrow F_2 \\ 16F_1 - 5F_3 \rightarrow F_3 \\ 4F_1 + 5F_4 \rightarrow F_4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & -21 & -3 & 0 \\ 0 & 21 & -12 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3F_2 - F_3 \rightarrow F_3 \\ 3F_2 + F_4 \rightarrow F_4}} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & -5 \end{array} \right);$$

per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3$ i el sistema és compatible determinat.

Sistemes d'equacions lineals

Un sistema equivalent és:

$$\left. \begin{array}{rcl} 5x + 4y + 2z & = & 0 \\ -7y - z & = & 0 \\ -15z & = & -5 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{21} \\ y = -\frac{1}{21} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

d) Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -5 \end{array} \right);$$

per tant, es tracta d'un sistema compatible determinat. Un sistema equivalent és:

$$\left. \begin{array}{rcl} a + c & = & 0 \\ b - c & = & 1 \\ -3b & = & -5 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = \frac{5}{3} \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}$$

e) Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{3F_2 + F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right);$$

per tant, rang (A) = 2 i rang (A*) = 3, i es tracta d'un sistema incompatible.

f) Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 - 2F_2 \rightarrow F_2 \\ 3F_1 - 2F_2 \rightarrow F_2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & -7 & 2 \\ 0 & 5 & -2 & 7 & -2 \end{array} \right);$$

per tant, rang (A) = rang (A*) = 2 < nre. d'incògnites = 4, i es tracta d'un sistema compatible indeterminat. Un sistema equivalent és:

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x - y & = & -t \\ -5y & = & 2 - 2z + 7 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 + \lambda - 6\mu}{5} \\ y = \frac{-2 + 2\lambda - 7\mu}{5} \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases} \text{ amb } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

g) Es tracta d'un sistema indeterminat. Plantegem el sistema de la manera següent:

$$\left. \begin{array}{rcl} 2a - b & = & 7 - c \\ 3a + 2b & = & 1 + 2c \end{array} \right\} \xrightarrow{3Eq_1 - Eq_2 \rightarrow Eq_2} \left. \begin{array}{rcl} 2a - b & = & 7 - c \\ 7b & = & 19 - 7c \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{15}{7} \\ b = \frac{7c - 19}{7} \\ c = \lambda \end{cases}$$

amb $\lambda \in \mathbb{R}$

h) Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 7 \\ -3 & 6 & -2 & 4 \\ 11 & -22 & 6 & 24 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3F_1 + 2F_2 \rightarrow F_2 \\ 11F_1 + 2F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 29 \\ 0 & 0 & -1 & 29 \end{array} \right);$$

per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2 < \text{nre. d'incògnites}$. Plantegem el sistema de la manera següent:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 4y + z = 7 \\ -z = 29 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 18 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -29 \end{array} \right. \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

037

Considera les equacions: $3x + 2y - z = 5$ $x + y + z = 3$

Afegeix una equació lineal de manera que el sistema que en resulti sigui:

i) Compatible determinat. Troba'n la solució.

ii) Compatible indeterminat. Troba'n la solució.

iii) Incompatible. Justifica-ho.

(Activitat de Selectivitat)

i) Resposta oberta. Per exemple:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 5 \\ x + y + z = 3 \\ x - y - z = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 5 \\ x + y + z = 3 \\ 2x = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 5 \\ 4x + 3y = 8 \\ 2x = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

ii) Resposta oberta. Per exemple:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 5 \\ x + y + z = 3 \\ 4x + 3y = 8 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 5 \\ 4x + 3y = 8 \\ 4x + 3y = 8 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 5 \\ 4x + 3y = 8 \\ 0 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 3\lambda \\ y = 4 - 4\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right. \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

iii) Resposta oberta. Per exemple:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 5 \\ x + y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + 2y - z = 5 \\ x + y + z = 3 \\ 0 = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

038

Classifica i resol el sistema format per les tres equacions següents:

$$x - 3y + 2z = 0 \quad -2x + y - z = 0 \quad x - 8y - z = 0$$

(Activitat de Selectivitat)

Com que és un sistema homogeni:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -8 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ F_1 + F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array} \right)$$

El rang $(A) = 3$, o sigui, és un sistema compatible determinat, i la solució és la trivial: $x = 0, y = 0, z = 0$.

Sistemes d'equacions lineals

039 Considera la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Calcula dos nombres reals x i y de manera que es verifiqui que $A + xA + yI = 0$, en què I és la matriu unitat d'ordre 2 i 0 és la matriu nul·la d'ordre 2.

(Activitat de Selectivitat)

$$A + xA + yI = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 + 2x + y & 1 + x \\ 2 + 2x & 3 + 3x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2 + 2x + y = 0 \\ 1 + x = 0 \\ 2 + 2x = 0 \\ 3 + 3x + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x + y = -2 \\ x = -1 \\ 3x + y = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

040 L'administrador de la comunitat de veïns vol saber què cobra a l'hora un electricista, un lampista i un paleta. Sap que:

- Al 4t A, l'electricista hi va estar 1 hora i el paleta 2 hores, i van haver de pagar 78 € de mà d'obra.
- Al 3r D, van pagar 85 € per les 2 hores que hi va ser el lampista i l'hora que hi va ser el paleta.
- A casa meua hi va ser 1 hora el lampista, 1 hora l'electricista i 3 hores el paleta, i ens van cobrar 133 €.

Quant cobra per hora cada professional?

Considerem x, y, z els preus per hora de feina de l'electricista, del lampista i del paleta, respectivament.

$$\begin{cases} x + 2z = 78 \\ 2y + z = 85 \\ x + y + 3z = 133 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 133 \\ 2y + z = 85 \\ x + 2z = 78 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 133 \\ 2y + z = 85 \\ -y - z = -55 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x + y + 3z = 133 \\ 2y + z = 85 \\ y = 30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 28 \\ y = 30 \\ z = 25 \end{cases}$$

L'electricista cobra 28 €, el lampista, 30 €, i el paleta, 25 €.

041 Als astronautes de la nau *Enterprise*, se'ls preparen dosis amb dos tipus de complement. Cada gram del complement A conté 2 unitats de riboflavina, 3 de ferro i 2 de carbohidrats. Cada gram del complement B conté 2 unitats de riboflavina, 1 de ferro i 4 de carbohidrats. Quants grams de cada complement són necessaris per produir exactament una dosi amb 12 unitats de riboflavina, 16 de ferro i 14 de carbohidrats?

(Activitat de Selectivitat)



Considerem x i y els grams de cada tipus de complement.

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 12 \\ 3x + y = 16 \\ 2x + 4y = 14 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 12 \\ 3x + y = 16 \\ 2y = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}$$

Són necessaris 5 grams del complement A i 1 gram del complement B.

- 042** Un grup de 20 persones, entre homes, dones i nens, es troba per anar d'excursió. Si comptem els homes i les dones junts, resulta que n'hi ha el triple que de nens. A més, si hi anés una dona més, el nombre de dones seria igual al nombre d'homes.

- a) Planteja un sistema per esbrinar quants homes, dones i nens van d'excursió.
b) Resol el problema.

(Activitat de Selectivitat)

- a) Considerem x, y, z els homes, les dones i els nens que s'han trobat, respectivament.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ x + y = 3z \\ y + 1 = x \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ x + y - 3z = 0 \\ x - y = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 20 \\ -4z = -20 \\ x - y = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x + y = 15 \\ z = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 15 \\ z = 5 \\ 2y = 14 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 7 \\ z = 5 \end{cases}$$

- 043** Una ovella, una cabra i un vedell valen, junts, 870 €. Pel preu d'un vedell, podem comprar 4 ovelles. A més, sabem que 5 ovelles i una cabra valen 620 €. Calcula el preu de cada animal i explica'n els resultats.

Considerem x, y, z els preus d'una ovella, d'una cabra i d'un vedell, respectivament.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 870 \\ z = 4x \\ 5x + y = 620 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 870 \\ -z = 0 \\ 5x + y = 620 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x + y = 870 \\ 5x + y = 620 \end{cases}$$

El sistema és incompatible. Amb aquestes dades, no podem calcular els preus dels animals.



Sistemes d'equacions lineals

- 044 Tres treballadors, A, B i C, a final d'un mes, presenten a l'empresa una plantilla de seguiment, corresponent a les hores de feina, dietes de manutenció i quilòmetres de desplaçament que han fet cadascun d'ells.

	Hores de feina	Dietes	Quilòmetres
A	40	10	150
B	60	15	250
C	30	6	100

Si saps que l'empresa paga el mateix a cada treballador: x euros per hora treballada, y euros per cada dieta i z euros per quilòmetre de desplaçament i que aquest mes ha pagat un total de 924 € al treballador A, 1.390 € al B i 646 € al C, calcula x , y , z .

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{cases} 40x + 10y + 150z = 924 \\ 60x + 15y + 250z = 1.390 \\ 30x + 6y + 100z = 646 \end{cases}$$

Resolem per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 10 & 150 & 924 \\ 60 & 15 & 250 & 1390 \\ 30 & 6 & 100 & 646 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-3F_1 + 2F_2 \rightarrow F_2 \\ 3F_1 + 4F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 10 & 150 & 924 \\ 0 & 0 & 50 & 8 \\ 0 & 6 & 50 & 188 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_2 + F_3 \rightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 10 & 150 & 924 \\ 0 & 0 & 50 & 8 \\ 0 & 6 & 0 & 180 \end{array} \right)$$

Que ens dona el sistema associat següent:

$$\begin{cases} 40x + 10y + 150z = 924 \\ 50z = 8 \\ 6y = 180 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 30 \\ z = 0,16 \end{cases}$$

- 045 La Pilar compra 200 accions de l'empresa A, 150 de B i 100 de C, i en paga 3.300 €, mentre que en Joan es gasta 3.750 € per la compra de 50 accions de A, 120 de B i 240 de C. Amb aquestes dades, és possible saber el preu de cada acció? I si et diem que cada acció té un preu enter comprès entre 1 € i 12 €, tots dos inclosos?

Considerem x , y , z els preus de les accions de les empreses A, B i C, respectivament.

$$\begin{cases} 200x + 150y + 100z = 3.300 \\ 50x + 120y + 240z = 3.750 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 200 & 150 & 100 & 3300 \\ 50 & 120 & 240 & 3750 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_1 + 4F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 200 & 150 & 100 & 3300 \\ 0 & 330 & 860 & 11700 \end{array} \right)$$

Es tracta d'un sistema indeterminat:

$$\left. \begin{array}{l} 200x + 150y = 3300 - 100z \\ 860y = 11700 - 860z \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{16\lambda - 111}{11} \\ y = \frac{1170 - 86\lambda}{33} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

Amb aquestes dades, no és possible determinar els preus de les accions.

Si les accions tenen un preu enter, el valor de l'acció de l'empresa C només pot ser de 9 €; així, les accions de l'empresa A valen 3 € i les de B valen 12 €.

- 046** En Max ven roba en una botiga. A més d'un sou fix, cobra una comissió d'1 € per cada camisa venuda; 1,50 € per cada pantaló i 2 € per cada jaqueta. Ahir, com que va vendre el doble de pantalons de que jaquetes i 5 pantalons més que camises, va guanyar 40,50 €.



Considerem x , y , z els preus d'una camisa, uns pantalons i una jaqueta, respectivament.

$$\left. \begin{array}{l} y = 2z \\ y = x + 5 \\ x + 1,5y + 2z = 40,5 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y - 2z = 0 \\ x - y = -5 \\ 10x + 15y + 20z = 405 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y - 2z = 0 \\ 25y + 20z = 455 \\ 10x + 15y + 20z = 405 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} 70z = 455 \\ 25y + 20z = 455 \\ 10x + 15y + 20z = 405 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 13 \\ z = 6,5 \end{cases}$$

La solució no té sentit, perquè no es poden vendre 6,5 jaquetes.

- 047** Tenim el triple de peres que de taronges. Si decidim donar 5 taronges a cada un dels nois d'un grup, ens sobran només 21 peres. Quantes taronges i peres tenim? Quants nois hi ha al grup?

(Activitat de Selectivitat)

Considerem x el nombre de peres, y el de taronges i z el de nois que hi ha al grup.

$$\left. \begin{array}{l} x = 3y \\ y = 5z \\ x = 8z + 21 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 3y = 0 \\ y - 5z = 0 \\ x - 8z = 21 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 3y = 0 \\ y - 5z = 0 \\ 3y - 8z = 21 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x - 3y = 0 \\ y - 5z = 0 \\ 7z = 21 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 45 \\ y = 15 \\ z = 3 \end{cases}$$

Tenim 45 peres i 15 taronges. Al grup hi ha 3 nois.

Sistemes d'equacions lineals

048

Una immobiliària ha venut un total de 65 places de garatge en tres urbanitzacions diferents. Els guanys obtinguts per la venda d'una plaça de garatge a la urbanització A són de 2.000 €, 4.000 € per una a la urbanització B i 6.000 € per una a la urbanització C. Sabem que ha venut un 50% més de places a la urbanització A que a la urbanització C. Calcula el nombre de places de garatge venudes a cada urbanització si saps que el guany obtingut per les venudes a la urbanització C és igual a la suma dels beneficis obtinguts per les venudes a les urbanitzacions A i B.

(Activitat de Selectivitat)

Considerem x, y, z el nombre de places de garatge venudes a cada urbanització, respectivament.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 65 \\ x = 1,5z \\ 6.000z = 2.000x + 4.000y \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 65 \\ 2x - 3z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 65 \\ 2y + 5z = 130 \\ y - 4z = -65 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 65 \\ 2y + 5z = 130 \\ 13z = 260 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 30 \\ y = 15 \\ z = 20 \end{array} \right.$$

Han venut 30 places de garatge a la urbanització A, 15 a la B i 20 a la C.

049

La Mònica i l'Eva parlen per telèfon per comprovar si els sistemes que han resolt els donen els mateixos resultats. Només hi ha un resultat diferent.

La Mònica diu que les solucions del sistema són $x = \frac{\lambda + 8}{7}$, $y = \frac{11\lambda + 18}{7}$, $z = \lambda$,

mentre que l'Eva diu que són $x = \frac{\mu + 10}{11}$, $y = \mu$, $z = \frac{7\mu - 18}{11}$. Després

d'assegurar-se que totes dues han escrit l'enunciat del problema de la mateixa manera, comencen a pensar que potser es tracta de dues maneres de resoldre el mateix sistema d'equacions. Decideix-ho tu.

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\lambda + 8}{7} \\ y = \frac{11\lambda + 18}{7} \\ z = \lambda \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x = z + 8 \\ 7y = 11z + 18 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 7x - z = 8 \\ 7y - 11z = 18 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{\mu + 10}{11} \\ y = \mu \\ z = \frac{7\mu - 18}{11} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 11x = y + 10 \\ 11z = 7y - 18 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 11x - y = 10 \\ 7y - 11z = 18 \end{array} \right\}$$

Si formem un sistema amb les tres equacions:

$$\left. \begin{array}{l} 7x - z = 8 \\ 7y - 11z = 18 \\ 11x - y = 10 \end{array} \right\}$$

comprovem que les dues solucions són correctes.

050 L'encarregat d'un magatzem d'electrodomèstics vol saber quant pesen una nevera i una rentadora. Com que no té bàscula, demana algunes informacions a altres treballadors:

- Sr. Castany: Una nevera i una rentadora juntes pesen 120 kg.
- Sr. Arçot: L'altre dia vaig portar amb la furgoneta 3 neveres i 4 rentadores. La furgoneta buida pesa 1.250 kg, i amb la càrrega pesava 1.550 kg.
- Sr. Pontons: Jo vaig portar 4 neveres i 5 rentadores, i tot junt pesava 480 kg.

Fes els càlculs per determinar-ne els pesos. Què passa? Busca alguna explicació d'aquests resultats.

Considerem x el pes d'una nevera i y el pes d'una rentadora.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 120 \\ 3x + 4y = 1.550 - 1.250 \\ 4x + 5y = 480 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 120 \\ 3x + 4y = 300 \\ 4x + 5y = 480 \end{array} \right\}$$

Intentem resoldre el problema per Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 120 \\ 3 & 4 & 300 \\ 4 & 5 & 480 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3F_1 - F_2 \rightarrow F_2 \\ 4F_1 - F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 120 \\ 0 & -1 & 60 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 120 \\ 0 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 60 \end{array} \right)$$

Per tant, $\text{rang}(A) = 2$ i $\text{rang}(A^*) = 3$, o sigui, el sistema és incompatible i les dades recollides no poden ser correctes.

051 Planteja, sense resoldre'l, el sistema d'equacions que permeti trobar la solució del problema següent:

«En un examen de Matemàtiques que constava de tres problemes, un alumne va obtenir una qualificació total de 7,2. La puntuació del primer problema va ser un 40% més que la del segon, i la del tercer va ser el doble de la suma de les puntuacions del primer i el segon. Quina va ser la puntuació de cada problema?».

(Activitat de Selectivitat)

Considerem x, y, z el valor de les puntuacions de cadascun dels tres problemes.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 7,2 \\ x = 1,4y \\ z = 2(x + y) \end{array} \right\}$$

052 La Júlia, la Clara i en Miquel reparteixen fulls de propaganda. La Clara sempre en reparteix el 20% del total, en Miquel reparteix 100 fulls més la Júlia i entre la Clara i la Júlia en reparteixen 850 fulls.

Planteja un sistema d'equacions que permeti saber quants fulls reparteix cadascun. Si saps que l'empresa paga 1 cèntim per cada full repartit, calcula els diners que han cobrat cada un dels tres.

(Activitat de Selectivitat)

Sistemes d'equacions lineals

Considerem x, y, z el nombre de fulls de propaganda que reparteix cadascú.

$$\left. \begin{array}{l} y = 0,2(x + y + z) \\ z = x + 100 \\ x + y = 850 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 4y + z = 0 \\ -z = -100 \\ x + y = 850 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 4y + z = 0 \\ 2x - 4y = -100 \\ x + y = 850 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 4y + z = 0 \\ 2x - 4y = -100 \\ 6x = 3.300 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 550 \\ y = 300 \\ z = 650 \end{cases}$$

La Júlia reparteix 550 fulls; per tant, ha cobrat 550 cènt. = 5,50 €.

La Clara reparteix 300 fulls i cobra 300 cènt. = 3 €.

En Miquel reparteix 650 fulls, per això cobra 650 cènt. = 6,50 €.

- 053** Una empresa ha invertit 73.000 € en la compra d'ordinadors portàtils de tres classes, A, B i C, els costos per unitat dels quals són de 2.400 €, 1.200 € i 1.000 €, respectivament. Si saps que, en total, ha comprat 55 ordinadors i que la quantitat invertida en els de tipus A ha estat la mateixa que la invertida en els de tipus B, esbrina quants aparells ha comprat de cada classe.

(Activitat de Selectivitat)

Considerem x, y, z el nombre d'ordinadors de cada tipus que ha comprat.

$$\left. \begin{array}{l} 2.400x + 1.200y + 1.000z = 73.000 \\ x + y + z = 55 \\ 2.400x = 1.200y \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 12x + 6y + 5z = 365 \\ x + y + z = 55 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 12x + 6y + 5z = 365 \\ 7x + y = 90 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 12x + 6y + 5z = 365 \\ 7x + y = 90 \\ 9x = 90 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \\ z = 25 \end{cases}$$

L'empresa ha comprat 10 ordinadors de classe A, 20 de classe B i 25 de classe C.

- 054** El caixer d'un banc només disposa de bitllets de 10, 20 i 50 €. Hem tret 290 € del banc i el caixer ens ha donat exactament 8 bitllets. El nombre de bitllets de 10 € que ens ha donat és el doble del de 20 €.

Planteja i resol el sistema d'equacions lineals associat a aquest problema per obtenir el nombre de bitllets de cada tipus que ens ha donat el caixer.

(Activitat de Selectivitat)

Considerem x, y, z el nombre de bitllets de 10, 20 i 50 €, respectivament.

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 20y + 50z = 290 \\ x + y + z = 8 \\ x = 2y \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + 5z = 29 \\ x + y + z = 8 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + 2y + 5z = 29 \\ 4x + 3y = 11 \\ 11x = 22 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 5 \end{cases}$$

El caixer ens ha donat 2 bitllets de 10 €, 1 bitllet de 20 € i 5 bitllets de 50 €.

- 055 Una persona fa fotografies amb una càmera digital. Sap que cada fotografia de qualitat normal sempre ocupa 0,2 megabytes de memòria. Cada fotografia de qualitat òptima sempre ocupa una quantitat A de megabytes, però desconeix aquesta quantitat. Aquesta setmana ha portat a imprimir 24 fotografies, que li han ocupat un total de 9,2 megabytes de memòria.
- Planteja un sistema d'equacions (en funció de A) en què les incògnites siguin el nombre de fotos de cada classe que ha fet. Estudia la compatibilitat del sistema.
 - Hi ha alguna quantitat de megabytes que és impossible que ocupi una foto de qualitat òptima?
 - La setmana passada també va fer 24 còpies, que li van ocupar 9,2 megabytes de memòria en total. És possible que el nombre de fotos de cada tipus fos diferent al d'aquesta setmana?

(Activitat de Selectivitat)

$$a) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 24 \\ 0,2 & A & 9,2 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_1 + 5F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 24 \\ 0 & 5A - 1 & 22 \end{array} \right)$$

$$5A - 1 = 0 \rightarrow A = 0,2$$

Per tant, si $A = 0,2$ el sistema és incompatible, i si $A \neq 0,2$ el sistema serà incompatible determinat.

- Pel context del problema, no pot ser una quantitat negativa, i perquè hi hagi solució ha de ser diferent de 0,2.
- Com que és un sistema compatible determinat, excepte per a $A = 0,2$, el nombre de fotografies de cada tipus per a un valor de A és únic, per això no podria ser un altre nombre de fotos.

- 056 Un museu té tres sales d'exposicions: A , B i C . Els preus de les entrades són, respectivament, 2, 4 i 7 €. Un dia determinat, van entrar a les tres sales un total de 210 persones, i la recaptació conjunta va ser igual a la setena part dels visitants de la sala B . Determina el nombre de visitants de cada sala i justifica la resposta.



(Activitat de Selectivitat)

Considerem x , y , z el nombre de visitants de cada sala.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 210 \\ 2x + 4y + 7z = \frac{y}{7} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 210 \\ 14x + 27y + 49z = 0 \end{array} \right\}$$

El sistema té dues equacions i tres incògnites; per tant, no pot ser compatible determinat. No tenim prou dades per poder determinar els visitants de cada sala.

Sistemes d'equacions lineals

- 057 A primera hora del matí, volem que en un caixer automàtic hi hagi 800 bitllets (de 10, 20 i 50 €), amb un valor total de 16.000 €. Si saps que per cada 3 bitllets de 50 € en calen 4 de 20 €, planteja un sistema d'equacions lineals per esbrinar quants bitllets de cada quantitat hi ha d'haver i troba'n la solució mitjançant el mètode de Gauss.

(Activitat de Selectivitat)

Considerem x, y, z el nombre de bitllets de 10, 20 i 50 €, respectivament.

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 800 \\ 10x + 20y + 50z & = & 16.000 \\ 4z & = & 3y \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 1 & 2 & 5 & 1.600 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 4 & 800 \\ 0 & 3 & -4 & 0 \end{array} \right)$$
$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 800 \\ 0 & 1 & 4 & 800 \\ 0 & 0 & -16 & -2.400 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 800 \\ y + 4z & = & 800 \\ -16z & = & -2.400 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 450 \\ y = 200 \\ z = 150 \end{cases}$$

Hi ha 450 bitllets de 10 €, 200 bitllets de 20 € i 150 bitllets de 50 €.

- 058 Un tren transporta 70 viatgers i la recaptació de l'import dels bitllets és de 999 €. Calcula quants viatgers han pagat l'import total del bitllet, que val 27 €, quants han pagat el 30% del bitllet i quants el 50%, si saps que el nombre de viatgers que han pagat el 30% és el doble del nombre de viatgers que paguen el bitllet sencer.

(Activitat de Selectivitat)

Considerem x, y, z el nombre de viatgers que n'han pagat l'import total, el 30% del bitllet i el 50% del bitllet, respectivament.

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 70 \\ 27x + 0,3 \cdot 27y + 0,5 \cdot 27z & = & 999 \\ y & = & 2x \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} x + y + z & = & 70 \\ 90x + 27y + 45z & = & 3.330 \\ 2x - y & = & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 70 \\ 45x - 18y & = & 180 \\ 2x - y & = & 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} x + y + z & = & 70 \\ 45x - 18y & = & 180 \\ 9x & = & 180 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 40 \\ z = 10 \end{cases}$$

L'import total del bitllet l'han pagat 20 viatgers, 40 viatgers n'han pagat el 30% i 10 viatgers n'han pagat el 50%.

- 059 Una companyia aèria de baix cost ofereix vols des de Girona fins a tres ciutats, A, B i C. Calcula el preu dels bitllets a cada ciutat amb la informació següent: si ven 10 bitllets per anar a la ciutat A, 15 per a la B i cap per a la C, ingressa 925 €; si ven 12 bitllets per a A, 8 per a B i cap per a C, ingressa 760 €; si ven 6 bitllets per a A, 5 per a B i 8 per a C, ingressa 855 €.

(Activitat de Selectivitat)

Anomenem x , y i z els preus dels bitllets a les ciutats A , B i C , respectivament, i plantegem el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 925 \\ 3x + 8y = 760 \\ 6x + 5y + 8z = 855 \end{cases}$$

Podem resoldre les dues primeres de manera independent, i obtenim $x = 40$ i $y = 35$.

Substituïm a la tercera i obtenim: $z = 55$.

- 060** Un trajecte de 200 km s'ha de fer combinant taxi, ferrocarril i autobús. El cost del taxi és de 5 €/km; el del ferrocarril, de 2 €/km, i el de l'autobús, de 3 €/km. El recorregut ens ha costat 500 €, per haver fet el doble de quilòmetres amb ferrocarril que amb taxi i autobús junts. Determina les distàncies que hem recorregut amb cada mitjà de transport.

(Activitat de Selectivitat)

Anomenem x , y i z les distàncies que hem recorregut en taxi, ferrocarril i autobús, respectivament. Les condicions del problema ens donen el sistema següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 200 \\ 5x + 2y + 3z = 500 \\ y = 2(x + z) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 200 \\ 5x + 2y + 3z = 500 \\ -2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 5 & 2 & 3 & 500 \\ -2 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{5F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ 2F_1 + F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & -3 & -2 & -500 \\ 0 & 3 & 0 & 400 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & -3 & -2 & -500 \\ 0 & 0 & -2 & -100 \end{array} \right)$$

que ens dona la solució: $z = 50$ km $y = 133,33$ km $x = 16,67$ km

- 061** Una persona va invertir 6.000 € comprant accions de dues empreses, A i B . Al cap d'un any, el valor de les accions de l'empresa A ha pujat un 5% i, en canvi, el valor de les accions de l'empresa B ha baixat un 10%. Tot i això, si vengués ara les accions guanyaria 150 €. Determina quants diners va invertir en accions de cada empresa.

(Activitat de Selectivitat)

Anomenem x i y els diners invertits en accions de les empreses A i B , respectivament.

Les condicions del problema ens donen el sistema següent:

$$\begin{cases} x + y = 6000 \\ 0,05x - 0,1y = 150 \end{cases}$$

Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6000 \\ 0,05 & -0,1 & 150 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 + 20F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6000 \\ 0 & 3 & 3000 \end{array} \right)$$

D'on resulta: $y = 1.000$ € $x = 5.000$ €

Sistemes d'equacions lineals

PREPARA LA SELECTIVITAT

(Activitat de Selectivitat)

- 1 En una fàbrica d'articles esportius tenen 10 caixes de mides diferents, Grans, Mitjanes i Petites, per envasar les samarretes d'atletisme que produeixen i amb capacitat per a 50, 30 i 25 samarretes, respectivament. Si una caixa gran fos mitjana, aleshores hi hauria el mateix nombre de caixes grans i mitjanes. En total, envasen 390 samarretes. Determina el nombre de caixes que hi ha de cada classe.

Considerem x, y, z el nombre de caixes per a samarretes grans, mitjanes i petites, respectivament.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 10 \\ 50x + 30y + 25z = 390 \\ x - 1 = y + 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 10 \\ 10x + 6y + 5z = 78 \\ x - y = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 10 \\ 5x + y = 28 \\ x - y = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 10 \\ 5x + y = 28 \\ 6x = 30 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Hi ha 5 caixes de samarretes grans, 3 de mitjanes i 2 de petites.

- 2 Discuteix, en funció del paràmetre a , la solució del sistema d'equacions lineals següents. Troba'n la solució quan sigui possible.

$$\left. \begin{array}{l} x + 4y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - 5y + az = -a \end{array} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & a \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & a \end{pmatrix}$$

Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & a & -a \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3F_1 - F_2 \rightarrow F_2 \\ 2F_1 - F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 13 & 1 & 5 \\ 0 & 13 & 2-a & 4+a \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_3 \rightarrow F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & -13 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{array} \right)$$

Per tant:

- Si $a \neq 1 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ sistema compatible determinat. El sistema equivalent és:

$$\left. \begin{array}{l} x + 4y + z = 2 \\ 13y + z = 5 \\ (a-1)z = -(a-1) \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{13} \\ y = \frac{6}{13} \\ z = -1 \end{cases}$$

- Si $a = 1 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminat.
El sistema equivalent és:

$$x + 4y = 2 - z \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{6 - 9\lambda}{13} \\ 13y = 5 - z \\ y = \frac{5 - \lambda}{13} \\ z = \lambda \end{array} \right. \rightarrow \text{amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

3 Considera el sistema d'equacions següent:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ ax + 10y + 4z = 2 \end{array} \right.$$

- a) Troba els valors de a per als quals el sistema no és compatible determinat.
b) Troba el valor de a per al qual $x = 2$. Determina també els valors de y i de z en aquest cas.

- a) Canviem l'ordre de les incògnites i apliquem Gauss:

$$\begin{array}{c} z \quad y \quad x \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 10 & a & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ -4F_1 + F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 6 & a-4 & -18 \end{array} \right) \xrightarrow{-3F_2 + F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-7 & -12 \end{array} \right) \end{array}$$

- Si $a = 7 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$ i $\text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema incompatible
- Si $a \neq 7 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ Sistema compatible determinat

- b) El sistema equivalent i la solució són:

$$\left\{ \begin{array}{l} z + y + x = 5 \\ 2y + x = -2 \\ (a-7)x = -12 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z \\ y \\ x = \frac{-12}{a-7} \end{array} \right. \quad \text{Si } x = 2 \rightarrow \frac{-12}{a-7} = -2 \rightarrow a = 1$$

i aleshores: $2y = -2 - 2 \rightarrow y = -2$ i $z = 5 - (-2) - 2 = 5$

4 Discuteix i resol el sistema següent per a tots els valors del paràmetre a . (Empra el mètode de Gauss per a la resolució).

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + ay - \quad \quad 2z = -1 \\ x + y - \quad \quad az = -1 \\ x + y + (2a+2)z = 6-a \end{array} \right.$$

Sistemes d'equacions lineals

$$A = \begin{pmatrix} 4 & a & -2 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & 1 & 2a+2 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 2a+2 & 6-a \end{array} \right)$$

Apliquem Gauss:

$$\begin{pmatrix} 4 & a & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 2a+2 & 6-a \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_1 - 4F_2 \rightarrow F_2 \\ F_1 - 4F_3 \rightarrow F_3}} \begin{pmatrix} 4 & a & -2 & -1 \\ 0 & a-4 & 4a-2 & 3 \\ 0 & a-4 & -8a-10 & 4a-25 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_3 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 4 & a & -2 & -1 \\ 0 & a-4 & 4a-2 & 3 \\ 0 & 0 & 12a+8 & -4a+28 \end{pmatrix}$$

a) Si $12a+8=0 \rightarrow a = -\frac{2}{3} \rightarrow \text{rang}(A) = 2$ i $\text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ incompatible.

b) Si $a \neq -\frac{2}{3} \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*)$, i el sistema serà compatible.

Un sistema equivalent és:

$$\begin{cases} 4x + ay - 2z = -1 \\ (a-4)y + (4a-2)z = 3 \\ (12a+8)z = -4a+28 \end{cases} \rightarrow z = \frac{-4a+28}{12a+8} \text{ i amb aquest valor}$$

passem a la segona equació:

$$(a-4)y + (4a-2) \cdot \frac{(-4a+28)}{(12a+8)} = 3 \rightarrow y = 3 - \frac{(4a-2)(-4a+28)}{(a-4)(12a+8)},$$

per tant, tampoc és vàlid el valor $a = 4$. Aleshores:

b1) Si $a = 4$, la matriu és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & 3 \\ 0 & 0 & 56 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow{4F_2 - F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 14 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \text{ és a dir}$$

$a = 4 \rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2 \rightarrow$ sistema compatible indeterminat:

$$\begin{cases} 4x + 4y - 2z = -1 \\ 14z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1+7\lambda}{7} \\ y = \lambda \\ z = \frac{3}{14} \end{cases} \text{ amb } \lambda \in \mathbb{R}$$

b2) I si $a \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{2}{3}, 4 \right\}$, el sistema és compatible determinat: el sistema equivalent

$$\begin{cases} 4x + ay - 2z = -1 \\ (a-4)y + (4a-2)z = 3 \\ (12a+8)z = -4a+28 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3-a^2}{3a+2} \\ y = \frac{4a-5}{3a+2} \\ z = \frac{-4a+28}{12a+8} = \frac{7-a}{3a+2} \end{cases}$$

5 El sistema de quatre equacions amb quatre incògnites:

$$5x + 3y = 1$$

$$5u + 3v = 2$$

$$3x + 2y = -1$$

$$3u + 2v = 3$$

es pot expressar en la forma $AX = B$, en què A , X i B són matrius quadrades 2×2 . Troba aquesta expressió i resol matricialment el sistema.

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & u \\ y & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AX = B \rightarrow X = A^{-1}B$$

Calculem A^{-1} pel mètode Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{3F_1 - 5F_2 \rightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{3F_2 + F_1 \rightarrow F_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 5 & 0 & 10 & -15 \\ 0 & -1 & 3 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_{1/5} \rightarrow F_1 \\ F_2 \cdot (-1) \rightarrow F_2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

I a partir d'aquí:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}$$

6 Resol el sistema següent:

$$x + y + z = -1$$

$$-3x + y - z = 7$$

$$2x - 3y + z = -12$$

Apliquem Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & -12 \end{array} \right) \xrightarrow{2F_1 + F_2 \rightarrow F_2, \quad 2F_1 - F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 10 \end{array} \right) \xrightarrow{5F_2 - 4F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & -20 \end{array} \right)$$

que ens dona el sistema equivalent i la solució:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = -1 \\ 4y + 2z = 4 \\ 6z = -20 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{8}{3} \\ z = -\frac{10}{3} \end{cases}$$

Sistemes d'equacions lineals

- 7 Tres entitats financeres, A , B i C , ofereixen, respectivament, per a dipòsits superiors a 2.000 €, un interès anual del 2%, 3% i $k\%$ (que no coneixem).

La Joana, en Manel i en Dani decideixen invertir els estalvis en aquestes entitats durant un any. Sabem que si tots ho fessin a l'entitat A , obtindrien en total uns beneficis de 164 €; però si la Joana optés per A , en Manel per C i en Dani per B , obtindrien 192 €; finalment, si la Joana i en Manel es decidissin per B i en Dani per C , obtindrien 218 €.

- a) Escriu un sistema d'equacions que descrigui la situació.
- b) Sense resoldre el sistema, determina la quantitat total de diners invertida entre les tres persones.
- c) Troba, si existeix, un valor de k per al qual hi hagi infinites solucions. Resol el sistema per a aquest valor de k , i dóna'n tres solucions diferents.
- a) Si anomenem x , y i z els diners de la Joana, en Manel i en Dani, respectivament, podem plantejar el sistema d'equacions:

$$\left. \begin{array}{l} 0,02(x + y + z) = 164 \\ 0,02x + \frac{k}{100}y + 0,03z = 192 \\ 0,03x + 0,03y + \frac{k}{100}z = 218 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y + z = 8.200 \\ 2x + ky + 3z = 19.200 \\ 3x + 3y + kz = 21.800 \end{array} \right\}$$

- b) Del sistema, la primera equació ens dóna directament aquesta quantitat: 8.200 €.
- c) Resolem per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 2 & k & 3 & 19.200 \\ 3 & 3 & k & 21.800 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-2F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ -3F_1 + F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 0 & k-2 & 1 & 2.800 \\ 0 & 0 & k-3 & -2.800 \end{array} \right)$$

Tenim que:

- Si $k = 3 \rightarrow \text{rang}(A) = 2$ i $\text{rang}(A^*) = 3 \rightarrow$ sistema incompatible
- Si $k = 2$, obtenim la matriu:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 0 & 0 & 1 & 2.800 \\ 0 & 0 & -1 & -2.800 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 + F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 0 & 0 & 1 & 2.800 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

per tant, $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2$, i el sistema serà indeterminat, o sigui, amb infinites solucions.

El sistema i la solució general són:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 8.200 \\ z = 2.800 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5.400 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2.800 \end{array} \right.$$

I algunes solucions són les següents (fixeu-vos que han de ser més grans de 2.000):

x	2.400	2.900	3.400
y	3.000	2.500	2.000
z	2.800	2.800	2.800

LITERATURA I MATEMÀTIQUES

La carícia de l'escorpi

Vam continuar, doncs, en aquell pis calamitós de Delicias, eixugant inundacions domèstiques, martellejant les canonades. Tots aquests desordres em crispaven tant com a ella, però l'energia que consumíem per combatre'ls ens deslliurava de discutir altres problemes més importants. A més d'amant i d'amic seu, em convertia en enguixador, en lampista, fuster, electricista i no sé quantes coses més. [...] Vaig resoldre un problema d'unió de dues canonades en creu sense conèixer l'ofici, basant-me en el que sé de geometria euclidiana i aplicant-hi el teorema de Cavalieri. [...]

Depeníem l'un de l'altre; ella de mi per reparar les destrosses i jo d'ella per tenir una missió per aconseguir-la, o, millor dit, per aconseguir el meu amor per ella i així, de tornada, estimar-me més. Ja se sap: un hipoteca l'amor a si mateix perquè la persona estimada estigui d'acord a concedir-te'l. Anteposem la convicció que l'altra persona estigui de gust amb nosaltres perquè ella també es pugui sentir còmoda. Quan estimes no uneixes el cor: el divideixes. [...]

Tal com es baixa per Delicias, per entrar al nostre antic carrer cal travessar la placeta Luca de Tena, girar una cantonada a l'esquerra, i és allí on un ensopega amb l'enorme respirador del suburbà. Per ser exactes, no és una cantonada, sinó un xamfrà (triedre en el qual dos plans normalment perpendiculars són tallats per una intersecció). La placa metàl·lica que aireja les emanacions del metro està composta de cinc petites cel·les d'amplada per nou de llargada, d'un metre quadrat cadascuna (en total, quaranta-cinc metres quadrats). És difícil evitar aquest pas, perquè més enllà hi ha un parterre amb arbres, tret que fem marrada pel costat més llarg, primer a l'esquerra i després a la dreta. El més habitual en aquests casos és abreujar travessant el respirador per la diagonal. La Candela, en canvi, recorre els dos catets del triangle rectangle en lloc de la hipotenusa (o diagonal del rectangle), de manera que comet una imperdonable infracció pitagòrica. Més que repugnància a l'aire que en surt, jo quasi crec que és per por que la placa cedeixi sota el seu pes, o alguna cosa. Una mania com qualsevol altra; les meves són pitjors.

IGNACIO GARCÍA-VALIÑO [text adaptat]

La carícia de l'escorpi

Ignacio García-Valiño

El protagonista i narrador, un jove professor de Matemàtiques, viu amb Candela, amb la qual manté una complicada relació amorosa, que la novel·la retrata amb fluïdesa i sentit de l'humor.

Sobre la seva tasca com a professor, el protagonista escriu el següent:

A hores d'ara sembla clar que als meus alumnes, excepte alguns casos no del tot diàfans, no els interessin les matemàtiques. En els meus temps això no passava, vull dir que si una assignatura ens era pesada o avorrida, ens esforçàvem a treure-la endavant com fos. Molts d'aquests nois, no tots, m'escolten adormits darrere dels pupitres, segueixen les meves traces a la pissarra com si veiessin mosques, no sé quina immensa llosa ha aixafat els seus encefalogrames. Recordo la primera vegada que vaig parlar de Pitàgores en una aula. Vaig començar ple d'il·lusió, però quan vaig arribar als catets, hi va haver una esbarriada tal que vaig perdre del tot el control de la classe.

Calcula els mòduls dels vectors que defineixen la Candela i el seu xicot quan travessen la placa metàl·lica que aireja les emanacions del metro. Quina relació hi ha entre els mòduls?

Prenem com a origen la cantonada per on comencen a travessar la placa metàl·lica.

Amb el seu moviment, la Candela defineix els vectors $(5, 0)$ i $(0, 9)$. Per tant, els mòduls fan 14 metres. El xicot de la Candela defineix el vector $(5, 9)$. Aquest vector té per mòdul:

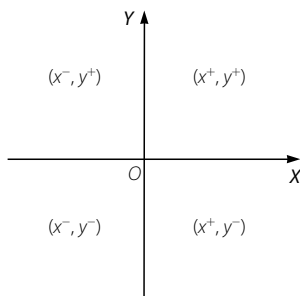
$$\sqrt{5^2 + 9^2} = \sqrt{106} = 10,30 \text{ metres}$$

És més gran la distància que recorre la Candela.

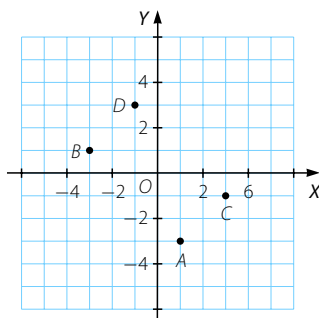
Vectors i coordenades en el pla

ABANS DE COMENÇAR... RECORDA

- 001 Dibuixa els quadrants en què queda dividit el pla en funció dels dos eixos i digues quin signe tenen els nombres en cada un dels quadrants.



- 002 Representa en aquests eixos el punt $D(-1, 3)$.



- 003 Com són aquests punts per parelles respecte dels eixos? És a dir, com són A i B respecte dels eixos? I A i C ...

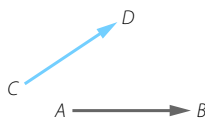
A i B són simètrics respecte de la bisectriu del 1r-3r quadrant.
 A i C són simètrics respecte de la bisectriu del 2n-4t quadrant.
 A i D són simètrics respecte de l'origen.
 B i C són simètrics respecte de l'origen.
 B i D són simètrics respecte de la bisectriu del 2n-4t quadrant.
 C i D són simètrics respecte de la bisectriu del 1r-3r quadrant.

- 004 Posa uns quants exemples de magnituds escalars i vectorials.

Són magnituds escalars: la capacitat, el volum, la superfície...
Són magnituds vectorials: el pes, l'acceleració...

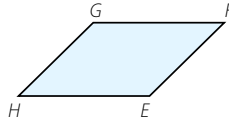
ACTIVITATS

- 001 Raona l'equivalència o no de la parella de vectors següent:



No són equivalents perquè tenen direcció diferent.

- 002 Considera el paralelogram $EFGH$ de la figura i digues si les afirmacions següents són correctes o no.

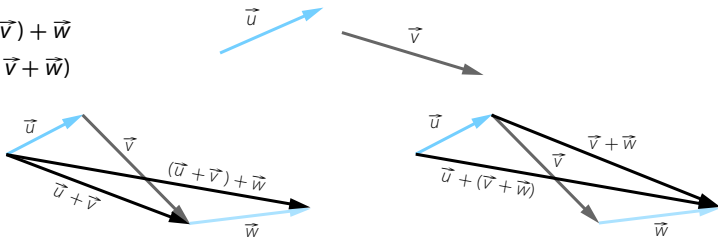


- a) $\vec{EF} \sim \vec{GF}$ b) $\vec{EF} \sim \vec{GH}$ c) $\vec{GF} \sim \vec{HE}$

- a) Falsa. Tenen direccions diferents.
b) Falsa. Tenen sentits oposats.
c) Certa.

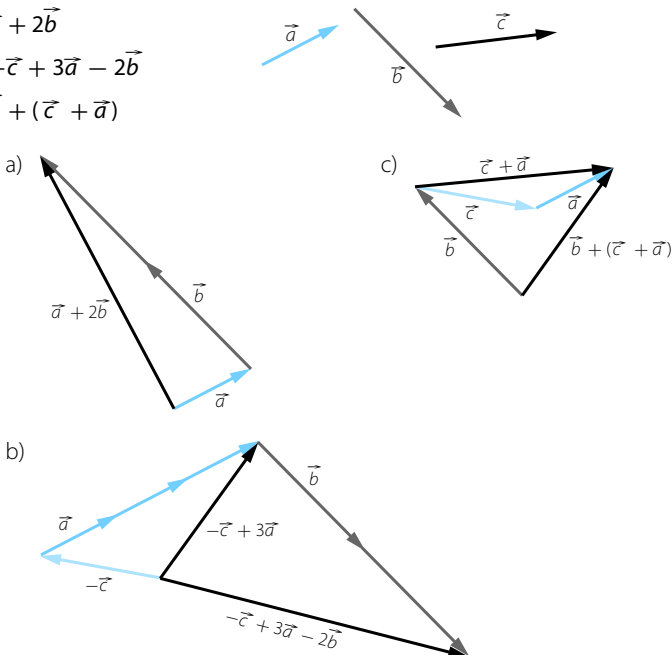
- 003 Efectua les sumes de vectors següents:

- a) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
b) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$



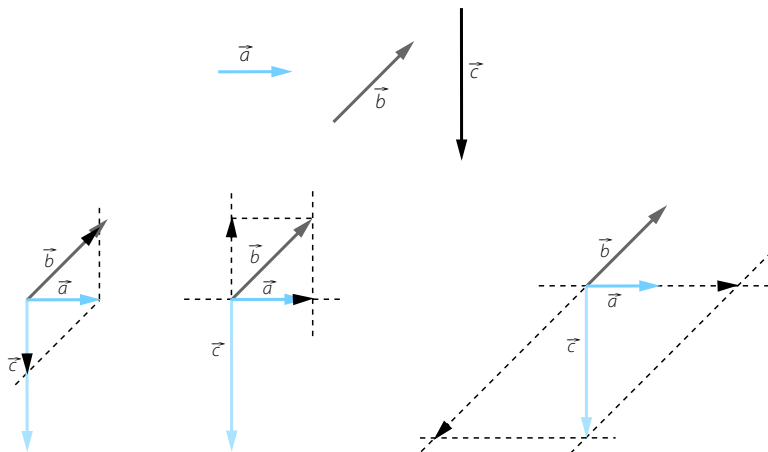
- 004 Copia els vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$, i efectua gràficament les operacions següents:

- a) $\vec{a} + 2\vec{b}$
b) $-\vec{c} + 3\vec{a} - 2\vec{b}$
c) $\vec{b} + (\vec{c} + \vec{a})$

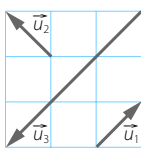


Vectors i coordenades en el pla

- 005 Escriu el vector $\vec{a}$ com a combinació lineal dels vectors $\vec{b}$ i $\vec{c}$.
Expressa $\vec{b}$ en funció de $\vec{a}$ i $\vec{c}$, i també $\vec{c}$ en funció de $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

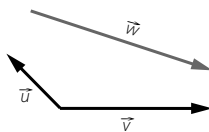


- 006 Donada la figura següent, raona quina parella de vectors és linealment dependent i escriu-ne l'expressió analítica.

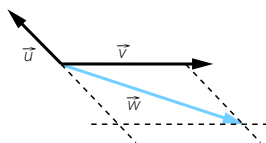


Són dependents $\vec{u}_1$ i $\vec{u}_3$. Expressió analítica: $\vec{u}_3 = 3 \cdot \vec{u}_1$.

- 007 Comprova que els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ formen una base i expressa el vector $\vec{w}$ en funció d'aquests vectors.

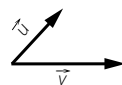


Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tenen diferent direcció i, per tant, formen una base.



- 008 Donada la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$:

- Calcula $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ i $\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$.
- Comprova que $\vec{a}$ i $\vec{b}$ formen una base.
- Expressa $\vec{u}$ i $\vec{v}$ en combinació lineal de $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



- a) Els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tenen diferent direcció i, per tant, formen una base.



- b) Els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tenen diferent direcció i, per tant, formen una base.

$$c) \vec{u} = \frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2}; \vec{v} = \frac{\vec{a}}{2} - \frac{\vec{b}}{2}$$

009 Dibuixa els punts $A(2, 1)$ i $B(1, 2)$ i calcula:

- a) Les coordenades dels vectors $\vec{AB}$ i $\vec{BA}$.

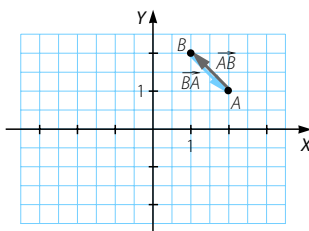
- b) Els mòduls.

$$a) \vec{AB} = (1 - 2, 2 - 1) = (-1, 1)$$

$$\vec{BA} = (2 - 1, 1 - 2) = (1, -1)$$

$$b) |\vec{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{BA}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$



010 Determina quins vectors són paral·lels:

$$\vec{a} = (2, 1)$$

$$\vec{b} = (-2, -1)$$

$$\vec{c} = (-2, 1)$$

$$\vec{d} = (2, -1)$$

$$\vec{e} = (4, 2)$$

$$\vec{f} = (-6, 3)$$

Els vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{e}$ són paral·lels perquè: $\frac{2}{1} = \frac{-2}{-1} = \frac{4}{2}$

Els vectors $\vec{c}$, $\vec{d}$ i $\vec{f}$ són paral·lels perquè: $\frac{-2}{1} = \frac{2}{-1} = \frac{-6}{3}$

011 Donats els punts $A(0, 3)$, $B(2, 1)$, $C(-2, 2)$ i $D(-3, 4)$, troba els vectors:

a) $\vec{AB} - \vec{CD}$

b) $\vec{AC} + \vec{DC}$

c) $\vec{BD} - \vec{CA}$

$$a) (2 - 0, 1 - 3) - (-3 - (-2), 4 - 2) = (2, -2) - (-1, 2) = (3, -4)$$

$$b) (-2 - 0, 2 - 3) + (-2 - (-3), 2 - 4) = (-2, -1) + (1, -2) = (-1, -3)$$

$$c) (-3 - 2, 4 - 1) - (0 - (-2), 3 - 2) = (-5, 3) - (2, 1) = (-7, 2)$$

012 Donats $\vec{u} = (2, -1)$ i $\vec{v} = (0, 3)$, efectua les operacions de vectors següents:

a) $\vec{u} - 3\vec{v}$

b) $5\vec{u} + \vec{v}$

c) $-\vec{u} + 2\vec{v}$

$$a) \vec{u} - 3\vec{v} = (2, -1) - (0, -9) = (2, 8)$$

$$b) 5\vec{u} + \vec{v} = (10, -5) + (0, 3) = (10, -2)$$

$$c) -\vec{u} + 2\vec{v} = (-2, 1) + (0, 6) = (-2, 7)$$

Vectors i coordenades en el pla

013 A partir dels vectors $\vec{u} = (0, 2)$, $\vec{v} = (1, -1)$ i $\vec{w} = (0, -1)$. Calcula.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ c) $\vec{w} \cdot \vec{v}$ e) $\vec{u} \cdot (\vec{v} - 2\vec{w})$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ d) $\vec{u} \cdot \vec{w}$ f) $-2\vec{u} \cdot 3\vec{v}$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 2) \cdot (1, -1) = -2$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (0, 2) \cdot ((1, -1) + (0, -1)) = (0, 2) \cdot (1, -2) = -4$

c) $\vec{w} \cdot \vec{v} = (0, -1) \cdot (1, -1) = 1$

d) $\vec{u} \cdot \vec{w} = (0, 2) \cdot (0, -1) = -2$

e) $\vec{u} \cdot (\vec{v} - 2\vec{w}) = (0, 2) \cdot ((1, -1) - (0, -2)) = (0, 2) \cdot (1, 1) = 2$

f) $-2\vec{u} \cdot 3\vec{v} = (0, -4) \cdot (3, -3) = 12$

014 El producte escalar de dos vectors coincideix amb el producte dels seus mòduls. Què pots dir dels vectors?

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha$$

Perquè el producte escalar de dos vectors coincideixi amb el producte dels seus mòduls, s'ha de verificar que $\cos \alpha = 1$. Per tant, els vectors han de tenir la mateixa direcció i el mateix sentit.

015 Determina el producte escalar dels vectors $\vec{u} = (3, 2)$ i $\vec{v} = (4, -6)$. Què dedueixes del resultat?

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 2) \cdot (4, -6) = 12 - 12 = 0. \text{ El producte de vectors no nuls pot ser zero.}$$

016 Calcula l'angle que formen aquests vectors expressats en coordenades:

a) $\vec{u} = (1, -3)$ $\vec{v} = (2, 3)$

b) $\vec{u} = (-1, 2)$ $\vec{v} = (4, 3)$

a) $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-7}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}} = -0,61 \rightarrow \alpha = 127^\circ 52' 29,9''$

b) $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{25}} = 0,18 \rightarrow \alpha = 79^\circ 41' 42,55''$

017 Troba tres vectors perpendiculars i tres més de paral·lels als vectors següents:

a) $\vec{a} = (1, 1)$ c) $\vec{c} = (0, 1)$

b) $\vec{b} = (3, 2)$ d) $\vec{d} = (1, -5)$

Resposta oberta.

a) $\vec{a} = (1, 1)$

Vectors paral·lels: $(2, 2)$, $(3, 3)$ i $(4, 4)$

Vectors perpendiculars: $(-1, 1)$, $(-2, 2)$ i $(-3, 3)$

b) $\vec{b} = (3, 2)$

Vectors paral·lels: $(6, 4)$, $(9, 6)$ i $(12, 8)$

Vectors perpendiculars: $(2, -3)$, $(4, -6)$ i $(6, -9)$

c) $\vec{c} = (0, 1)$

Vectors paral·lels: $(0, 2)$, $(0, 3)$ i $(0, 4)$

Vectors perpendiculars: $(1, 0)$, $(2, 0)$ i $(3, 0)$

d) $\vec{d} = (1, -5)$

Vectors paral·lels: $(2, -10)$, $(3, -15)$ i $(4, -20)$

Vectors perpendiculars: $(5, 1)$, $(10, 2)$ i $(15, 3)$

- 018 Troba les projeccions del vector $(7, 5)$ sobre els vectors $(1, 0)$ i $(0, 1)$.
Representa gràficament tots els vectors.

Si anomenem els vectors $\vec{u} = (7, 5)$, $\vec{e}_1 = (1, 0)$ i $\vec{e}_2 = (0, 1)$:

El producte escalar del vector $\vec{u} = (7, 5)$ sobre els dos vectors és:

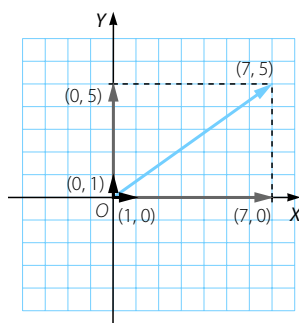
$$\vec{u} \cdot \vec{e}_1 = (7, 5) \cdot (1, 0) = 7$$

$$\vec{u} \cdot \vec{e}_2 = (7, 5) \cdot (0, 1) = 5$$

Els mòduls dels vectors $\vec{e}_1 = (1, 0)$ i $\vec{e}_2 = (0, 1)$ són $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$.

$$\text{proj}_{\vec{e}_1}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{e}_1}{|\vec{e}_1|^2} \cdot \vec{e}_1 = 5 \cdot (0, 1) = (0, 5)$$

$$\text{proj}_{\vec{e}_2}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{e}_2}{|\vec{e}_2|^2} \cdot \vec{e}_2 = 5 \cdot (0, 1) = (0, 5)$$



- 019 Donats els punts $A(2, 3)$, $B(-1, -6)$, $C(4, -1)$ i $D(0, 5)$, calcula el vector projecció de $\vec{AB}$ sobre $\vec{CD}$.

Vector $\vec{AB} = (-1 - 2, -6 - 3) = (-3, -9)$

Vector $\vec{CD} = (0 - 4, 5 - (-1)) = (-4, 6)$

Producte escalar: $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = (-3) \cdot (-4) + (-9) \cdot 6 = 12 - 54 = -42$

Mòdul del vector $\vec{CD}$: $|\vec{CD}| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = \sqrt{52}$

$$\text{proj}_{\vec{CD}}(\vec{AB}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{CD}}{|\vec{CD}|^2} \cdot \vec{CD} = \frac{-42}{52} \cdot (-4, 6) = \frac{-21}{26} \cdot (-4, 6) = \left(\frac{84}{26}, \frac{-126}{26} \right)$$

- 020 Calcula el perímetre d'un triangle que té els vèrtexs situats als punts $A(1, 2)$, $B(3, 2)$ i $C(-1, 3)$.

Calculem els vectors $\vec{AB}$, $\vec{BA}$ i $\vec{CA}$:

$\vec{AB} = (2, 0)$, $\vec{BC} = (-4, 1)$ i $\vec{CA} = (2, -1)$

Troblem el mòdul dels vectors:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$|\vec{CA}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

El perímetre fa:

$$2 + \sqrt{17} + \sqrt{5} = 8,36 \text{ u}$$

Vectors i coordenades en el pla

021 Donats $A(-2, 3)$ i $B(1, -2)$, troba el punt mitjà de AB i els simètrics de A respecte de B i de B respecte de A .

Anomenem M el punt mitjà de A i B .

$$M = \left(\frac{-2+1}{2}, \frac{3-2}{2} \right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

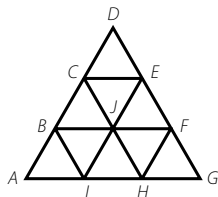
Anomenem $A'(x, y)$ el punt simètric de A respecte de B .

$$(1, -2) = \left(\frac{-2 + x}{2}, \frac{3 + y}{2} \right) \rightarrow (x, y) = (4, -7)$$

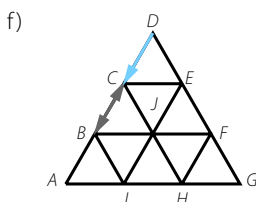
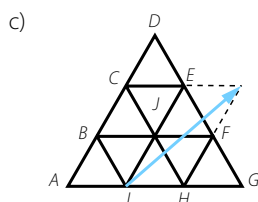
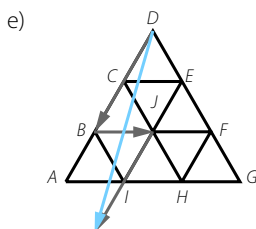
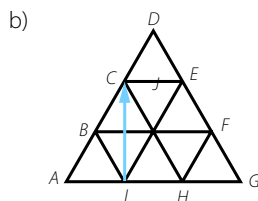
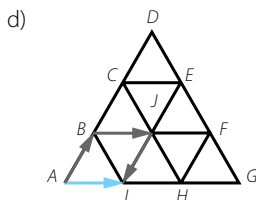
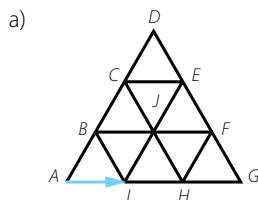
Anomenem $B'(x', y')$ el punt simètric de B respecte de A .

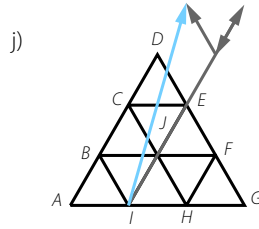
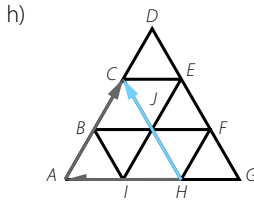
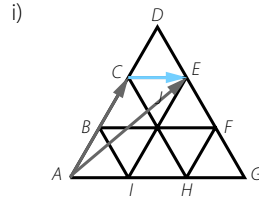
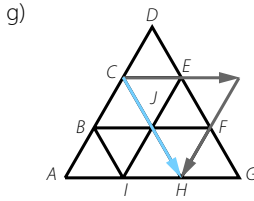
$$(-2, 3) = \left(\frac{1+x'}{2}, \frac{-2+y'}{2} \right) \rightarrow (x', y') = (-5, 8)$$

022 Fixa't en aquesta figura i efectua les operacions següents:

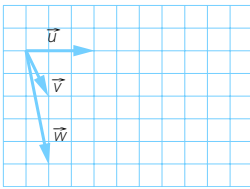


- $\overline{AB} + \overline{BI}$
- $\overline{BC} - \overline{EF}$
- $\overline{IH} + 2\overline{BC}$
- $\overline{AB} + \overline{JF} + \overline{DC}$
- $\overline{HG} + 2\overline{CJ} + 2\overline{CB}$
- $\overline{AB} + 2\overline{DC}$
- $\overline{BF} - \overline{IE}$
- $2\overline{HI} + 2\overline{CD}$
- $\overline{AE} - \overline{AC}$
- $2\overline{IE} + \overline{IB} - \overline{BC}$

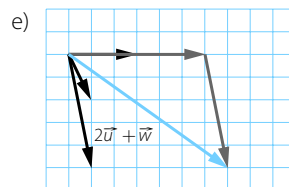
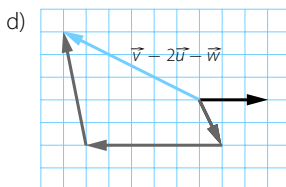
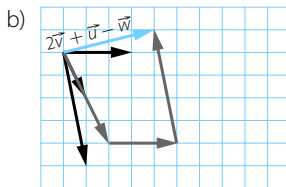
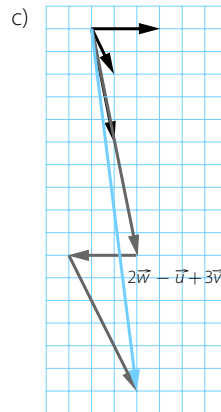
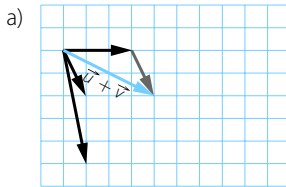




023 Fes les operacions següents:



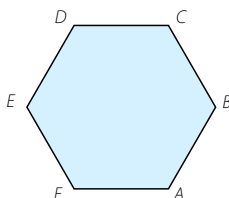
- $\vec{u} + \vec{v}$
- $2\vec{v} + \vec{u} - \vec{w}$
- $2\vec{w} - \vec{u} + 3\vec{v}$
- $\vec{v} - 2\vec{u} - \vec{w}$
- $2\vec{u} + \vec{w}$



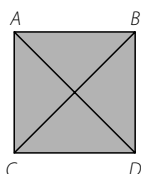
Vectors i coordenades en el pla

- 024 Expressa els vectors $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AE}$ i $\overrightarrow{FC}$ de la figura com a combinació lineal dels vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AF} &= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{EB} &= 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AE} &= -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{FC} &= 2\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$



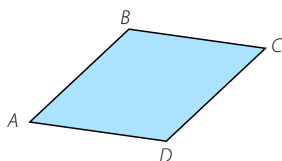
- 025 Determina tots els vectors no nuls que siguin equivalents entre ells quan agafem els vèrtexs d'un quadrat de dos en dos.



Són equivalents:

$$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \text{ i } \overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}$$

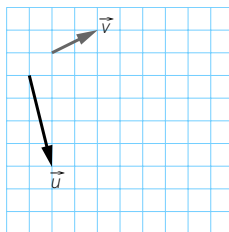
- 026 Observa el rombe $ABCD$ i determina si les afirmacions següents són certes o no.



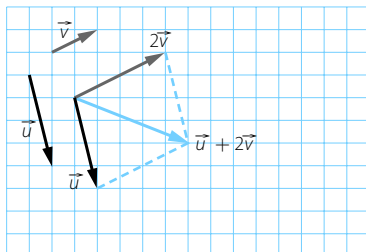
- a) $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}$
b) $\overrightarrow{AD} \sim \overrightarrow{BC}$ d) $\overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{AD}$

- a) Certa. c) Falsa. Tenen direccions diferents.
b) Certa. d) Certa.

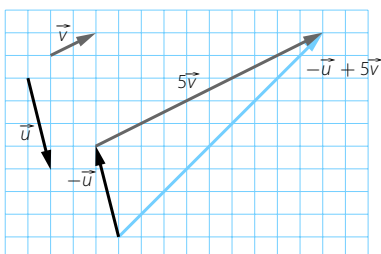
- 027 Donats els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ de la figura, calcula gràficament els vectors $\vec{u} + 2\vec{v}$ i $-\vec{u} + 5\vec{v}$.



- a) Representació gràfica del vector $\vec{u} + 2\vec{v}$.



b) Representació gràfica del vector $-\vec{u} + 5\vec{v}$



- 028 Troba les coordenades d'un punt P tal que en unir-lo al punt $Q(4, -5)$, resulta el vector $\vec{PQ} = (-2, -6)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(a, b) \\ Q(4, -5) \end{array} \right\} \rightarrow \vec{PQ} = (4 - a, -5 - b) = (-2, -6) \rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 1 \end{cases}$$

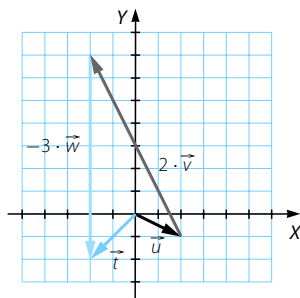
- 029 Considera els punts $P(3, -3)$ i $Q(-5, 1)$. Troba les coordenades del vector $\vec{PQ}$.

$$\left. \begin{array}{l} P(3, -3) \\ Q(-5, 1) \end{array} \right\} \rightarrow \vec{PQ} = (-5 - 3, 1 - (-3)) = (-8, 4)$$

- 030 Donats els vectors $\vec{u} = (2, -1)$, $\vec{v} = (-2, 4)$ i $\vec{w} = (0, 3)$, calcula, gràficament i analíticament, $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$.

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} = (2, -1) + 2 \cdot (-2, 4) - 3 \cdot (0, 3) = (2 - 4 - 0, -1 + 8 - 9) = \\ &= (-2, -2) \end{aligned}$$

Representació gràfica:



- 031 Troba un vector paral·lel al vector $\vec{AB}$, amb $A(2, 1)$ i $B(3, -4)$, amb origen al punt $C(0, 4)$ i tal que el seu mòdul sigui el doble que el de $\vec{AB}$.

Considerem $D(a, b)$ l'extrem del vector que ens demanen. Sabem que:

$$\begin{aligned} \vec{CD} &= 2 \cdot \vec{AB} \rightarrow (a - 0, b - 4) = 2 \cdot (3 - 2, -4 - 1) = 2 \cdot (1, -5) = (2, -10) \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

Vectors i coordenades en el pla

032 Comprova si les següents parelles de vectors són dependents o no.

a) $\vec{u} = (0, 1)$ i $\vec{v} = (1, 0)$

c) $\vec{u} = (-3, 4)$ i $\vec{v} = (4, 3)$

b) $\vec{u} = (2, -6)$ i $\vec{v} = (-2, -3)$

a) Són independents ja que $\frac{0}{1} \neq \frac{-1}{0}$

b) Són independents ja que $\frac{2}{-1} \neq \frac{-6}{-3}$

c) Són independents ja que $\frac{-3}{4} \neq \frac{4}{3}$

033 Raona quins parells de vectors formen una base:

a) $\vec{u} = (2, -3)$ i $\vec{v} = (5, 4)$

b) $\vec{u} = (0, -2)$ i $\vec{v} = (4, 1)$

a) Els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment independents, perquè no són proporcionals.

$$(2, -3) = t(5, 4) \rightarrow \left. \begin{array}{l} t = \frac{2}{5} \\ t = \frac{-3}{4} \end{array} \right\} \rightarrow \text{No són proporcionals.}$$

b) De manera anàloga, tenim que:

$$(0, -2) = t(4, 1) \rightarrow \left. \begin{array}{l} t = 0 \\ t = -2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No són proporcionals.}$$

034 Si, respecte d'una base, els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són $\vec{u} = (2, -3)$ i $\vec{v} = (5, 4)$, troba les coordenades dels vectors següents:

a) $2\vec{u} + \vec{v}$

c) $-\vec{u} + 2\vec{v}$

e) $-3\vec{u} - \vec{v}$

b) $5\vec{u} + 2\vec{v}$

d) $2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

f) $-\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$

a) $2\vec{u} + \vec{v} = (4, -6) + (5, 4) = (9, -2)$

b) $5\vec{u} + 2\vec{v} = (10, -15) + (10, 8) = (20, -7)$

c) $-\vec{u} + 2\vec{v} = (-2, 3) + (10, 8) = (8, 11)$

d) $2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = (4, -6) + (2, 5) = (6, -1)$

e) $-3\vec{u} - \vec{v} = (-6, 9) + (-5, -4) = (-11, 5)$

f) $-\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v} = \left(-1, \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{25}{6}\right)$

035 Calcula λ i μ perquè els vectors $\vec{u} = (5, 1)$, $\vec{v} = (-1, 4)$ i $\vec{w} = (13, 11)$ verifiquin que: $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = \vec{w}$.

$$\lambda(5, 1) + \mu(-1, 4) = (13, 11)$$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} 5\lambda - \mu = 13 \\ \lambda + 4\mu = 11 \end{array} \right\} \xrightarrow{\lambda=11-4\mu} 5(11-4\mu) - \mu = 13 \rightarrow \mu = 2 \rightarrow \lambda = 3$$

- 036 Troba el mòdul dels vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b}$ i $2\vec{b} - \vec{c}$, donats $\vec{a} = (-3, 4)$, $\vec{b} = (-5, -12)$ i $\vec{c} = (3, -1)$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (-8, -8)$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + (-12)^2} = 13$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$2\vec{b} - \vec{c} = (-10, -24) + (-3, 1) = (-13, -23)$$

$$|2\vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{(-13)^2 + (-23)^2} = \sqrt{698}$$

- 037 Si $\vec{u} = (3, 1)$ y $\vec{v} = (2, -1)$, calcula.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

c) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{v}$

b) $\vec{u} \cdot 2\vec{v}$

d) $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 1) \cdot (2, -1) = 6 - 1 = 5$

b) $\vec{u} \cdot 2\vec{v} = (3, 1) \cdot (4, -2) = 12 - 2 = 10$

c) $(2\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot \vec{v} = ((6, 2) + (6, -3)) \cdot (2, -1) = (12, -1) \cdot (2, -1) = 24 + 1 = 25$

d) $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (3, 1) \cdot ((3, 1) + (-2, 1)) = (3, 1) \cdot (1, 2) = 3 + 2 = 5$

- 038 Donats els punts $A(3, 7)$, $B(4, 9)$, $C(-4, 3)$ i $D(4, 9)$, són paral·lels els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$?

$$\overrightarrow{AB} = (1, 2)$$

$$\overrightarrow{CD} = (8, 6)$$

No són paral·lels, perquè: $\frac{8}{1} \neq \frac{6}{2}$

- 039 Troba els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ si saps que $\vec{u} + \vec{v} = (2, 6)$ i que $\vec{u} - 2\vec{v} = (4, -6)$.

Considerem $\vec{u} = (u_1, u_2)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

Sabem que:

$$\vec{u} + \vec{v} = (2, 6) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \rightarrow \begin{cases} u_1 + v_1 = 2 \\ u_2 + v_2 = 6 \end{cases}$$

$$\vec{u} - 2\vec{v} = (4, -6) = (u_1 - 2v_1, u_2 - 2v_2) \rightarrow \begin{cases} u_1 - 2v_1 = 4 \\ u_2 - 2v_2 = -6 \end{cases}$$

Ordenem les quatre equacions i obtenim un sistema de quatre equacions amb quatre incògnites, que resollem com dos sistemes:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 + v_1 = 2 \\ u_1 - 2v_1 = 4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} u_2 + v_2 = 6 \\ u_2 - 2v_2 = -6 \end{array} \right\}$$

$$\text{Solució: } \begin{cases} u_1 = \frac{8}{3} \\ v_1 = -\frac{2}{3} \\ u_2 = 2 \\ v_2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{u}_1 = \left(\frac{8}{3}, 2 \right) \\ \vec{u}_2 = \left(-\frac{2}{3}, 4 \right) \end{cases}$$

Vectors i coordenades en el pla

- 040 Donats els vectors $\vec{u} = (-1, 5)$ i $\vec{v} = (8, a)$, calcula el valor de a que fa que els dos vectors siguin dependents.

Perquè siguin dependents, s'ha de complir que: $\frac{-1}{8} = \frac{5}{a} \rightarrow a = -40$

- 041 Calcula els dos vectors unitaris linealment dependents amb el vector .

Considerem $\vec{v} = (a, b)$ aquest vector. S'ha de complir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{-1} &= \frac{b}{12} \\ \sqrt{a^2 + b^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow b = -12a \rightarrow a^2 + (12a)^2 = 1 \rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{145}} \rightarrow b = \mp \frac{12}{\sqrt{145}}$$

$$\text{Solucions: } \vec{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{145}}, -\frac{12}{\sqrt{145}} \right) \text{ i } \vec{v}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{145}}, \frac{12}{\sqrt{145}} \right)$$

- 042 Esbrina el producte escalar dels vectors $\vec{u} = (2, -5)$ i $\vec{v} = (-1, 4)$.
Calcula l'angle que formen.

Producte escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, -5) \cdot (-1, 4) = 2 \cdot (-1) + (-5) \cdot 4 = -2 - 20 = -22$

Angle:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-22}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{17}} = \frac{-22}{\sqrt{493}} \rightarrow \alpha = \arccos \left(\frac{-22}{\sqrt{493}} \right) = 172^\circ 14' 5''$$

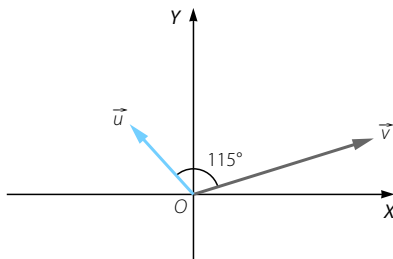
- 043 Calcula el producte escalar dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, si saps que $\vec{u} = (2, 4)$ i que el vector $\vec{v}$ té com a origen l'origen de coordenades i com a extrem el punt $B(8, 4)$.
Calcula l'angle que formen.

El vector $\vec{v} = (8, 4) - (0, 0)$

Producte escalar: $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 4) \cdot (8, 4) = 2 \cdot 8 + (-4) \cdot 4 = 16 - 16 = 0$

$$\text{Angle: } \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

- 044 Calcula el producte escalar dels dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ de la figura si saps que $|\vec{u}| = 3$ i $|\vec{v}| = 5$.



Producte escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = 3 \cdot 5 \cdot \cos 135^\circ = 15 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{-15\sqrt{2}}{2}$$

- 045 Donats dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, sabem que $|\vec{u}| = 5$ i que $\vec{v}$ té la mateixa direcció, sentit contrari i mòdul la meitat que $\vec{u}$. Calcula'n el producte escalar.

$$\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{u} \rightarrow \begin{cases} |\vec{v}| = \frac{5}{2} \\ \alpha = 180^\circ \end{cases}$$

$$\text{Producte escalar: } \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = 5 \cdot \frac{5}{2} \cdot \cos 180^\circ = \frac{25}{2} \cdot (-1) = -\frac{25}{2}$$

- 046 Calcula el valor de t perquè $\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$, si $\vec{u} = (-1, 2)$ i $\vec{v} = (3, t)$. Troba el mòdul dels dos vectors.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 7$$

$$(-1, 2) \cdot (3, t) = 7 \rightarrow -3 + 2t = 7 \rightarrow t = 5$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$$

- 047 Si $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ i $\vec{w} = (e, f)$, prova que es verifiquen les igualtats següents:

a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

d) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v}$

a) $\vec{u} + \vec{v} = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b) = \vec{v} + \vec{u}$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (a, b) \cdot ((c, d) + (e, f)) = (a, b) \cdot (c + e, d + f) = ac + ae + bd + bf$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f) = ac + bd + ae + bf$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = ((a, b) + (c, d)) \cdot ((a, b) + (c, d)) =$
 $= (a + c, b + d) \cdot (a + c, b + d) = a^2 + c^2 + 2ac + b^2 + d^2 + 2bd$
 $\vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = (a, b) \cdot (a, b) + (2a, 2b) \cdot (c, d) + (c, d) \cdot (c, d) =$
 $= a^2 + b^2 + 2ac + 2bd + c^2 + d^2$

d) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = ((a, b) + (c, d)) \cdot ((a, b) - (c, d)) =$
 $= (a + c, b + d) \cdot (a - c, b - d) = a^2 - c^2 + b^2 - d^2$
 $\vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = (a, b) \cdot (a, b) - (c, d) \cdot (c, d) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$

- 048 Determina si els vectors següents són perpendiculars o paral·lels:

a) $\vec{a} = (-2, 4)$ i $\vec{b} = (3, 2)$

b) $\vec{c} = (4, -3)$ i $\vec{d} = (6, 8)$

a) $\frac{-2}{3} \neq \frac{4}{2}$

No són paral·lels.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2, 4) \cdot (3, 2) = -6 + 8 \neq 0$$

No són perpendiculars.

b) $\frac{4}{6} \neq \frac{-3}{8}$

No són paral·lels.

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = (4, -3) \cdot (6, 8) = 24 - 24 = 0$$

Són perpendiculars.

Vectors i coordenades en el pla

- 049 Troba un vector $\vec{u} = (a, b)$ que sigui perpendicular a $\vec{v} = (3, 5)$ i que tingui com a mòdul $|\vec{u}| = 2\sqrt{34}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (a, b) \cdot (3, 5) = 3a + 5b = 0 \rightarrow a = -\frac{5b}{3}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(-\frac{5b}{3}\right)^2 + b^2} = 2\sqrt{34} \rightarrow \frac{25b^2}{9} + b^2 = 136 \rightarrow 34b^2 = 1.224 \rightarrow \\ \rightarrow b = \sqrt{36} = \pm 6$$

$$\text{Si } b = 6 \rightarrow a = -10$$

$$\text{Si } b = -6 \rightarrow a = 10$$

- 050 Donat el vector $\vec{p} = (6, 2)$, troba un vector $\vec{q}$ amb mòdul $\sqrt{89}$ i que compleixi que $\vec{p} \cdot \vec{q} = 14$.

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = (6, 2) \cdot (a, b) = 6a + 2b = 14 \rightarrow b = 7 - 3a$$

$$|\vec{q}| = \sqrt{a^2 + (7 - 3a)^2} = \sqrt{89} \rightarrow 10a^2 - 42a - 40 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{4}{5} \\ a_2 = 5 \end{cases}$$

$$\text{Si } a = -\frac{4}{5} \rightarrow b = \frac{47}{5}$$

$$\text{Si } a = 5 \rightarrow b = -8$$

- 051 Troba m i n perquè els vectors $\vec{u} = (3, m)$ i $\vec{v} = (n, -1)$ siguin perpendiculars i es verifiqui que $|\vec{u}| = 5$.

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + m^2} = 5 \rightarrow 9 + m^2 = 25 \rightarrow m = \pm 4$$

$$\text{Si } m = 4:$$

$$(3, 4) \cdot (n, -1) = 0 \rightarrow 3n - 4 = 0 \rightarrow n = \frac{4}{3}$$

$$\text{Si } m = -4:$$

$$(3, -4) \cdot (n, -1) = 0 \rightarrow 3n + 4 = 0 \rightarrow n = -\frac{4}{3}$$

- 052 Calcula m perquè $\vec{v} = (7, -2)$ i $\vec{w} = (m, 6)$:

a) Siguin perpendiculars.

b) Siguin paral·lels.

c) Tinguin el mateix mòdul.

$$\text{a) } (7, 2) \cdot (m, 6) = 7m + 12 = 0 \rightarrow m = -\frac{12}{7}$$

$$\text{b) } \frac{7}{m} = \frac{-2}{6} \rightarrow m = -21$$

$$\text{c) } |\vec{v}| = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{m^2 + 6^2}$$

$$53 = m^2 + 36 \rightarrow m = \sqrt{17}$$

- 053 Donats $\vec{a} = (6, -2)$ i $\vec{b} = (16, 12)$, calcula el valor de m perquè els vectors $\vec{u} = m\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$ siguin perpendiculars. Hi ha una solució única?

$$\vec{u} = m(6, -2) + (16, 12) = (16 + 6m, 12 - 2m)$$

$$\vec{v} = m(6, -2) - (16, 12) = (-16 + 6m, -12 - 2m)$$

Perquè els vectors siguin perpendiculars, el seu producte escalar ha de ser zero.

$$(16 + 6m, 12 - 2m) \cdot (-16 + 6m, -12 - 2m) = 36m^2 - 256 + 4m^2 - 144 = 0$$

$$\rightarrow m = \pm\sqrt{10}$$

La solució no és única.

- 054 Podries aconseguir un vector $\vec{a}$ que verifiqui que $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$, en què $\vec{b} = (2, 1)$, i que sigui perpendicular a $\vec{c} = (2, 6)$?

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \rightarrow (a, b) \cdot (2, 1) = 5 \rightarrow 2a + b = 5$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow (a, b) \cdot (2, 6) = 0 \rightarrow 2a + 6b = 0$$

Resolem el sistema:

$$a = 3, b = -1$$

- 055 Considera que A, B, C i D són els vèrtexs d'un quadrat d'1 cm de costat. Calcula els productes escalars següents:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$

b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$

d) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$

Agafem el punt A com a origen i obtenim les coordenades següents:

$$A(0, 0), B(1, 0), C(1, 1) \text{ i } D(0, 1).$$

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 0), \overrightarrow{BC} = (0, 1)$

$$(1, 0) \cdot (0, 1) = 0$$

b) $\overrightarrow{AC} = (1, 1), \overrightarrow{DB} = (1, -1)$

$$(1, 1) \cdot (1, -1) = 1 - 1 = 0$$

c) $\overrightarrow{AD} = (0, 1), \overrightarrow{CB} = (0, -1)$

$$(0, 1) \cdot (0, -1) = -1$$

d) $\overrightarrow{AC} = (1, 1), \overrightarrow{CB} = (0, -1)$

$$(1, 1) \cdot (0, -1) = -1$$

- 056 Per una translació, el punt $(1, -3)$ es transforma en $(3, 7)$. Quina és la imatge del punt $(-2, 5)$ per la mateixa translació? I la imatge de $(4, -6)$?

Calculem el vector de la translació:

$$A(1, -3), B(3, 7)$$

$$\overrightarrow{AB} = (2, 10)$$

Troblem la imatge de $(-2, 5)$:

$$(-2, 5) + (2, 10) = (0, 15)$$

Determinem la imatge de $(4, -6)$:

$$(4, -6) + (2, 10) = (6, 4)$$

Vectors i coordenades en el pla

- 057 Donat el vector $\overrightarrow{AB}$, on $A(1, 4)$ i $B(-1, 0)$, calcula'n un vector perpendicular que tingui mòdul 5.

Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB} = (-2, -4)$ serà de la forma $\vec{u} = k(4, -2)$.

$$\text{Mòdul: } |\vec{v}| = k \cdot \sqrt{20} = 5 \rightarrow k = \frac{5}{\sqrt{20}} = \frac{5}{2\sqrt{5}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{v} = \left(\frac{20}{2\sqrt{5}}, -\frac{10}{2\sqrt{5}} \right) = \left(\frac{10}{\sqrt{5}}, -\frac{5}{\sqrt{5}} \right)$$

- 058 Calcula un vector de mòdul 4 que formi un angle de 45° amb el vector $\vec{u} = (3, 4)$.

Considerem $\vec{v} = (x, y)$ el vector que ens demanen.

$$\text{Mòduls: } |\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ i } |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} = 4$$

$$\text{Producte escalar: } \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha = 5 \cdot 4 \cdot \cos 45^\circ = 20 \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

$$\text{Expressió analítica: } \vec{u} \cdot \vec{v} = 3x + 4y = 10\sqrt{2}$$

Obtenim el sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 10\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \rightarrow x = \frac{10\sqrt{2} - 4y}{3} \rightarrow \left(\frac{10\sqrt{2} - 4y}{3} \right)^2 + y^2 = 16,$$

que dóna l'equació de segon grau següent: $25y^2 - 80\sqrt{2}y + 56 = 0$,

$$\text{que té dues solucions: } y = \begin{cases} \frac{14\sqrt{2}}{5} \\ \frac{2\sqrt{2}}{5} \end{cases}$$

$$\text{Solucions: } \vec{v}_1 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{14\sqrt{2}}{5} \right) \quad \vec{v}_2 = \left(\frac{14\sqrt{2}}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{5} \right)$$

- 059 Calcula el valor de a perquè els vectors $\vec{u} = (1, -3)$ i $\vec{v} = (a, 5)$ formen un angle de 30° .

$$\text{Mòduls: } |\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10} \text{ i } |\vec{v}| = \sqrt{a^2 + 25}$$

Producte escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a - 15 = \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + 25} \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{10(a^2 + 25)} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Equació: } a - 15 = \frac{\sqrt{30(a^2 + 25)}}{2} \rightarrow (2a - 30)^2 = 30(a^2 + 25)$$

$$\text{Solucions: } a_1 = \frac{-25\sqrt{3} - 30}{13} \quad a_2 = \frac{25\sqrt{3} - 30}{13}$$

- 060 Calcula l'angle que formen aquests vectors:

a) $\vec{a} = (-1, 5)$ i $\vec{b} = (3, 2)$

c) $\vec{e} = (-6, 4)$ i $\vec{f} = (-9, 6)$

b) $\vec{c} = (1, \sqrt{3})$ i $\vec{d} = (-1, \sqrt{3})$

d) $\vec{g} = (2, -5)$ i $\vec{h} = (4, 6)$

$$\text{a) } \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{7}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = 0,38 \rightarrow \alpha = 67^\circ 37' 11,51''$$

$$\text{b) } \cos \alpha = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{c}| \cdot |\vec{d}|} = \frac{2}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{4}} = 0,5 \rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\text{c) } \cos \alpha = \frac{\vec{e} \cdot \vec{f}}{|\vec{e}| \cdot |\vec{f}|} = \frac{78}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{117}} = 1 \rightarrow \alpha = 0^\circ$$

$$\text{d) } \cos \alpha = \frac{\vec{g} \cdot \vec{h}}{|\vec{g}| \cdot |\vec{h}|} = \frac{-22}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{52}} = -0,56 \rightarrow \alpha = 124^\circ 30' 30,6''$$

061 Calcula m perquè els vectors $\vec{a} = (8, -6)$ i $\vec{b} = (m, 3)$ formin un angle de 60° .

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{8m - 18}{10 + \sqrt{m^2 + 9}} \rightarrow \sqrt{m^2 + 9} = 16m - 46 \\ &\rightarrow 255m^2 - 1.472m + 2.107 = 0 \rightarrow m = \frac{736}{255} \pm \frac{\sqrt{4.411}}{255} \end{aligned}$$

062 Troba un vector $\vec{a}$ que formi un angle de 30° amb $\vec{b} = (3, -4)$ i que verifiqui que $|\vec{a}| = \sqrt{3} \cdot |\vec{b}|$.

$$\cos 30^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a - 4b}{5\sqrt{3} + 5} \rightarrow 15 + 5\sqrt{3} = 6a - 8b$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = 5\sqrt{3} \rightarrow a^2 + b^2 = 75$$

Resolem el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 6a - 8b &= 15 + 5\sqrt{3} \\ a^2 + b^2 &= 75 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{a = \frac{15 + 5\sqrt{3} + 8b}{6}} \left(\frac{15 + 5\sqrt{3} + 8b}{6} \right)^2 + b^2 = 75$$

$$50b^2 + 40\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)b + 75\sqrt{3} - 1.200 = 0$$

$$\rightarrow b = -\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{5} \pm \sqrt{\frac{1.296 - 27\sqrt{3}}{50}}$$

063 Calcula a i b , si els vectors $\vec{u} = (a, 4)$ i $\vec{v} = (b, 14)$ formen un angle de 45° i $|\vec{u}| = 5$.

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{ab + 56}{5 + \sqrt{b^2 + 196}} \rightarrow 5\sqrt{2} + \sqrt{2b^2 + 392} = 2ab + 112$$

$$\sqrt{a^2 + 16} = 5$$

Resolem el sistema:

$$\left. \begin{aligned} 5\sqrt{2} + \sqrt{2b^2 + 392} &= 2ab + 112 \\ \sqrt{a^2 + 16} &= 5 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{a = \pm 3} \left\{ \begin{aligned} b_1 &= -\frac{3\sqrt{2}(56\sqrt{2} - 5)}{17} + \sqrt{\frac{9.629 - 560\sqrt{2}}{289}} \\ b_2 &= \frac{3\sqrt{2}(56\sqrt{2} - 5)}{17} - \sqrt{\frac{9.629 - 560\sqrt{2}}{289}} \end{aligned} \right\}$$

Vectors i coordenades en el pla

- 064 Calcula el valor de l'angle que formen els vectors $\vec{u} = (x, x)$ i $\vec{v} = (-2x, 2x)$ si x és un valor real qualsevol.

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x(-2x) + x(2x)}{\sqrt{2x} \cdot 2\sqrt{2x}} = \frac{-4x^2}{4x^2} = -1 \rightarrow \alpha = 180^\circ$$

- 065 Calcula quant ha de valer x perquè el valor de l'angle que formen els vectors $\vec{u} = (x, x)$ i $\vec{v} = (2x, -3x)$ sigui de 30° .

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x(2x) + x(-3x)}{\sqrt{2x} \cdot \sqrt{13x}} = \frac{-x^2}{\sqrt{26}x^2} = \frac{-1}{\sqrt{26}} \rightarrow \alpha = 101^\circ 18' 36''$$

que és l'angle que formaran sigui quin sigui el valor de x . Per tant, no hi ha cap valor que faci que aquests dos vectors formin un angle de 30° .

- 066 Troba el punt mitjà dels segments d'extrems:

a) $A(3, 5)$ i $B(9, 11)$

c) $A(4, 5)$ i $B(7, 1)$

b) $A(-3, 1)$ i $B(7, -4)$

d) $A(-6, -1)$ i $B(-9, -3)$

Anomenem M el punt mitjà de A i B .

$$\text{a) } M = \left(\frac{3+9}{2}, \frac{5+11}{2} \right) = (6, 8)$$

$$\text{b) } M = \left(\frac{-3+7}{2}, \frac{1-4}{2} \right) = \left(2, -\frac{3}{2} \right)$$

$$\text{c) } M = \left(\frac{4+7}{2}, \frac{5+1}{2} \right) = \left(\frac{11}{2}, 3 \right)$$

$$\text{d) } M = \left(\frac{-6-9}{2}, \frac{-1-3}{2} \right) = \left(-\frac{15}{2}, -2 \right)$$

- 067 Si el punt mitjà del segment AB és $M(3, 5)$, donat $A(9, 7)$, calcula el punt B . Després calcula A amb $M(-1, 5)$ i $B(4, -9)$.

Si $B(x, y)$:

$$(3, 5) = \left(\frac{9+x}{2}, \frac{7+y}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} 3 = \frac{9+x}{2} \\ 5 = \frac{7+y}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Si $A(x, y)$:

$$(-1, 5) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{-9+y}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} -1 = \frac{4+x}{2} \\ 5 = \frac{-9+y}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 19 \end{cases}$$

- 068 Calcula el punt mitjà del vector $\overrightarrow{PQ}$ si $P(7, 2)$ i $Q(-11, 0)$.

$$M = \left(\frac{7+(-11)}{2}, \frac{2+0}{2} \right) \rightarrow M(2, 1)$$

- 069 Troba les coordenades del punt simètric de $P(-4, 2)$ respecte del punt $Q(5, -1)$.
Determina també el punt simètric de $A(3, -2)$ respecte de $B(-3, 4)$.

Com que $P(-4, 2)$ és el punt mitjà de $Q(5, -1)$ i $Q'(x, y)$:

$$(-4, 2) = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{-1+y}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} -4 = \frac{5+x}{2} \\ 2 = \frac{-1+y}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -13 \\ y = 5 \end{cases}$$

I com que $B(-3, 4)$ és el punt mitjà de $A(3, -2)$ i $A'(x, y)$:

$$(-3, 4) = \left(\frac{3+x}{2}, \frac{-2+y}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} -3 = \frac{3+x}{2} \\ 4 = \frac{-2+y}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y = 10 \end{cases}$$

- 070 Calcula el punt mitjà dels segments següents:

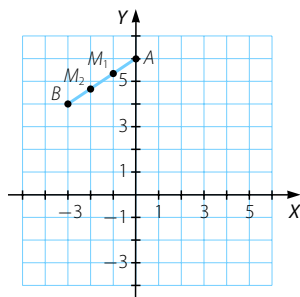
a) $\overline{AB}$, si $A(0, 0)$ i $B(6, 4)$ b) $\overline{CD}$, si $C(-2, 4)$ i $D(6, -3)$

a) $M_{\overline{AB}} = \left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+4}{2} \right) \rightarrow M_{\overline{AB}}(3, 2)$

b) $M_{\overline{CD}} = \left(\frac{-2+6}{2}, \frac{4+(-3)}{2} \right) \rightarrow M_{\overline{CD}}\left(2, \frac{1}{2}\right)$

- 071 Considera el segment $\overline{AB}$, amb $A(0, 6)$ i $B(-3, 4)$.
Representa'l gràficament i divideix-lo en tres parts iguals.

Considerem $M_1 = (a_1, b_1)$ i $M_2 = (a_2, b_2)$
els punts que ens han demanat.



Es compleix: $\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \rightarrow (a_1 - 0, b_1 - 6) = \left(\frac{-3-0}{3}, \frac{4-6}{3} \right)$

$$(a_1, b_1 - 6) = \left(-1, -\frac{2}{3} \right) \rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ b_1 = \frac{16}{3} \end{cases}$$

I: $\overrightarrow{AM_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \rightarrow (a_2 - 0, b_2 - 6) = 2\left(-1, -\frac{2}{3} \right)$

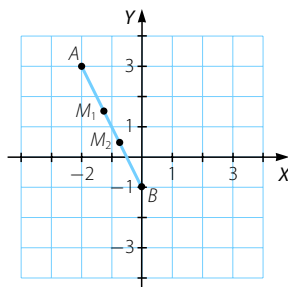
$$(a_2, b_2 - 6) = \left(-2, -\frac{4}{3} \right) \rightarrow \begin{cases} a_2 = -2 \\ b_2 = \frac{14}{3} \end{cases}$$

Punts: $M_1 = \left(-1, \frac{16}{3} \right)$ i $M_2 = \left(-2, \frac{14}{3} \right)$

Vectors i coordenades en el pla

- 072 Considera el segment $\overline{AB}$, amb $A(-2, 3)$ i $B(0, -1)$. Dibuixa'l i esbrina quins punts el divideixen en tres parts iguals.

Considerem $M_1 = (a_1, b_1)$ i $M_2 = (a_2, b_2)$ els punts que ens han demanat.



$$\text{Es compleix: } \overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \rightarrow (a_1 - (-2), b_1 - 3) = \left(\frac{0 - (-2)}{3}, \frac{-1 - 3}{3} \right)$$

$$(a_1 + 2, b_1 - 3) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3} \right) \rightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{4}{3} \\ b_1 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{I: } \overrightarrow{AM_2} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \rightarrow (a_2 - (-2), b_2 - 3) = 2 \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3} \right)$$

$$(a_2 + 2, b_2 - 3) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{3} \right) \rightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{2}{3} \\ b_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Punts: } M_1 = \left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right) \text{ i } M_2 = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right)$$

- 073 Si $A(3, 1)$, $B(5, 7)$ i $C(6, 4)$ són tres vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram, quin és el quart vèrtex?

Calculem el punt mitjà del segment AC:

$$M = \left(\frac{3+6}{2}, \frac{1+4}{2} \right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

El quart vèrtex, $D(x, y)$, és simètric de B respecte de M.

$$\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2} \right) = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{7+y}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

- 074 Dos vèrtexs consecutius d'un hexàgon regular centrat a l'origen de coordenades són $(4, 0)$ i $(2, 2\sqrt{3})$. Calcula les coordenades dels altres vèrtexs.

Calculem els vèrtexs $A'(a, b)$ i $B'(c, d)$, que són simètrics de A i B respecte de O .

$$(0, 0) = (4 + a, 0 + b) \rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 0 \end{cases} \quad (0, 0) = (2 + a, 2\sqrt{3} + b) \rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -2\sqrt{3} \end{cases}$$

El vèrtex C s'obté amb una translació amb origen a B i vector $(-4, 0)$:

$$C = (2, 2\sqrt{3}) + (-4, 0) = (-2, 2\sqrt{3})$$

El vèrtex C' s'obté amb una translació amb origen a B' i vector $(4, 0)$:

$$C' = (-2, -2\sqrt{3}) + (4, 0) = (2, -2\sqrt{3})$$

- 075** Tres vèrtexs consecutius d'un hexàgon regular són $(0, 0)$, $(2, 0)$ i $(3, \sqrt{3})$. Troba els altres vèrtexs.

Sabem que $A(0, 0)$, $B(2, 0)$ i $C(3, \sqrt{3})$.

Calculem el vèrtex D , amb una translació amb origen a C i vector guia $(-1, \sqrt{3})$

$$D = (3, \sqrt{3}) + (-1, \sqrt{3}) = (2, 2\sqrt{3})$$

Troblem el vèrtex E , amb una translació amb origen a D i vector guia $(-2, 0)$:

$$E = (2, 2\sqrt{3}) + (-2, 0) = (0, 2\sqrt{3})$$

Determinem el vèrtex F , amb una translació amb origen a E i vector guia $(-1, -\sqrt{3})$

$$F = (0, 2\sqrt{3}) + (-1, -\sqrt{3}) = (-1, \sqrt{3})$$

- 076** Calcula les coordenades dels punts que divideixen el segment d'extrems $A(5, -1)$ i $B(17, 8)$ en tres parts iguals.

Calculem el vector $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (12, 9)$

El primer punt estarà situat a $\frac{1}{3}$ de distància d'un dels extrems del segment, i el segon, a $\frac{2}{3}$ de distància.

$$P_1 = A + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} = (5, -1) + \frac{1}{3} (12, 9) = (9, 2)$$

$$P_2 = A + \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} = (5, -1) + \frac{2}{3} (12, 9) = (13, 5)$$

- 077** Determina el valor de a , si saps que la distància entre $Q(-6, 2)$ i $P(a, 7)$ és 13. Escriu també les coordenades i el mòdul del vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{(-6-a)^2 + (2-7)^2} &= 13 \rightarrow \sqrt{36 + 12a + a^2 + 25} = 13 \\ &\rightarrow a^2 + 12a - 108 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = -18 \\ a_2 = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

Calculem les dues solucions:

$$\overrightarrow{PQ} = (-12, -5)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (12, -5)$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = 13$$

Vectors i coordenades en el pla

- 078 Demuestra que el triangle de vèrtexs $A(3, 1)$, $B(9, -1)$ i $C(5, -5)$ és isòsceles. És equilàter? Quins són els costats iguals? Calcula'n l'àrea.

Troblem els vectors formats pels vèrtexs del triangle:

$$\overrightarrow{AB} = (6, -2), \overrightarrow{BC} = (-4, -4) \text{ i } \overrightarrow{AC} = (2, -6)$$

Calculem els mòduls dels vectors:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} \text{ u}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} \text{ u}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} \text{ u}$$

Com que el triangle té dos costats iguals, AB i AC , és un triangle isòsceles.

Per trobar l'àrea calculem l'altura, h , sobre el costat BC aplicant el teorema de Pitàgores:

$$h = \sqrt{(\sqrt{40})^2 - \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2} = \sqrt{40 - 8} = \sqrt{32} \text{ u}$$

$$A = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{32} \cdot \sqrt{32}}{2} = 16 \text{ u}^2$$

- 079 Determina si el triangle de vèrtexs $A(12, 10)$, $B(20, 16)$ i $C(8, 32)$ és rectangle.

Calculem els vectors formats pels vèrtexs del triangle:

$$\overrightarrow{AB} = (8, 6), \overrightarrow{BC} = (-12, 16) \text{ i } \overrightarrow{AC} = (-4, 22)$$

Troblem els mòduls dels vectors:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64 + 36} = 10 \text{ u}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20 \text{ u}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16 + 484} = \sqrt{500} \text{ u}$$

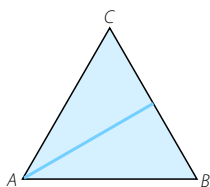
Si el triangle és rectangle, ha de verificar el teorema de Pitàgores.

$$|\overrightarrow{AC}|^2 = |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$$

$$10^2 + 20^2 = 500$$

Així doncs, el triangle és rectangle.

- 080 Troba la longitud de la mitjana que surt de A al triangle de vèrtexs $A(-1, 4)$, $B(6, 5)$ i $C(10, -3)$. En aquest cas, la mitjana coincideix amb l'altura? Justifica-ho.



Calculem el punt mitjà, M , del segment CB :

$$M = \left(\frac{6 + 10}{2}, \frac{5 - 3}{2} \right) = (8, 1)$$

Per trobar la longitud de la mitjana, determinem el mòdul del vector $\overrightarrow{AM}$:

$$\overrightarrow{AM} = (9, -3) \quad |\overrightarrow{AM}| = \sqrt{81 + 9} = \sqrt{90}$$

Perquè la mitjana, AM , coincideixi amb l'altura sobre el costat CB , els costats AC i AB han de ser iguals.

$$\overrightarrow{AC} = (11, -7)$$

$$\overrightarrow{AB} = (7, 1)$$

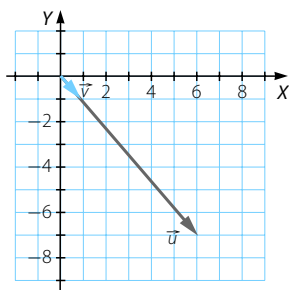
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{121 + 49} = \sqrt{170}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50}$$

Així doncs, la mitjana no coincideix amb l'altura.

- 081** Esbrina el vector unitari corresponent al vector $(6, -7)$. Troba la projecció del primer vector sobre el segon i representa-ho gràficament.

Anomenem $\vec{v} = (a, b)$ el vector unitari en la mateixa direcció i sentit que el vector $\vec{u} = (6, -7)$.



$$\vec{v} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{85}} \cdot (6, -7) = \left(\frac{6}{\sqrt{85}}, \frac{-7}{\sqrt{85}} \right)$$

Projecció del vector $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$:

$$\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v} = \frac{\sqrt{85}}{1} \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{85}}, \frac{-7}{\sqrt{85}} \right) = (6, -7) = \vec{u}$$

- 082** Comprova si els punts $A(0, -2)$, $B(3, 2)$ i $C(7, 8)$ estan alineats.

S'ha de complir que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 0, 2 - (-2)) = (3, 4) \text{ i } \overrightarrow{AC} = (7 - 0, 8 - (-2)) = (7, 10)$$

Com que $\frac{3}{4} \neq \frac{7}{10}$, els punts no estan alineats.

- 083** Calcula el valor de k perquè els punts $A(1, 1)$, $B(3, 5)$ i $C(11, k)$ estiguin alineats.

S'ha de complir que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 1, 5 - 1) = (2, 4) \text{ i } \overrightarrow{AC} = (11 - 1, k - 1) = (10, k - 1)$$

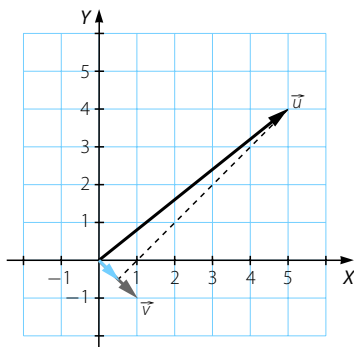
$$\frac{2}{10} = \frac{4}{k - 1} \rightarrow 2k - 2 = 40 \rightarrow k = 21$$

Vectors i coordenades en el pla

- 084 Calcula, gràficament i analíticament, la projecció ortogonal del vector $\vec{u} = (5, 4)$ sobre el vector $\vec{v} = (1, -1)$.

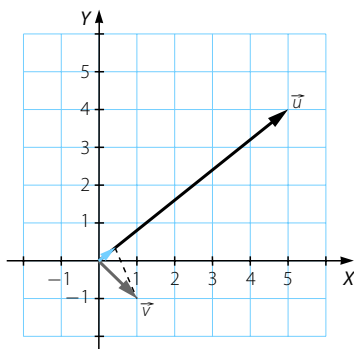
$$\text{Mòduls: } \vec{u} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \text{ i } \vec{v} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v} = \frac{5 \cdot 1 + 4 \cdot (-1)}{(\sqrt{2})^2} \cdot (1, -1) = \frac{1}{2}(1, -1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$



- 085 Considera els vectors de l'activitat anterior. Calcula la projecció ortogonal del vector $\vec{v}$ sobre el vector $\vec{u}$.

$$\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} \cdot \vec{u} = \frac{5 \cdot 1 + 4 \cdot (-1)}{(\sqrt{41})^2} \cdot (5, 4) = \frac{1}{41}(5, 4) = \left(\frac{5}{41}, \frac{4}{41}\right)$$



- 086 Troba la resta de vèrtexs d'un quadrat si dos d'aquests vèrtexs no consecutius són (3, 1) i (9, -7).

$$A(3, 1), C(9, -7), B(a, b) \text{ i } D(c, d).$$

Calculem la longitud de la diagonal formada pels vèrtexs donats:

$$|D| = \sqrt{(9-3)^2 + (-7-1)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ u}$$

$$\text{Trobem la longitud dels costats, } l: 100 = 2c^2 \rightarrow l = \sqrt{50}$$

La longitud dels vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{AD}$ ha de ser igual a la longitud del costat.

$$\sqrt{50} = \sqrt{(a-3)^2 + (b-1)^2} \rightarrow 50 = a^2 - 6a + 9 + b^2 - 2b + 1$$

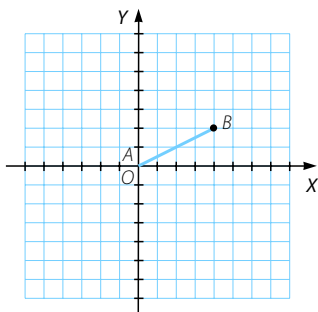
$$\sqrt{50} = \sqrt{(a-9)^2 + (b+7)^2} \rightarrow 50 = a^2 - 18a + 81 + b^2 + 14b + 49$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{(c-9)^2 + (d+7)^2} \rightarrow 50 = c^2 - 18c + 81 + d^2 + 14d + 49$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{(c-3)^2 + (d-1)^2} \rightarrow 50 = c^2 - 6c + 9 + d^2 - 2d + 1$$

Resolem el sistema: $B(2, -6)$ i $D(10, 0)$.

- 087 D'un quadrat $ABCD$ coneixem dos vèrtexs consecutius: $A(0, 0)$ i $B(4, 2)$.
 Calcula els altres vèrtexs de les dues solucions possibles.
 Representa-ho gràficament.



Hem de trobar un punt $C(a, b)$ de manera que $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ i $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$
 $\overrightarrow{BC} = (a-4, b-2) : (4, 2) \cdot (a-4, b-2) = 4a - 16 + 2b - 4 = 0 \rightarrow b = 10 - 2a$

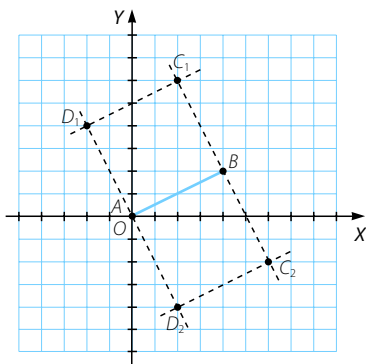
Com que $\sqrt{(a-4)^2 + (b-2)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20}$, substituïm

$$(a-4)^2 + (10-2a-2)^2 = 20 \rightarrow 5a^2 - 40a + 60 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 6 \end{cases}$$

per la qual cosa apareixen dos punts: $C_1 = (2, 6)$ i $C_2 = (6, -2)$.

Per a cadascun dels vèrtexs C hem d'obtenir l'altre D ; com que sabem que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, obtenim els dos punts D :

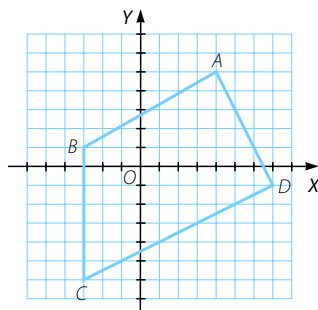
$$D_1 = (-2, 4) \text{ i } D_2 = (2, -4)$$



Vectors i coordenades en el pla

088

Donat el quadrilàter de la figura, calcula els punts mitjans de cada costat i demostra que si els unim obtenim un paral·lelogram.

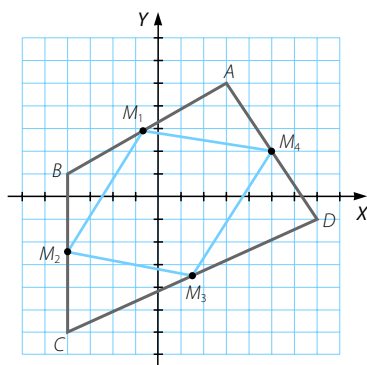


$$\left. \begin{array}{l} A(3, 5) \\ B(-4, 1) \end{array} \right\} \rightarrow M_1 = \left(-\frac{1}{2}, 3 \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} B(-4, 1) \\ C(-4, -6) \end{array} \right\} \rightarrow M_2 = \left(-4, -\frac{5}{2} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} C(-4, -6) \\ D(7, -1) \end{array} \right\} \rightarrow M_3 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} D(7, -1) \\ A(3, 5) \end{array} \right\} \rightarrow M_4 = (5, 2)$$



$$\overrightarrow{M_1M_2} = \left(-4 - \left(-\frac{1}{2} \right), -\frac{5}{2} - 3 \right) = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{11}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{M_4M_3} = \left(\frac{3}{2} - 5, -\frac{7}{2} - 2 \right) = \left(-\frac{7}{2}, -\frac{11}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{M_2M_3} = \left(\frac{3}{2} - (-4), -\frac{7}{2} - \left(-\frac{5}{2} \right) \right) = \left(\frac{11}{2}, -1 \right)$$

$$\overrightarrow{M_4M_1} = \left(5 - \left(-\frac{1}{2} \right), 2 - 3 \right) = \left(\frac{11}{2}, -1 \right)$$

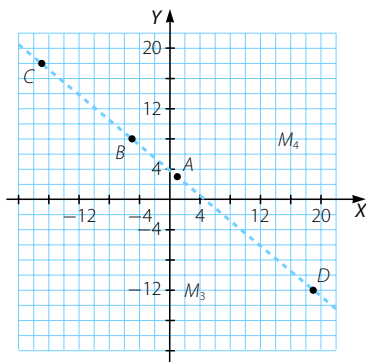
Per tant, és un paral·lelogram ja que: $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3}$ i $\overrightarrow{M_2M_3} = \overrightarrow{M_4M_1}$

- 089 Donats els punts $A(1, 3)$ i $B(-5, 8)$, troba els punts C i D de manera que estiguin alineats amb A i B i que la distància de A a C o D sigui el triple que la de A a B .

Els punts $C(c_1, c_2)$ i $D(d_1, d_2)$ han de complir que $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AD}$ i $d(A, C) = d(A, D) = 3d(A, B)$. Per tant:

$$\overrightarrow{AC} = 3 \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \cdot (-6, 5) = (-18, 15) \xrightarrow{A(1, 3)} C(-17, 18)$$

$$\overrightarrow{AD} = -3 \cdot \overrightarrow{AB} = -3 \cdot (-6, 5) = (18, -15) \xrightarrow{A(1, 3)} D(19, -12)$$



- 090 Si $A(2, 4)$ i $B(3, 8)$, determina un punt situat al segment AB de manera que la seva distància a B sigui la tercera part que la seva distància a A .

Hem de trobar un punt $C(c_1, c_2)$ que ha de complir que

$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{CA} \rightarrow (c_1 - 3, c_2 - 8) = \frac{1}{3}(2 - c_1, 4 - c_2) \rightarrow \begin{cases} c_1 - 3 = \frac{2 - c_1}{3} \\ c_2 - 8 = \frac{4 - c_2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{11}{4} \\ c_2 = 7 \end{cases}$$

El punt és $C\left(\frac{11}{4}, 7\right)$.

- 091 Els vèrtexs d'un triangle són $(-7, 3)$, $(1, 1)$ i $(-1, -5)$. Troba els punts mitjans dels costats. Comprova que el triangle que determinen té els costats paral·lels al primer i que la mida dels costats és la meitat.

Calculem el punt mitjà, C' , del costat AB , en què $A(-7, 3)$ i $B(1, 1)$: $C' = (-3, 2)$

Troblem el punt mitjà, B' , del costat AC , en què $A(-7, 3)$ i $C(-1, -5)$: $B' = (-4, -1)$

Determinem el punt mitjà, A' , del costat CB , en què $B(1, 1)$ i $C(-1, -5)$: $A' = (0, -2)$

Calculem els vectors formats pels vèrtexs dels triangles:

$$\overrightarrow{AB} = (8, -2), \overrightarrow{AC} = (6, -8) \text{ i } \overrightarrow{BC} = (-2, -6)$$

$$\overrightarrow{A'B'} = (-4, 1), \overrightarrow{A'C'} = (-3, 4) \text{ i } \overrightarrow{B'C'} = (1, 3)$$

Com que les coordenades són proporcionals, els costats són paral·lels.

Determinem la longitud dels costats:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

$$|\overrightarrow{A'B'}| = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{36 + 64} = 10$$

$$|\overrightarrow{A'C'}| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$|\overrightarrow{B'C'}| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

Vectors i coordenades en el pla

- 092 Donats els punts $A(3, 0)$ i $B(-3, 0)$, troba un punt C sobre l'eix de coordenades, de manera que el triangle que descriguin sigui equilàter. Hi ha una solució única? Troba l'àrea dels triangles que en resulten.

Els vectors formats pels vèrtexs han de tenir la mateixa longitud.

Si $C(0, c)$:

$$|\vec{CA}| = \sqrt{9 + c^2} \quad |\vec{CB}| = \sqrt{9 + c^2} \quad |\vec{AB}| = 6$$

$$6 = \sqrt{9 + c^2} \rightarrow c = \sqrt{27}$$

Els punts que ens demanen són: $C_1(0, 3\sqrt{3})$ i $C_2(0, -3\sqrt{3})$

Calculem l'àrea dels triangles:

$$A = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \text{ u}^2$$

- 093 Quines condicions han de complir els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ perquè $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 0$? Amb aquest resultat, demostra que, si un paral·lelogram té les diagonals perpendiculars, només pot ser un quadrat o un rombe.

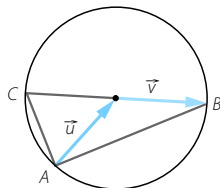
$$\vec{u} = (a, b) \quad \vec{v} = (c, d)$$

$$(a + c, b + d) \cdot (a - c, b - d) = 0 \rightarrow a^2 - c^2 + b^2 - d^2 = 0 \rightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2 \rightarrow |\vec{u}| = |\vec{v}|$$

Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són els costats d'un paral·lelogram, $\vec{u} + \vec{v}$ i $\vec{u} - \vec{v}$ en són les diagonals.

Així doncs, si les diagonals són perpendiculars, els mòduls tenen la mateixa mida; per tant, només pot ser un quadrat o un rombe.

- 094 El costat gran d'aquest triangle és un diàmetre de la circumferència. Expressa el vector $\vec{AC}$ com a combinació lineal de $\vec{u}$ i de $\vec{v}$. Efectua el producte escalar $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ i simplifica tant com puguis. Quin resultat obtens?

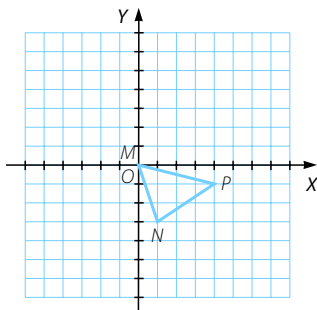


$$\vec{AC} = \vec{u} - \vec{v} \quad \vec{AB} = \vec{u} + \vec{v}$$

Els mòduls de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són iguals, ja que són radis de la circumferència.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0$$

- 095 Calcula els vèrtexs d'un triangle si saps que els punts $M(0, 0)$, $N(1, -3)$ i $P(4, 1)$ són els punts mitjans dels seus costats.



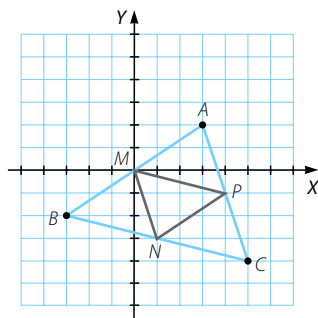
Hem de trobar tres punts $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ i $C(c_1, c_2)$, de manera que els punts M , N i P siguin els punts mitjans de cada un dels segments. Per tant:

$$\begin{cases} A(a_1, a_2) \\ B(b_1, b_2) \end{cases} \rightarrow M(0, 0) \rightarrow \begin{cases} \frac{a_1 + b_1}{2} = 0 \\ \frac{a_2 + b_2}{2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b_1 = -a_1 \\ b_2 = -a_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B(b_1, b_2) \\ C(c_1, c_2) \end{cases} \rightarrow N(1, -3) \rightarrow \begin{cases} \frac{b_1 + c_1}{2} = 1 \\ \frac{b_2 + c_2}{2} = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b_1 + c_1 = 2^{(*)} \\ b_2 + c_2 = -6^{(**)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C(c_1, c_2) \\ A(a_1, a_2) \end{cases} \rightarrow P(4, -1) \rightarrow \begin{cases} \frac{c_1 + a_1}{2} = 4 \\ \frac{c_2 + a_2}{2} = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 - b_1 = 8^{(*)} \\ c_2 - a_2 = -2^{(**)} \end{cases}$$

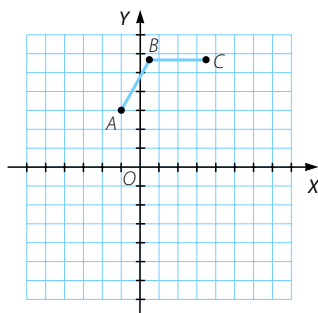
La solució del sistema (*) i del sistema (**) ens dona els tres punts $A(3, 2)$, $B(-3, -2)$ i $C(5, -4)$



096

Els punts $A(-1, 3)$, $B\left(\frac{7}{2}, \frac{6 + \sqrt{3}}{2}\right)$ i $C\left(\frac{13}{2}, \frac{6 + \sqrt{3}}{2}\right)$ són tres vèrtexs consecutius

d'un hexàgon regular. Troba les coordenades dels altres vèrtexs i fes la representació gràfica del polígon regular.



Vectors i coordenades en el pla

Busquem en primer lloc el centre de l'hexàgon regular $O(x, y)$, de manera que els vectors $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC}$ siguin iguals:

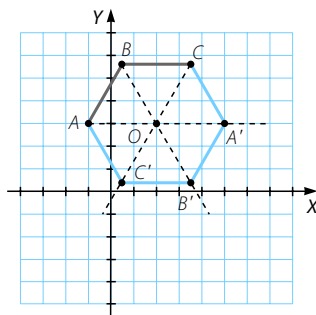
$$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC} \rightarrow (x - (-1), y - 3) = \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2}, 0\right) \rightarrow \begin{cases} x + 1 = 3 \\ y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow O(2, 3)$$

Aquest punt O és el punt mitjà dels segments $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$:

$$\left. \begin{matrix} A(-1, 3) \\ A'(a_1, a_2) \end{matrix} \right\} \rightarrow O(2, 3) \rightarrow \begin{cases} \frac{-1 + a_1}{2} = 2 \\ \frac{3 + a_2}{2} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_2 = 3 \end{cases}$$

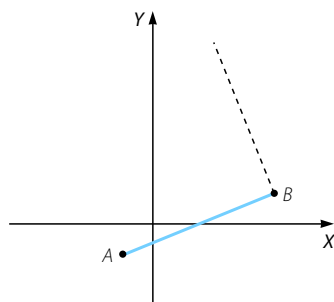
$$\left. \begin{matrix} B\left(\frac{1}{2}, 5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ B'(b_1, b_2) \end{matrix} \right\} \rightarrow O(2, 3) \rightarrow \begin{cases} \frac{\frac{1}{2} + b_1}{2} = 2 \\ \frac{5 + \frac{\sqrt{3}}{2} + b_2}{2} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{7}{2} \\ b_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} C\left(\frac{7}{2}, 5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ C'(c_1, c_2) \end{matrix} \right\} \rightarrow O(2, 3) \rightarrow \begin{cases} \frac{\frac{7}{2} + c_1}{2} = 2 \\ \frac{5 + \frac{\sqrt{3}}{2} + c_2}{2} = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2} \\ c_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

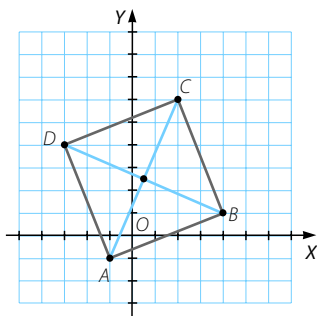


097 El punts $A = (-1, 1)$ i $B = (4, 1)$ representen dos vèrtexs consecutius d'un quadrat, i el vèrtex C està en el primer quadrant, com s'indica a la figura.

- Calcula el vèrtex C i el vèrtex D .
- Calcula el punt central M del quadrat.
- Calcula el vector que dona la diagonal AD del quadrat.



- a) Si $C = (c_1, c_2)$, el vector $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB}$ i $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB}|$. Per tant, com que $\overrightarrow{AB} = (5, 2)$, aleshores $\overrightarrow{BC} = (-2, 5) \rightarrow C = (2, 6)$, i el vèrtex D ha de ser tal que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$; així doncs, $D = (-3, 4)$.
- b) El punt mitjà entre A i $C \rightarrow M = \left(\frac{-1+2}{2}, \frac{-1+6}{2} \right) \rightarrow M \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right)$.
- c) La diagonal és: $\overrightarrow{AC} = (2 - (-1), 6 - 1) = (3, 5)$.

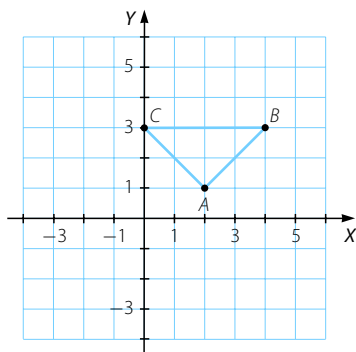


098 Considera el triangle de vèrtexs $A = (2, 1)$, $B = (4, 3)$ i $C = (0, 3)$. Dibuixa'l.

- a) Comprova després per algun raonament matemàtic (no només gràficament) que és un triangle rectangle.
- b) Calcula'n l'àrea.

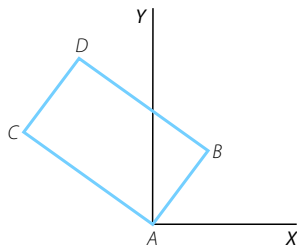
a) Calculem el producte escalar dels vectors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (2, 2) \cdot (-2, 2) = -4 + 4 = 0$; per tant, els costats AB i AC són perpendiculars $\rightarrow ABC$ és rectangle

$$b) \text{ Àrea} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}|}{2} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{8}}{2} = 4$$



099 Considera el rectangle del pla representat en el dibuix.

- a) Sabent que les coordenades de A són $(0, 0)$ i les de B són $(3, 4)$, calcula la longitud del costat AB .
- b) Determina les coordenades del vèrtex C sabent que la longitud del costat CA és doble de la del costat AB .
- c) Calcula les coordenades del vèrtex D .



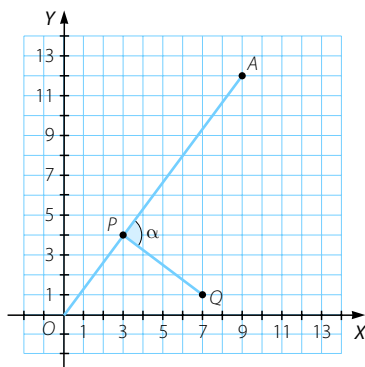
Vectors i coordenades en el pla

- a) Costat: $\overline{AB} = d(A, B) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
 b) Vèrtex: $C = (c_1, c_2)$, de manera que $\overline{AC} \perp \overline{AB}$ i $|\overline{BC}| = 2|\overline{AB}| = 2\sqrt{5}$,
 o sigui que $C = (-8, 6)$
 c) Vèrtex: $D = (d_1, d_2)$ és tal que $\overline{CD} = \overline{AB}$; per tant, $C = (-5, 10)$

100 Considera dos eixos perpendiculars de coordenades. Considera els punts O i A de coordenades $O = (0, 0)$ i $A = (9, 12)$. Una persona situada al punt O inicia un viatge en línia recta cap a A .

- a) Quina distància haurà de recórrer per anar de O a A ?
 b) Digues quines seran les coordenades del punt P on es trobarà la persona quan hagi recorregut la tercera part de la distància de l'apartat anterior.
 c) Si després d'haver recorregut el segment OP , quan arribi a P decideix dirigir-se cap al punt $Q = (7, 1)$, quin angle haurà de girar cap a la dreta?

- a) Distància $d(O, A) = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$
 b) El vector $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}(9, 12) = (3, 4) \rightarrow P = (3, 4)$
 c) Angle $\alpha \rightarrow \cos \alpha = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PQ}|} = \frac{(6, 8) \cdot (4, -3)}{\sqrt{100} \cdot \sqrt{25}} = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ$



101 Al triangle de vèrtexs $A = (0, 3)$, $B = (3, 7)$ i $C = (6, 0)$ determina:

- a) Els seus angles b) El perímetre.

a) Angles:

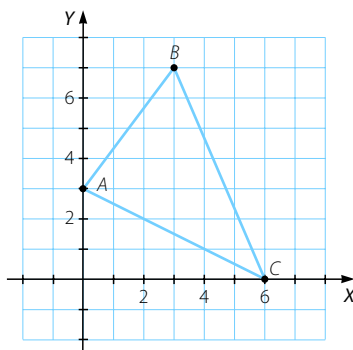
$$\cos \hat{A} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{(3, 4) \cdot (6, -3)}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{45}} = \frac{6}{5 \cdot 3\sqrt{5}} = \frac{2}{5\sqrt{5}} \rightarrow \hat{A} = 79^\circ 41' 43''$$

$$\cos \hat{B} = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{(-3, -4) \cdot (3, -7)}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{58}} = \frac{19}{5\sqrt{58}} \rightarrow \hat{B} = 60^\circ 4' 7''$$

$$\cos \hat{C} = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{|\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}|} = \frac{(-6, 3) \cdot (-3, 7)}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{58}} = \frac{39}{\sqrt{2.610}} \rightarrow \hat{C} = 40^\circ 14' 10''$$

b) Perímetre:

$$p = d(A, B) + d(B, C) + d(C, A) = 5 + \sqrt{58} + \sqrt{45} = 19,32$$



102 Un triangle rectangle isòsceles té el vèrtex A, corresponent a l'angle recte, a l'origen de coordenades. Un altre dels seus vèrtexs és el punt B(2,4). Calcula:

a) L'altre vèrtex.

b) El perímetre del triangle.

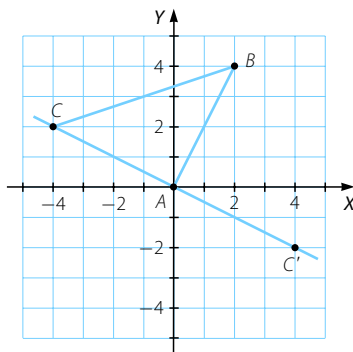
c) L'àrea del triangle.

a) Busquem un punt $C = (c_1, c_2)$ tal que $\vec{AC} \perp \vec{AB}$ i amb el mateix mòdul

$$|\vec{AC}| = |\vec{AB}| = \sqrt{20}; \text{ per tant, } \left. \begin{array}{l} c_1^2 + c_2^2 = 20 \\ 2c_1 + 4c_2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} C(-4, 2) \\ C'(4, -2) \end{cases}$$

b) $p = d(A, B) + d(B, C) + d(C, A) = \sqrt{20} + \sqrt{40} + \sqrt{20} = 15,26$

$$\begin{aligned} \text{c) Àrea} &= \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{20}}{2} = 10 \end{aligned}$$



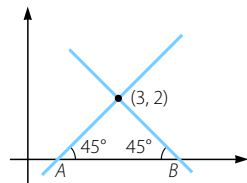
103 Escriu les coordenades dels punts A i B que, amb el punt (3, 2) formen un triangle rectangle isòsceles.

(Activitat de Selectivitat)

Considerem $C = (3, 2)$; els punts $A(a, 0)$ i $B(b, 0)$ fan que $\vec{CA} = (a-3, -2)$ i $\vec{CB} = (b-3, -2)$, i que $\vec{CA} \perp \vec{CB} \rightarrow (a-3)(b-3) + 4 = 0$.

A més, la longitud dels costats és igual, és a dir, $|\vec{CA}| = |\vec{CB}|$

$$\left. \begin{array}{l} (a-3)(b-3) = -4 \\ (a-3)^2 + 4 = (b-3)^2 + 4 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases}$$



Vectors i coordenades en el pla

PREPARA LA SELECTIVAT

(Activitats de Selectivitat)

- 1 Expliqueu raonadament algun mètode per decidir si tres punts del pla donats per les seves coordenades, $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ i $C(c_1, c_2)$, estan alineats o no ho estan. Decidiu, tot aplicant el mètode que hagueu explicat, si els punts $(-2, -3)$, $(-3, 0)$ i $(6, 2)$ estan alineats o no.

Perquè estiguin alineats hem d'agafar dos vectors entre els tres punts i han de ser paral·lels, per exemple $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$ o $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$, i això significa que les seves coordenades han de ser proporcionals:

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC} \rightarrow (b_1 - a_1, b_2 - a_2) \parallel (c_1 - a_1, c_2 - a_2) \rightarrow \frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2} = \frac{c_1 - a_1}{c_2 - a_2}$$

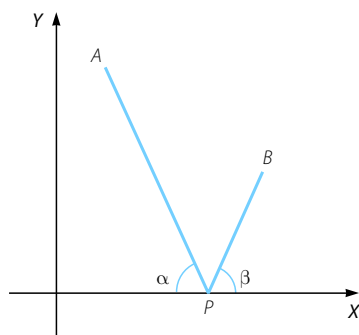
En l'exemple:

$$\frac{b_1 - a_1}{b_2 - a_2} \stackrel{?}{=} \frac{c_1 - a_1}{c_2 - a_2} \rightarrow \frac{-3 - (-2)}{0 - (-3)} \stackrel{?}{=} \frac{6 - (-2)}{2 - (-3)}; \text{ en conseqüència, no estan alineats.}$$

- 2 L'eix OX representa la banda d'una taula de billar. Una bola que està situada al punt $A(1, 6)$ ha de tocar una bola situada al punt $B = (5, 2)$ després d'haver rebotat a la banda (quan una bola de billar rebot a la banda, els angles α i β de la figura són iguals).

Determineu:

- El punt exacte P on la bola hauria de tocar amb la banda.
- Les coordenades del vector $\overrightarrow{AP}$.
- Les coordenades del vector $\overrightarrow{PB}$.
- L'angle entre les trajectòries AP i PB .



- a) Busquem el punt B' simètric a B respecte de l'eix d'abscisses: $B'(5, -2)$. Els punts $A(1, 6)$, $P(x, 0)$ i $B'(5, -2)$ han d'estar alineats, o sigui que

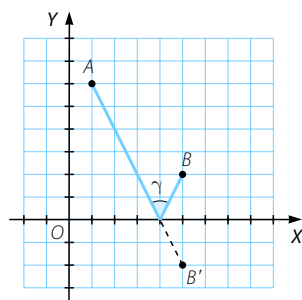
$$\frac{x - 1}{5 - 1} = \frac{0 - 6}{-2 - 6} \rightarrow \frac{x - 1}{4} = \frac{6}{8} \rightarrow x = 4. \text{ El punt és } P(4, 0)$$

- b) El vector $\overrightarrow{AP} = (3, -6)$

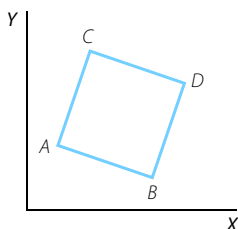
- c) El vector $\overrightarrow{PB} = (1, 2)$

- d) Angle:

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}|} = \frac{(-3) \cdot 1 + 6 \cdot 2}{\sqrt{42} \sqrt{5}} = \\ &= \frac{9}{\sqrt{210}} \rightarrow \gamma = 51^\circ 36' 23'' \end{aligned}$$



- 3 Els punts $A = (1, 2)$ i $D = (5, 4)$ representen els vèrtexs oposats d'un quadrat, tal com s'indica a la figura.



- Calculeu el punt mitjà M de la diagonal AD del quadrat (M serà el centre del quadrat).
- Escriuiu l'equació de la recta que passa per M i és perpendicular a la diagonal AD (aquesta recta serà l'altra diagonal del quadrat).
- Calculeu les coordenades dels altres dos vèrtexs B i C del quadrat.

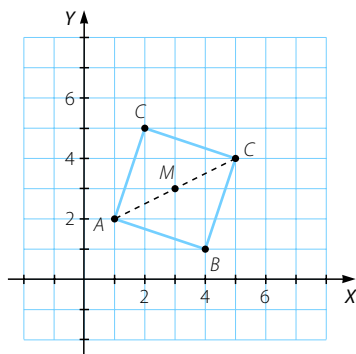
a) Punt $M = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+4}{2} \right) = (3, 3)$

b) Recta: El vector $\overrightarrow{AD} = (4, 2)$; per tant, un vector perpendicular és $\vec{n} = (2, -4)$, el seu pendent és: $m = \frac{-4}{2} = -2$ i la recta serà $y - 3 = -2(x - 3)$.

c) Vèrtexs: El vector $\overrightarrow{AD} = (4, 2)$ i el vector $\overrightarrow{CB}$ són perpendiculars i tenen el mateix mòdul; per tant, el vector $\overrightarrow{CB} = (2, -4)$. Si $C(c_1, c_2) \rightarrow B(c_1 + 2, c_2 - 4)$ i $M(3, 3)$, M és el seu punt mitjà, per tant:

$$\begin{cases} \frac{c_1 + c_1 + 2}{2} = 3 \rightarrow c_1 = 2 \\ \frac{c_2 + c_2 - 4}{2} = 3 \rightarrow c_2 = 5 \end{cases}$$

i les vèrtexs són: $C(2, 5)$ i $B(4, 1)$



- 4 Els punts $A = (2, 5)$, $B = (6, 8)$ i $C = (22, d)$ estan alineats. Calculeu el valor de d .

S'ha de complir que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (6 - 2, 8 - 5) = (4, 3) \text{ i } \overrightarrow{AC} = (22 - 2, d - 5) = (20, d - 5)$$

$$\frac{4}{20} = \frac{3}{d - 5} \rightarrow 4d - 20 = 60 \rightarrow d = 20$$

- 5 Considereu els punts del pla $A(3, 2)$, $B(-1, 8)$ i $C(k, k + 4)$, k real. Calculeu el valor de k perquè A , B i C estiguin alineats.

S'ha de complir que $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (-1 - 3, 8 - 2) = (-4, 6) \text{ i } \overrightarrow{AC} = (k - 3, k + 4 - 2) = (k - 3, k + 2)$$

$$\frac{-4}{k - 3} = \frac{6}{k + 2} \rightarrow -4k - 8 = 6k - 18 \rightarrow k = 1$$

LITERATURA I MATEMÀTIQUES

Viatge al centre de la Terra

Acabat l'esmorzar, tragué el meu oncle de la butxaca un petit quadern destinat a les observacions: examinà, successivament, els diversos instruments i anotà les dades següents

DILLUNS 1 de juliol

Cronòmetre: 8 h. 17 m. del matí.

Baròmetre: 29 p. 71.

Termòmetre: 6°.

Direcció: ESE.

Aquesta última dada es referia a la direcció de la galeria obscura i fou subministrada per la brúixola.

—Ara, Axel —exclamà el professor entusiasmat—, és quan anem a sepul·tar-nos realment en les entranyes del globus. Aquest és, doncs, el moment precís que comença el nostre viatge. [...]

Tota la dificultat del camí consistia en no lliscar-se amb massa rapidesa per aquell pendent de 45° d'inclinació sobre més o menys. [...]

—Ah, fill meu! Per fi et vas convencent! Així que això et sembla esplèndid! Ja veuràs altres coses millors! Anem! Anem! Prosseguim sense vacil·lar la nostra marxa! Millor hagués d'haver dit el nostre llicament, ja que ens deixàvem anar sense fatiga per pendents inclinats. Allò era el *facilis descensus Avernì*, de Virgili. La brúixola, que consultava jo amb freqüència, marcava invariablement l'adreça SE. Aquella senda de lava no es desviava cap a un costat ni altre; posseïa la inflexibilitat de la línia recta. No obstant això, la calor no augmentava d'una manera sensible, el que venia a confirmar les teories de Devy, i, en més d'una ocasió, vaig consultar amb sorpresa el termòmetre. A les dues hores de marxa, només marcava 10°, és a dir, que havia experimentat una pujada de 4°, la qual cosa m'induí a pensar que la nostra marxa era més horitzontal que vertical. Gens més fàcil que conèixer amb tota exactitud la profunditat arribada; el professor amidava amb la major escrupolositat els angles de desviació i inclinació del camí; però es reservava el resultat de les seves observacions. A la nit, a això de les vuit, va donar el senyal d'alt.

JULES VERNE [text adaptat]

Viatge al centre de la Terra

Jules Verne [text adaptat]

El narrador de la novel·la és Axel Lidenbrock, nebot del professor alemany Otto Lidenbrock. La història comença a Hamburg, on viu el professor: amant dels llibres vells, ha descobert un manuscrit original del segle XII escrit en caràcters rúnics on un savi islandès, Arne Saknussem, afirma haver arribat al centre de la Terra.

El professor, home entusiasta i impetuós, s'hi apassiona i decideix seguir els passos d'Arne Saknussem i, juntament amb el seu nebot, molt més escèptic, emprenen una expedició que comença al volcà Sneffels. Allí comença una aventura plena d'innombrables peripècies amb riscos i perills.

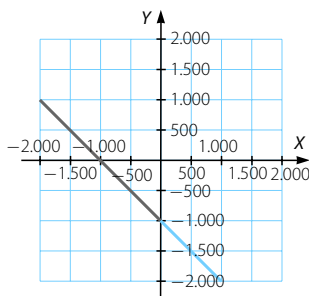
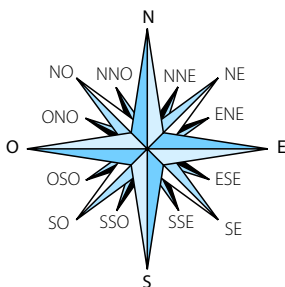
Al paràgraf seleccionat, i després de descansar i d'un bon àpat, Axel i el seu oncle van encetar una discussió sobre quina distància devien haver baixat en sentit vertical en funció de la temperatura; en aquell moment era de 15° , cosa que representava un augment de 9° des que havien sortit, i que, després de diferents suposicions, van portar Axel a deduir que si la temperatura s'elevava 1° per cada 125 peus, aleshores es trobaven a 1.125 peus de profunditat. El professor ho va rebatre, perquè, segons les seves observacions, eren a 10.000 peus sota el nivell del mar.

Els càlculs del professor eren exactes; ja havien passat de 6.000 peus la profunditat màxima a què havia arribat l'ésser humà, profunditats com les mines de Kitzbühel, al Tirol, i les de Württemberg, a Bohèmia. La temperatura, que hauria hagut de ser de 81° en aquell lloc, era tot just de 15° , la qual cosa subministrava motiu per a moltes reflexions.

Si dibuixes la rosa dels vents, quin és l'angle que formen les direccions ESE i SE amb l'eix horitzontal?

Si el començament del recorregut és el punt $A(0, -1.000)$ i segueix la direcció SE, quina és l'equació de la recta que dona el camí que segueixen els nostres amics?

Si cada 125 peus puja 1° la temperatura, quina és la posició després de les dues hores de marxa?



L'angle que formen ESE amb SE és la meitat de 45° , o sigui de $22^\circ 30'$.

L'equació de la recta que ens dona la direcció SE és $x + y = -1.000$.

Després de dues hores la temperatura havia pujat 4° , la qual cosa vol dir que havien baixat $125 \cdot 4 = 500$ peus, o sigui que la seva ordenada era $y = -1.500$; per tant, la seva posició era $P(500, -1.500)$.

La recta en el pla

ABANS DE COMENÇAR... RECORDA

001 Representa aquestes rectes:

a) $y = -2x$

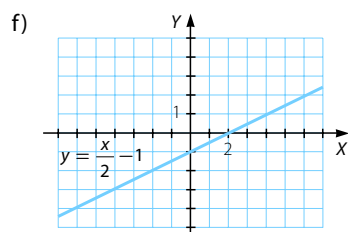
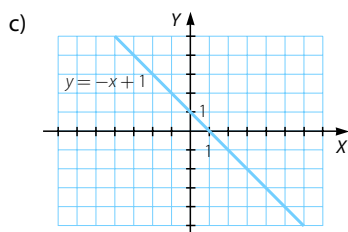
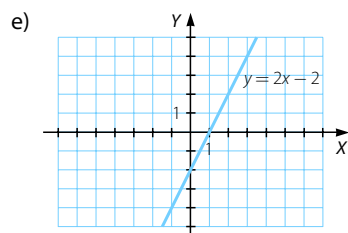
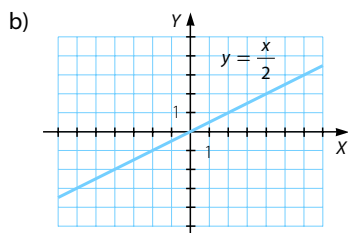
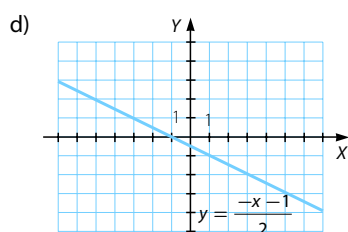
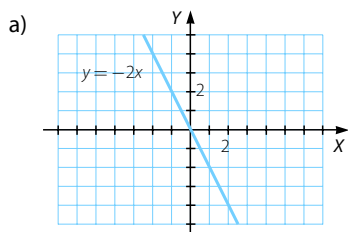
c) $y = -x + 1$

e) $y = 2x - 2$

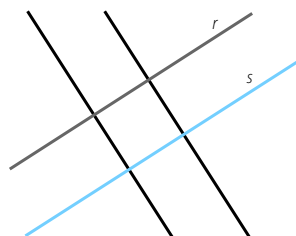
b) $y = \frac{x}{2}$

d) $y = \frac{-x - 1}{2}$

f) $y = \frac{x}{2} - 1$

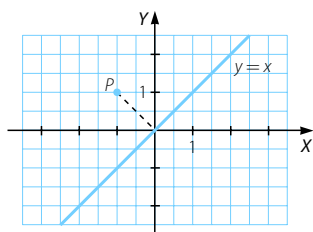


002 Dibuixa dues rectes paral·leles, r i s . Després, traça una perpendicular a la recta r i una altra a la recta s . Com són les rectes que has dibuixat?



Les rectes són paral·leles.

003 Representa en un sistema d'eixos cartesianes el punt $P(-1, 1)$ i la recta $y = x$, i determina la projecció ortogonal del punt sobre la recta.



La projecció ortogonal de P sobre r és l'origen.

ACTIVITATS

- 001 Comprova que les dues determinacions següents donen la mateixa recta:

$$A(1, 2), \vec{d}_1 = (-1, 3) \quad B(3, -4), \vec{d}_2 = (2, -6)$$

Un punt de la primera determinació compleix que existeix un valor real t_1 tal que $(x, y) = (1, 2) + t_1(-1, 3) \rightarrow x = 1 - t_1$ i $y = 2 + 3t_1$. Hem de comprovar que aquest punt compleix l'equació de la segona determinació:

De (1): $t_2 = \frac{-t_1 - 2}{2}$, que substituïm en (2):

$2 + 3t_1 = -4 - 6\left(\frac{-t_1 - 2}{2}\right) = -4 + 3t_1 + 2$, que és una identitat; per tant, les dues rectes són la mateixa.

- 002 Escriu l'equació vectorial i les paramètriques de la recta que passa pels punts $A(7, 3)$ i $B(2, 2)$.

$$\vec{AB} = (-5, -1)$$

$$\text{Equació vectorial: } \vec{OP} = \vec{OA} + t\vec{AB} \rightarrow (x, y) = (7, 3) + t(-5, -1)$$

$$\text{Equacions paramètriques: } \begin{cases} x = 7 - 5t \\ y = 3 - t \end{cases}$$

- 003 Escriu les equacions paramètriques de la recta amb vector director $\vec{v} = (-1, 0)$ i que passa pel punt $A(3, 2)$.

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 \end{cases}$$

- 004 Calcula l'equació vectorial i les paramètriques de les rectes bisectrius dels quadrants.

- Bisectriu del primer quadrant.

$$\text{Equació vectorial: } (x, y) = t(1, 1)$$

$$\text{Equacions paramètriques: } \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$$

- Bisectriu del segon quadrant.

$$\text{Equació vectorial: } (x, y) = t(1, -1)$$

$$\text{Equacions paramètriques: } \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}$$

La recta en el pla

- 005 Dues rectes, r i s , poden tenir el mateix vector director? Quina relació hi haurà entre aquestes rectes?

Dues rectes poden tenir el mateix vector director. Quan dues rectes tenen el mateix vector director, són paral·leles o coincidents.

- 006 Troba l'equació contínua de la recta que passa per $A(2, -1)$ i té la direcció del vector $\vec{d} = (2, -1)$. Esbrina si el punt $P(3, 1)$ és a la recta.

Calculem l'equació contínua de la recta:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-(-1)}{-1}$$

Comprovem si el punt P compleix les equacions de la recta:

$$\frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \qquad \frac{1-(-1)}{-1} = -2$$

Així doncs, el punt P no pertany a la recta.

- 007 Determina l'equació general de la recta que passa per $A(1, -1)$ i $B(0, 2)$. Calcula també un vector perpendicular al vector director.

Calculem el vector director: $\vec{AB} = (-1, 3)$

Obtenim l'equació general:

$$A = 3 \qquad B = 1 \qquad C = -3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = -2$$

$$3x + y - 2 = 0$$

Un vector perpendicular a $\vec{AB}$ és $(-3, -1)$.

- 008 Troba l'equació explícita i la punt-pendent de la recta que passa per $A(3, -3)$ i per l'origen de coordenades.

Calculem l'equació explícita de la recta:

$$\left. \begin{array}{l} y = mx + n \xrightarrow{A(3, -3)} -3 = m \cdot 3 + n \\ y = mx + n \xrightarrow{O(0, 0)} 0 = m \cdot 0 + n \end{array} \right\} \rightarrow y = -x$$

Per determinar l'equació punt-pendent trobem un vector director:

$$\vec{OA} = (3, -3)$$

Calculem el pendent:

$$m = \frac{-3}{3} = -1$$

Agafem el punt $O(0, 0)$: $y - 0 = -1(x - 0)$

- 009 Calcula la recta que passa pel punt $A(2, 7)$ i forma amb l'eix d'abscisses un angle de 60° . Explica com ho fas.

$$\text{Calculem el pendent: } \operatorname{tg} 60^\circ = m \rightarrow m = \sqrt{3}$$

$$\text{Troblem l'equació punt-pendent: } y - 7 = \sqrt{3}(x - 2)$$

- 010 Troba l'equació de la recta que talla els eixos en els punts $A(-4, 0)$ i $B(0, 5)$. Després, calcula'n el pendent.

$$\text{Recta } \frac{x}{-4} + \frac{y}{5} = 1. \text{ El vector director és } \overrightarrow{AB}(4, 5) \text{ i el pendent } m = \frac{5}{4}.$$

- 011 Troba l'equació de les rectes paral·leles als eixos que passen pel punt $B(-3, 5)$.

$$\text{Recta horitzontal } y = 5 \text{ i recta vertical } x = -3.$$

- 012 Troba els valors de B i C perquè les rectes r i s siguin paral·leles.

$$r: 3x + By + 5 = 0 \quad s: x + 2y + C = 0$$

Perquè les rectes siguin paral·leles s'ha de complir que:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

$$\frac{3}{1} = \frac{B}{2} \rightarrow B = 6$$

$$\frac{3}{1} \neq \frac{5}{C} \rightarrow C \neq \frac{5}{3}$$

- 013 Estudia la posició relativa de dues rectes que tenen vectors directors no proporcionals. Quina condició cal que verifiquin perquè les rectes siguin perpendiculars?

Si els vectors directors no són proporcionals, les rectes són secants.

Anomenem $\vec{d} = (d_1, d_2)$ el vector director de la recta r , i $\vec{c} = (c_1, c_2)$ el vector director de la recta s .

Les rectes són perpendiculars si el producte escalar dels vectors és zero.

$$d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2 = 0 \rightarrow d_1 \cdot c_1 = -d_2 \cdot c_2 \rightarrow \vec{c} = (-d_2, d_1)$$

- 014 Troba l'equació de totes les rectes que passen pel punt $P(-1, 1)$.

$$\text{Equació del feix: } y - 1 = m(x + 1).$$

- 015 Troba l'equació del feix de rectes paral·leles a la recta $y = -x + 4$.

$$\text{Equació del feix: } y = -x + k.$$

- 016 Troba l'equació de totes les rectes que passen per l'origen de coordenades. Quin és el pendent dels eixos de coordenades?

Equació de totes les rectes que passen per l'origen:

$$y = mx \text{ i la recta } x = 0$$

Els pendents dels eixos són:

$$\text{Eix d'abscisses: } y = 0 \rightarrow m = 0$$

$$\text{Eix d'ordenades: } x = 0 \rightarrow m = \infty$$

La recta en el pla

017 Troba l'equació del feix de rectes el pendent de les quals sigui $m = 3$.

a) Esbrina quina d'aquestes rectes passa pel punt $P(-3, 1)$.

b) Calcula el punt de tall d'aquesta última recta amb la recta s de pendent -2 i que passa pel punt $Q(2, -1)$.

Equació del feix: $y - b = 3(x - a)$

a) Equació de la recta que passa pel punt P : $y - 1 = 3(x + 1)$

b) Equació de la recta s : $y + 1 = (-2)(x - 2)$

$$\text{Punt de tall: } \begin{cases} y - 1 = 3(x - 1) \\ y + 1 = -2(x - 2) \end{cases} \rightarrow A\left(-\frac{12}{5}, \frac{39}{5}\right)$$

018 Troba la distància entre el punt $P(2, -1)$ i la recta r , que té d'equació:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2}$$

Escrivim l'equació general de la recta:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{2-y}{2} \rightarrow 2x + 3y - 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) - 8|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13} \text{ u}$$

019 Calcula la distància que separa aquesta recta de l'origen de coordenades:

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

Escrivim l'equació general de la recta:

$$\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 2t \end{cases} \rightarrow -x + 3 = \frac{y-2}{2} \rightarrow -2x - y + 8 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 8|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \text{ u}$$

020 Calcula la distància entre aquestes rectes:

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{5} \quad s: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$$

Calculem el vector director de la recta r : $\vec{u}_r = (2, 5)$

Trobem el vector director de la recta s : $\vec{u}_s = (2, 5)$

Agafem un punt de la recta r , $A(0, 1)$, i comprovem si pertany a s :

$$s: \begin{cases} 0 = 2t \\ 1 = 3 + 5t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{2}{5} \end{cases} \rightarrow A \notin s$$

Escrivim l'equació general de la recta s :

$$s: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 + 5t \end{cases} \rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y-3}{5} \rightarrow 5x - 2y + 6 = 0$$

Les rectes són paral·leles. Calculem la distància de A a s :

$$d(A, s) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|5 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{29}} = \frac{4\sqrt{29}}{29} \text{ u}$$

021 Calcula l'angle que formen les rectes següents:

$$r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{3} \quad s: \begin{cases} x = 1-2t \\ y = -3+t \end{cases}$$

$$\cos \alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|3 \cdot (-2) + 3 \cdot 1|}{\sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{3}{3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\rightarrow \alpha = 71^\circ 33' 54,18''$$

022 Escriu l'equació vectorial i les paramètriques de les rectes que compleixen aquestes condicions:

- Passa pels punts $(-3, 1)$ i $(5, 3)$.
- Passa pel punt $P(3, -4)$ i el vector director és $\vec{v} = (-2, 7)$.
- L'equació explícita és $y = -3x + 4$.

- Calculem el vector director: $(8, 2)$

Equació vectorial $\rightarrow (x, y) = (5, 3) + t(8, 2)$

$$\text{Equacions paramètriques} \rightarrow \begin{cases} x = 5 + 8t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$$

- Equació vectorial $\rightarrow (x, y) = (3, -4) + t(-2, 7)$

$$\text{Equacions paramètriques} \rightarrow \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -4 + 7t \end{cases}$$

- Troblem dos punts de la recta: $A(0, 4)$ i $B(1, 1)$

Calculem el vector director: $\vec{AB} = (1, -3)$

Equació vectorial $\rightarrow (x, y) = (1, 1) + t(1, -3)$

$$\text{Equacions paramètriques} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$$

023 Expressa l'equació contínua de la recta:

- Que passa pels punts $(8, 3)$ i $(1, 5)$.
- Que passa pel punt $P(-2, 5)$ i té com a vector director $\vec{v} = (3, -4)$.
- Que té com a equació contínua $-2x + y + 7 = 0$.

- Calculem el vector director: $(-7, 2)$

$$\text{Equació contínua} \rightarrow \frac{x-8}{-7} = \frac{y-3}{2}$$

La recta en el pla

- b) Equació contínua $\rightarrow \frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-4}$
- c) Trobem dos punts de la recta: $A(0, -7)$ i $B(1, -5)$
Calculem el vector director: $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$
Equació contínua $\rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y+7}{2}$

024 Escriu l'equació explícita de la recta:

- a) Que passa pels punts $(-3, 5)$ i $(3, -1)$.
- b) Que passa pel punt $P(-1, 0)$ i té com a vector director $\vec{v} = (-3, -2)$.
- c) Que té com a equació punt-pendent $\frac{x}{-2} = \frac{y-3}{5}$.

$$\left. \begin{array}{l} a) \ y = mx + n \xrightarrow{(-3, 5)} 5 = -3m + n \\ \quad y = mx + n \xrightarrow{(3, -1)} -1 = 3m + n \end{array} \right\}$$

Resolem el sistema i obtenim: $m = -1$ i $n = 2 \rightarrow y = -x + 2$

- b) Calculem el pendent: $m = \frac{2}{3}$
El punt $P(-1, 0)$ ha de complir l'equació de la recta.

$$y = \frac{2}{3}x + n \rightarrow 0 = -\frac{2}{3} + n \rightarrow n = \frac{2}{3}$$

Així doncs, l'equació explícita de la recta és:

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

- c) $\frac{x}{-2} = \frac{y-3}{5} \rightarrow 5x = -2y + 6 \rightarrow y = -\frac{5}{2}x + 3$

025 Comprova si els punts $A(-3, 2)$ i $B(5, -1)$ són a les rectes:

- a) $\left. \begin{array}{l} x = 3 - 2\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{array} \right\}$ b) $y = \frac{5x-3}{3}$ c) $5x - 2y + 19 = 0$ d) $\frac{x+4}{3} = \frac{y+7}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} a) \ -3 = 3 - 2\lambda \\ \quad 2 = 3 + 4\lambda \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = 3 \\ \lambda = -\frac{1}{4} \end{array} \right\} \rightarrow \text{El punt } (-3, 2) \text{ no pertany a la recta.}$$

$$\left. \begin{array}{l} 5 = 3 - 2\lambda \\ -1 = 3 + 4\lambda \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{El punt } (5, -1) \text{ pertany a la recta.}$$

- b) $2 \neq \frac{-15-3}{3} \rightarrow \text{El punt } (-3, 2) \text{ no pertany a la recta.}$

$$-1 \neq \frac{25-3}{3} \rightarrow \text{El punt } (5, -1) \text{ no pertany a la recta.}$$

- c) $-15 - 4 + 19 = 0 \rightarrow$ El punt $(-3, 2)$ pertany a la recta.
 $25 + 2 + 19 \neq 0 \rightarrow$ El punt $(5, -1)$ no pertany a la recta.
- d) $\frac{-3+4}{3} \neq \frac{2+7}{2} \rightarrow$ El punt $(-3, 2)$ no pertany a la recta.
 $\frac{5+4}{3} = \frac{-1+7}{2} \rightarrow$ El punt $(5, -1)$ pertany a la recta.

026 Expressa de forma vectorial, paramètrica i contínua l'equació de la recta que compleix aquestes condicions:

- a) Passa pel punt $(1, 3)$ i és paral·lela a la recta $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-4}$.
 b) És paral·lela a la recta $5x - 2y + 12 = 0$ i passa pel punt $(-2, 5)$.

- a) Vector director de la recta: $(2, -4)$
 Equació vectorial $\rightarrow (x, y) = (1, 3) + t(2, -4)$
 Equacions paramètriques $\rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$

Equació contínua $\rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4}$

- b) Vector director de la recta: $(2, 5)$
 Equació vectorial $\rightarrow (x, y) = (-2, 5) + t(2, 5)$
 Equacions paramètriques $\rightarrow \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 5 + 5t \end{cases}$

Equació contínua $\rightarrow \frac{x+2}{2} = \frac{y-5}{5}$

027 Expressa de forma explícita la recta que compleix que:

- a) Passa pel punt $(0, -1)$ i és paral·lela a la recta $\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -4 \end{cases}$.
 b) És paral·lela a la recta $\frac{x-3}{4} = \frac{y}{-1}$ i passa pel punt $(5, -2)$.

- a) Vector director de la recta: $(3, 0)$
 Pendent: $m = 0$
 $-1 = 0x + n \rightarrow n = -1$
 Equació explícita $\rightarrow y = -1$

- b) Vector director de la recta: $(4, -1)$

Pendent: $m = -\frac{1}{4}$

$-2 = -\frac{5}{4} + n \rightarrow n = -\frac{3}{4}$

Equació explícita $\rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$

La recta en el pla

028 Escriu l'equació general de la recta que:

a) Passa pel punt $(10, -2)$ i és paral·lela a la recta $\begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{cases}$.

b) És paral·lela a la recta $y = \frac{8x - 3}{2}$ i passa pel punt $(4, 0)$.

a) Expressem la recta de forma contínua: $\frac{x - 10}{-3} = \frac{y + 2}{-2}$

I l'expressem de forma general: $-2x + 20 = -3y - 6 \rightarrow -2x + 3y + 26 = 0$

b) Vector director de la recta: $(1, 4)$

Expressem la recta de forma contínua: $\frac{x - 4}{1} = \frac{y}{4}$

I l'expressem de forma general: $4x - 16 = y \rightarrow 4x - y - 16 = 0$

029 Escriu l'equació vectorial i les paramètriques de la recta que verifica que:

a) Passa pel punt $(0, -3)$ i és perpendicular a la recta $\frac{x + 2}{-3} = \frac{y + 1}{4}$.

b) Passa pel punt $(-5, 0)$ i és perpendicular a la recta $-3x - 2y + 7 = 0$.

a) Un vector perpendicular a $(-3, 4)$ és $(4, 3)$.

Equació vectorial $\rightarrow (x, y) = (0, -3) + t(4, 3)$

Equacions paramètriques $\rightarrow \begin{cases} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$

b) Calculem el vector director de la recta:

$A(1, 2), B(-1, 5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (-2, 3)$

Un vector perpendicular a $(-2, 3)$ és $(-3, -2)$

Equació vectorial $\rightarrow (x, y) = (-5, 0) + t(-3, -2)$

Equacions paramètriques $\rightarrow \begin{cases} x = -5 - 3t \\ y = -2t \end{cases}$

030 Determina l'equació contínua de la recta que compleix aquestes condicions:

a) Passa pel punt $(7, -1)$ i és perpendicular a la recta $y = \frac{-x + 6}{3}$.

b) Passa pel punt $(-4, 4)$ i és perpendicular a la recta $-2x + y + 7 = 0$.

a) Calculem el vector director de la recta:

$\overrightarrow{AB} = (3, -1)$

Un vector perpendicular a $(3, -1)$ és $(1, 3)$.

Expressem la recta de forma contínua:

$\frac{x - 7}{1} = \frac{y + 1}{3}$

b) Calculem el vector director de la recta:

$A(0, -7), B(1, -5) \rightarrow \overrightarrow{AB} = (1, 2)$

Un vector perpendicular a $(1, 2)$ és $(-2, 1)$.

Expressem la recta de forma contínua:

$\frac{x + 4}{-2} = \frac{y - 4}{1}$

031 Troba l'equació explícita de la recta que:

a) Passa pel punt $(2, -5)$ i és perpendicular a la recta $\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-3}$.

b) Passa pel punt $(-4, 8)$ i és perpendicular a la recta $-2x + 3y - 16 = 0$.

a) Calculem el vector director de la recta: $\vec{u}_r = (3, 2)$

El pendent de la recta és $m = \frac{2}{3}$.

Com que passa pel punt $(2, -5)$:

$$-5 = \frac{2}{3} \cdot 2 + n \rightarrow n = -\frac{19}{3}$$

L'equació de la recta és $y = \frac{2}{3}x - \frac{19}{3}$.

b) Calculem el vector director de la recta: $\vec{u}_r = (-2, 3)$

El pendent de la recta és $m = -\frac{3}{2}$.

Com que passa pel punt $(-4, 8)$:

$$8 = -\frac{3}{2} \cdot (-4) + n \rightarrow n = 2$$

L'equació de la recta és $y = -\frac{3}{2}x + 2$.

032 Determina l'equació d'una recta que passa pels punts $(-1, -10)$ i $(2, c)$, si saps que el pendent és 7. Expressa la recta de forma contínua i general.

Troblem el vector director: $(3, c + 10)$

Troblem el vector director: $(3, c + 10)$

Com que sabem que el pendent és: $7 = \frac{c+10}{3} \rightarrow 21 = c+10 \rightarrow c = 11$

$\vec{u}_r = (3, 21)$

Expressem la recta de forma contínua:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+10}{21}$$

I l'expressem de forma general:

$$21x + 21 = 3y + 30 \rightarrow 21x - 3y - 9 = 0$$

033 Determina el punt de la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1}$, que dista 2 unitats del punt $P(-2, 2)$.
(Activitat de Selectivitat)

Expressem la recta de forma paramètrica:

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= -1 - t \end{aligned} \right\}$$

Els punts de la recta són de la forma:

$$A_r(1 + 2t, -1 - t)$$

Calculem els vectors que van de la recta al punt P :

$$\vec{A_rP} = (-3 - 2t, 3 + t)$$

La recta en el pla

Vegem quins d'aquests vectors tenen mòdul 2.

$$2 = \sqrt{(-3-2t)^2 + (3+t)^2} \rightarrow 4 = 9 + 12t + 4t^2 + 9 + 6t + t^2$$

$$\rightarrow 5t^2 + 18t + 14 = 0 \rightarrow \left. \begin{array}{l} t_1 = \frac{-9 - \sqrt{11}}{5} \\ t_2 = \frac{-9 + \sqrt{11}}{5} \end{array} \right\}$$

Així doncs, els punts són:

$$A_1 \left(1 + \frac{-18 - 2\sqrt{11}}{5}, -1 + \frac{9 + \sqrt{11}}{5} \right) \quad A_2 \left(1 + \frac{-18 + 2\sqrt{11}}{5}, -1 + \frac{9 - \sqrt{11}}{5} \right)$$

034

Considera r la recta d'equació $6x - 15y + 4 = 0$. Troba les equacions de les rectes paral·lela i perpendicular a r que passen pel punt $(4, 1)$ i fes-ne un esquema gràfic.

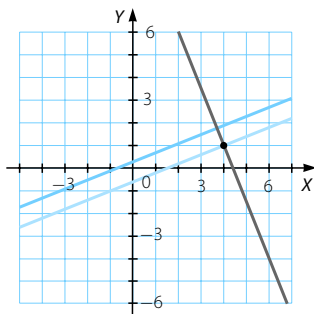
(Activitat de Selectivitat)

– Recta paral·lela:

$$6x - 15y + k = 0 \xrightarrow{(4, 1) \in r} 6 \cdot 4 - 15 \cdot 1 + k = 0 \rightarrow k = -9 \rightarrow 6x - 15y - 9 = 0$$

– Recta perpendicular: $\vec{d}_r = (15, 6) \rightarrow \vec{n} = (6, -15) \rightarrow \frac{x-4}{6} = \frac{y-1}{-15}$

– Gràfica:



035

Explica quina condició han de verificar A i B si les rectes d'equacions $Ax + By + C = 0$

$$\text{i } \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1};$$

a) Són paral·leles.

b) Són perpendiculars.

(Activitat de Selectivitat)

a) Paral·leles: Els vectors directores són proporcionals: $\frac{-B}{2} = \frac{A}{3} \rightarrow A = \frac{-3B}{2}$

b) Perpendiculars: El producte escalar dels vectors directores ha de ser nul:

$$(-B, A) \cdot (2, 3) = 0 \rightarrow -2B + 3A = 0 \rightarrow A = \frac{2B}{3}$$

036 Estudia la posició relativa que tenen aquestes rectes:

$$\text{a) } r: \begin{cases} x = 1 - 4\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = 7 - 2\mu \end{cases}$$

$$\text{b) } r: \begin{cases} x = 1 - 6\lambda \\ y = -3 + 2\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2 + 3\mu \\ y = -\mu \end{cases}$$

$$\text{a) } \vec{u}_r = (-4, -2)$$

$$\vec{u}_s = (3, -2)$$

Com que els vectors no són proporcionals, les rectes són secants.

$$\text{b) } \vec{u}_r = (-6, 2)$$

$$\vec{u}_s = (3, -1)$$

Com que els vectors són proporcionals, les rectes són paral·leles o coincidents.

Vegem si el punt $A_r(1, -3)$, de la recta r , pertany a la recta s .

$$\begin{cases} 1 = 2 + 3\mu \\ -3 = -\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mu = -\frac{1}{3} \\ \mu = 3 \end{cases}$$

Les rectes són paral·leles.

037 Determina quina posició relativa tenen aquestes rectes:

$$\text{a) } r: \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-2} \quad s: \frac{x+1}{-3} = \frac{y+3}{1}$$

$$\text{b) } r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} \quad s: \frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{-3}$$

$$\text{a) } \vec{u}_r = (6, -2)$$

$$\vec{u}_s = (-3, 1)$$

Com que els vectors són proporcionals, les rectes són paral·leles o coincidents.

Vegem si el punt $A_r(2, -1)$, de la recta r , pertany a la recta s .

$$\frac{2+1}{-3} \neq \frac{-1+3}{1}$$

Les rectes són paral·leles.

$$\text{b) } \vec{u}_r = (2, -3)$$

$$\vec{u}_s = (2, -3)$$

Com que els vectors són iguals, les rectes són paral·leles o coincidents.

Comprovem si el punt $A_r(-1, 2)$, de la recta r , pertany a la recta s .

$$\frac{-1+1}{2} \neq \frac{-2+3}{-3}$$

Les rectes són paral·leles.

La recta en el pla

038 Investiga quina posició relativa tenen els parells de rectes següents:

- a) $r: 3x - 5y + 9 = 0$ $s: x + 4y - 3 = 0$
 b) $r: 6x - 4y + 11 = 0$ $s: -9x + 6y - 1 = 0$
 c) $r: 4x - y + 1 = 0$ $s: 2x - 3y + 13 = 0$

a) $\frac{3}{1} \neq \frac{-5}{4} \rightarrow$ Les rectes són secants.

b) $\frac{-9}{6} = \frac{6}{-4} \neq \frac{-1}{11} \rightarrow$ Les rectes són paral·leles.

c) $\frac{4}{2} \neq \frac{-1}{-3} \rightarrow$ Les rectes són secants.

039 Calcula la posició relativa d'aquestes rectes:

- a) $r: y = \frac{6x - 1}{4}$ $s: y = \frac{-3x + 5}{-2}$
 b) $r: y = \frac{6x + 18}{9}$ $s: y = \frac{4x + 12}{6}$

a) El pendent de la recta r és: $m_r = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

El pendent de la recta s és: $m_s = \frac{3}{2}$

Com que els pendents són iguals, les rectes són paral·leles o coincidents.

Comprovem si el punt $A_s(1, -1)$, de la recta s , pertany a la recta r .

$-1 \neq \frac{6 \cdot 1}{4} \rightarrow$ Les rectes són paral·leles.

b) El pendent de la recta r és: $m_r = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

El pendent de la recta s és: $m_s = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Com que els pendents són iguals, les rectes són paral·leles o coincidents.

Comprovem si el punt $A_s(0, 2)$, de la recta s , pertany a la recta r .

$2 = \frac{6 \cdot 0 + 18}{9} \rightarrow$ Les rectes són coincidents.

040 En quina posició relativa estan aquests parells de rectes?

- a) $r: \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}$ $s: x + 2y - 7 = 0$

- b) $r: y = \frac{5x + 1}{-2}$ $s: \frac{x + 3}{2} = \frac{y - 7}{-5}$

a) Expressem la recta r de forma general:

$\frac{x + 1}{4} = \frac{y - 3}{-2} \rightarrow -2x - 2 = 4y - 12 \rightarrow -2x - 4y + 10 = 0$

Les rectes són paral·leles.

b) Expressem les rectes de forma general:

$$\begin{array}{ll} r: -2y = 5x + 1 & s: -5x - 15 = 2y - 14 \\ 5x + 2y + 1 = 0 & 5x + 2y + 1 = 0 \end{array}$$

Les rectes són coincidents.

041 Quina posició relativa mantenen els parells de rectes següents?

a) r passa per $(-3, 4)$ i per $(8, -1)$.

$$s: x - 2y + 15 = 0$$

b) r passa per $(-1, 4)$ i per $(2, -5)$.

$$s: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-7}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} a) \ y = mx + n \xrightarrow{(-3, 4)} 4 = -3m + n \\ \quad y = mx + n \xrightarrow{(8, -1)} -1 = 8m + n \end{array} \right\}$$

$$y = -\frac{5}{11}x + \frac{29}{11} \rightarrow 5x + 11y - 29 = 0 \rightarrow \text{Les rectes són secants.}$$

b) $\vec{u}_r = (3, -9)$

$$\vec{u}_s = (-1, 3)$$

Com que els vectors són proporcionals, les rectes són paral·leles o coincidents.

Comproven si el punt $A(-1, 4)$, de la recta r , pertany a la recta s .

$$\frac{-1+2}{-1} = \frac{4-7}{3} \rightarrow \text{Les rectes són coincidents.}$$

042 En quina posició relativa estan aquests parells de rectes?

a) r és perpendicular a $3x - 4y + 11 = 0$.

$$s: \left. \begin{array}{l} x = -6\lambda \\ y = -3 + 8\lambda \end{array} \right\}$$

b) r és una recta perpendicular a $y = \frac{2x+3}{-5}$.

$$s: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{5}$$

a) Calculem el vector director de la recta:

$$m = \frac{3}{4} \rightarrow (4, 3)$$

Aquest vector és perpendicular al vector director de la recta s .

$$\vec{u}_r = (4, 3)$$

$$\vec{u}_s = (-6, 8)$$

Les rectes r i s són perpendiculars.

b) Calculem el vector director de la recta:

$$m = \frac{-2}{5} \rightarrow (5, -2)$$

Així doncs, un vector que hi sigui perpendicular és vector director de la recta r .

$$\vec{u}_r = (5, -2)$$

$$\vec{u}_s = (2, 5)$$

Les rectes r i s són perpendiculars.

La recta en el pla

- 043 Determina l'equació de la recta r , que és perpendicular a $s: 3x - 2y + 1 = 0$ i que talla aquesta recta a $P(0, 2)$.

Troblem el vector director de la recta:

$$m = \frac{3}{2} \rightarrow (2, 3)$$

Així doncs, un vector que hi sigui perpendicular és vector director de la recta r .

$$\vec{u}_r = (-3, 2)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -3t \\ y = 2 + 2t \end{array} \right\}$$

- 044 Calcula els punts de tall, si és possible, dels parells de rectes següents:

$$\text{a) } r: 2x - y + 8 = 0 \quad s: \left. \begin{array}{l} x = 2 + 3\lambda \\ y = 7 + \lambda \end{array} \right\}$$

$$\text{b) } r: y = \frac{-2x + 7}{3} \quad s: \frac{x - 2}{3} = \frac{y - 1}{-2}$$

$$\text{c) } r: \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 3}{-6} \quad s: 3x + y + 2 = 0$$

$$\text{d) } r: \left. \begin{array}{l} x = -1 - 3\lambda \\ y = 5 + 8\lambda \end{array} \right\} \quad s: \frac{x - 3}{1} = \frac{y + 7}{-4}$$

$$\text{e) } r: y = \frac{6x + 3}{2} \quad s: \left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = \frac{3}{2} + 3\lambda \end{array} \right\}$$

$$\text{a) } 2(2 + 3\lambda) - (7 + \lambda) + 8 = 0 \rightarrow 4 + 6\lambda - 7 - \lambda + 8 = 0 \rightarrow \lambda = -1$$

El punt de tall és $P(-1, 6)$.

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} 3y = -2x + 7 \\ -2x + 4 = 3y - 3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ -2x - 3y = -7 \end{array} \right\}$$

Hi ha infinits punts de tall, i les rectes són coincidents.

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} -6x + 6 = 2y + 6 \\ 3x + y + 2 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -6x - 2y = 0 \\ 3x + y = -2 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x + y = 0 \\ 3x + y = -2 \end{array} \right\}$$

No hi ha punts de tall, i les rectes són paral·leles.

$$\text{d) } \frac{-1 - 3\lambda - 3}{1} = \frac{5 + 8\lambda + 7}{-4} \rightarrow 12\lambda + 16 = 8\lambda + 12 \rightarrow \lambda = -1$$

El punt de tall és $P(2, -3)$.

$$\text{e) } \frac{3}{2} + 3\lambda = \frac{6 + 6\lambda + 3}{2} \rightarrow 3 + 6\lambda = 6\lambda + 9$$

No té solució, les rectes són paral·leles.

- 045 Troba el valor que ha de prendre k perquè la recta $\frac{x+1}{k} = \frac{y-2}{3}$ sigui paral·lela a $\left. \begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = 2 + 5\lambda \end{array} \right\}$.

Perquè les rectes siguin paral·leles, els vectors directors han de ser proporcionals.

$$\frac{k}{-1} = \frac{3}{5} \rightarrow k = -\frac{3}{5}$$

- 046 Troba el valor de a perquè la recta $ax + 3y - 7 = 0$ sigui paral·lela a $\frac{x-1}{5} = y + 2$.

Perquè les rectes siguin paral·leles, els vectors directors han de ser proporcionals.

$$\frac{-3}{5} = \frac{a}{1} \rightarrow a = -\frac{3}{5}$$

- 047 Per a quins valors de m aquestes rectes són perpendiculars?

$$r: y = mx + 6$$

$$s: 8x - 5y + 1 = 0$$

$$\vec{u}_r = (5, 8)$$

Qualsevol vector perpendicular és proporcional a $(-8, 5)$.

Així doncs, el pendent és:

$$m = -\frac{5}{8}.$$

- 048 Prova que totes les rectes amb equació del tipus $y = ax + a$ passen pel mateix punt. Troba el punt i la recta d'aquest tipus que és

paral·lela a: $\left. \begin{array}{l} x = 21 - 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{array} \right\}$.

Troblem el punt de tall:

$$\left. \begin{array}{l} y = ax + a \\ y = bx + b \end{array} \right\} \rightarrow ax + a = bx + b \rightarrow (a - b)x = -(a - b) \rightarrow x = -1 \rightarrow y = 0$$

Totes les rectes passen per $(-1, 0)$.

Com que la recta és paral·lela a la recta donada, el seu vector director és $(-3, 2)$.

$$m = -\frac{2}{3}$$

La recta és:

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}.$$

La recta en el pla

049 Calcula la perpendicular traçada des del punt P a la recta r .

a) $r: 2x - 5y + 9 = 0$ $P(4, -14)$

b) $r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \end{cases}$ $P(4, -5)$

c) $r: y = \frac{3x - 2}{5}$ $P(2, -4)$

a) $\vec{u}_r = (5, 2)$

Un vector perpendicular a $\vec{u}_r$ és $(-2, 5)$.

Calculem la perpendicular:

$$\begin{cases} x = 4 - 2\lambda \\ y = -14 + 5\lambda \end{cases}$$

b) $\vec{u}_r = (-2, 3)$

Un vector perpendicular a $\vec{u}_r$ és $(3, 2)$.

Calculem la perpendicular:

$$\begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = -5 + 2\lambda \end{cases}$$

c) $\vec{u}_r = (5, 3)$

Un vector perpendicular a $\vec{u}_r$ és $(-3, 5)$.

Calculem la perpendicular:

$$\begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -4 + 5\lambda \end{cases}$$

050 Determina la recta paral·lela a r que passa pel punt simètric de P respecte de la recta r :

a) $r: 2x - 3y + 10 = 0$ $P(4, -7)$

b) $r: \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 2 - \lambda \end{cases}$ $P(4, 4)$

c) $r: y = \frac{3x - 1}{4}$ $P(5, -9)$

a) Calculem la recta s , perpendicular a r , i que passa per P :

$$s: \frac{x - 4}{-2} = \frac{y + 7}{3}$$

Troblem el punt de tall de les rectes:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 10 = 0 \\ 3x - 12 = -2y - 14 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -10 \\ 3x + 2y = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$(-2, 2)$ és el punt mitjà de P i el seu simètric, P' , respecte de r .

Calculem $P'(x, y)$:

$$(-2, 2) = \left(\frac{4 + x}{2}, \frac{-7 + y}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = 11 \end{cases}$$

La recta és: $\begin{cases} x = -8 + 3\lambda \\ y = 11 + 2\lambda \end{cases}$

- b) Calculem la recta s , perpendicular a r , i que passa per P :

$$s: \frac{x-4}{1} = \frac{y-4}{-2}$$

Troblem el punt de tall de les rectes:

$$\frac{-2\lambda-4}{1} = \frac{2-\lambda-4}{-2} \rightarrow \lambda = 2$$

$(-4, 0)$ és el punt mitjà de P i el seu simètric, P' , respecte de r .

Calculem $P'(x, y)$:

$$(-4, 0) = \left(\frac{4+x}{2}, \frac{4+y}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$\text{La recta és: } \begin{cases} x = -12 - 2\lambda \\ y = -4 - \lambda \end{cases}$$

- c) Calculem la recta s , perpendicular a r , i que passa per P :

$$s: \frac{x-5}{-3} = \frac{y+9}{4}$$

Troblem el punt de tall de les rectes:

$$\begin{cases} 4y = 3x - 1 \\ 4x - 20 = -3y - 27 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -3x + 4y = -1 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$(-1, -1)$ és el punt mitjà de P i el seu simètric, P' , respecte de r .

Calculem $P'(x, y)$:

$$(-1, -1) = \left(\frac{5+x}{2}, \frac{-9+y}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 7 \end{cases}$$

$$\text{La recta és: } \begin{cases} x = -7 + 4\lambda \\ y = 7 + 3\lambda \end{cases}$$

051 Troba l'equació de la recta simètrica de r respecte de la recta s .

$$\text{a) } r: y = \frac{x-4}{2} \quad s: -x+2y+4=0 \quad \text{b) } r: \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=3+2\lambda \end{cases} \quad s: 2x+y-7=0$$

a) $\vec{u}_r = (2, 1), \vec{u}_s = (2, 1)$

Les rectes són paral·leles o coincidents.

Triem un punt, P , de r i calculem la distància fins a s :

$$P(4, 0) \quad d(P, s) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-4 + 2 \cdot 0 + 4|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = 0$$

Les rectes són coincidents i, per tant, la recta simètrica és la mateixa.

b) $\vec{u}_r = (-1, 2), \vec{u}_s = (1, -2)$

Com que els vectors són proporcionals, les rectes són paral·leles o coincidents.

Triem un punt, P , de r i calculem la distància fins a s :

$$P(2, 3) \quad d(P, s) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 0$$

Les rectes són coincidents i, per tant, la recta simètrica és la mateixa.

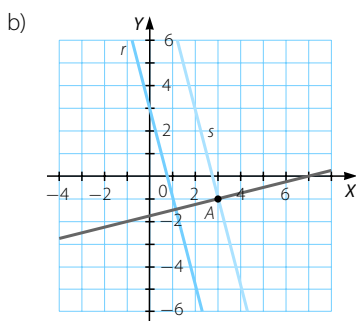
La recta en el pla

052 Considera la recta d'equació $4x + y - 3 = 0$.

- a) Calcula l'equació de la recta paral·lela i de la recta perpendicular a l'anterior que passen pel punt $A = (3, -1)$.
- b) Dibuixa la gràfica de la recta $4x + y - 3 = 0$ i de les que has trobat a l'apartat a).

(Activitat de Selectivitat)

- a) Una recta paral·lela serà $s: 4x + y + k = 0$. Si ha de passar pel punt A : $4 \cdot 3 + (-1) + k = 0 \rightarrow k = -11$ i la recta paral·lela és: $s: 4x + y - 11 = 0$. Una recta perpendicular serà de la forma $t: x - 4y + k = 0$. Si ha de passar pel punt A : $3 - 4(-1) + k = 0 \rightarrow k = -7$, i la recta perpendicular és: $t: x - 4y - 7 = 0$.



053 Considerem r i s les dues rectes del pla d'equacions

$$r: 2x - y - 3 = 0$$

$$s: \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{2}$$

Calcula l'equació de la recta que passa pel punt d'intersecció de r i s i que és paral·lela a la recta d'equació $3x + 5y - 1 = 0$.

(Activitat de Selectivitat)

Calculem el punt d'intersecció:

$$r \cap s \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y - 3 = 0 \\ \frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{2} \end{array} \right\} \rightarrow P(1, -1)$$

A més, ha de ser paral·lela a $3x + 5y - 1 = 0 \rightarrow \vec{d} = (-5, 3)$

Recta:

$$\frac{x-1}{-5} = \frac{y+1}{3}$$

- 054 Considera la recta d'equació $y = -2x + 2$. Troba les coordenades del punt d'intersecció d'aquesta recta amb la recta perpendicular a ella que passa pel punt (6, 3).

(Activitat de Selectivitat)

Recta perpendicular que passi pel punt (6, 3):

$$m' = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x - 6)$$

- 055 Determina l'angle que formen aquestes rectes:

a) $r: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = -1 - 2\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2\mu \\ y = 5 + 3\mu \end{cases}$

b) $r: y = 3x + 2 \quad s: y = \frac{4x + 1}{-2}$

c) $r: \frac{x}{2} = \frac{y - 4}{6} \quad s: \frac{2x + 3}{-1} = \frac{y}{2}$

d) $r: 20x - 4y + 1 = 0 \quad s: -15x + 3y + 7 = 0$

a) $\vec{u}_r = (3, 2), \vec{u}_s = (2, 3)$

$$\cos \alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + 2 \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{12}{13}$$

$$\alpha = 22^\circ 37' 11,51''$$

b) $\vec{u}_r = (1, 3), \vec{u}_s = (-4, 8)$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|1 \cdot (-4) + 3 \cdot 8|}{\sqrt{1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 8^2}} = \\ &= \frac{20}{\sqrt{800}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

c) $\vec{u}_r = (2, 6), \vec{u}_s = (-1, 2)$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|2 \cdot (-1) + 6 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + 6^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \\ &= \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

d) $\vec{u}_r = (4, 20), \vec{u}_s = (3, 15)$

$$\cos \alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|4 \cdot 3 + 20 \cdot 15|}{\sqrt{4^2 + 20^2} \cdot \sqrt{3^2 + 15^2}} = \frac{312}{312} = 1$$

$$\alpha = 0^\circ$$

La recta en el pla

056 Quin angle formen les rectes següents?

a) $r: y = \frac{-6x - 4}{3}$ $s: -4x + 2y - 1 = 0$

b) $r: x + 1 = \frac{y - 5}{2}$ $s: y = \frac{9x - 8}{3}$

c) $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$ $s: 2x + 2y - 1 = 0$

d) $r: y = \frac{6x + 1}{-3}$ $s: \frac{x}{2} = \frac{y + 1}{3}$

e) $r: 3x - y - 3 = 0$ $s: \frac{x + 2}{2} = \frac{y}{-4}$

f) $r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 \end{cases}$ $s: \frac{x - 4}{3} = \frac{y + 6}{6}$

a) $\vec{u}_r = (3, -6), \vec{u}_s = (2, 4)$

$$\cos \alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|3 \cdot 2 + (-6) \cdot 4|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = 53^\circ 7' 48,37''$$

b) $\vec{u}_r = (1, 2), \vec{u}_s = (3, 9)$

$$\cos \alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot 9|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 9^2}} = \frac{21}{\sqrt{450}}$$

$$= \frac{21}{15\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$\alpha = 8^\circ 7' 48,37''$$

c) $\vec{u}_r = (1, 1), \vec{u}_s = (2, -2)$

$$\cos \alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 0$$

$$\alpha = 90^\circ$$

d) $\vec{u}_r = (-3, 6), \vec{u}_s = (2, 3)$

$$\cos \alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|-3 \cdot 2 + 6 \cdot 3|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{6^2 + 3^2}} = \frac{12}{\sqrt{585}} = \frac{4\sqrt{65}}{65}$$

$$\alpha = 60^\circ 15' 18,43''$$

e) $\vec{u}_r = (1, 3), \vec{u}_s = (2, -4)$

$$\cos \alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|1 \cdot 2 + 3 \cdot (-4)|}{\sqrt{1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

f) $\vec{u}_r = (-1, 0), \vec{u}_s = (3, 6)$

$$\cos \alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|(-1) \cdot 3 + 0 \cdot 6|}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + 6^2}} = \frac{3}{\sqrt{45}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\alpha = 63^\circ 26' 5,82''$$

057 Troba l'angle que formen la recta que passa pels punts $P(-1, 4)$ i $Q(3, 8)$

i la recta $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{8}$.

$$\vec{PQ} = (4, 4), \vec{u}_r = (2, 8)$$

$$\cos \alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|4 \cdot 2 + 4 \cdot 8|}{\sqrt{4^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 8^2}} = \frac{40}{\sqrt{2 \cdot 176}}$$

$$\alpha = 30^\circ 57' 49,52''$$

058 Determina la mida dels angles que formen aquests parells de rectes:

a) $r: y = \frac{4x-3}{2}$ i s és la recta que passa per $(-1, 6)$ i és paral·lela a $4x + 2y + 7 = 0$.

b) $r: x + 3 = \frac{y}{2}$ i s és la recta que passa per $(3, 8)$ i és paral·lela a $\frac{x-1}{2} = \frac{y+9}{4}$.

c) $r: 8x - 2y - 3 = 0$ i s és perpendicular a la recta $\left. \begin{matrix} x = 6 - \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{matrix} \right\}$ i passa per $(3, -2)$.

a) $\vec{u}_r = (2, 4), \vec{u}_s = (2, -4)$

$$\cos \alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|2 \cdot 2 + 4 \cdot (-4)|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = 53^\circ 7' 48''$$

b) $\vec{u}_r = (1, 2), \vec{u}_s = (2, 4)$

$$\cos \alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\alpha = 0^\circ \rightarrow \text{Les rectes són paral·leles.}$$

c) $\vec{u}_r = (2, 8)$

El vector $\vec{u}_s$ ha de ser perpendicular a $(-1, 3)$; així doncs, pot ser $\vec{u}_s = (3, 1)$.

$$\cos \alpha = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} = \frac{|2 \cdot 3 + 8 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 8^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{14}{\sqrt{680}} = \frac{7\sqrt{170}}{170}$$

$$\alpha = 57^\circ 31' 43,71''$$

059 Troba el valor de m perquè $y = mx - 1$ formi un angle de 45°

amb $\frac{x+2}{-3} = \frac{y-3}{6}$.

$$\vec{u}_r = (-3, 6), \vec{u}_s = (1, m)$$

$$\begin{aligned} \cos 45^\circ &= \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-3 \cdot 1 + 6 \cdot m|}{\sqrt{(-3)^2 + 6^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}} \\ &\rightarrow m = 3, m = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

La recta en el pla

- 060 Determina el valor que ha de tenir b perquè la recta $3x + by + 6 = 0$ formi un angle de 60° amb la recta $y = \frac{x+4}{-3}$.

$$\vec{u}_r = (-3, 1), \vec{u}_s = (b, -3)$$

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ &= \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|-30 \cdot b + 1 \cdot (-3)|}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{b^2 + (-3)^2}} \\ &\rightarrow m = \frac{-18 - 15\sqrt{3}}{13}, m = \frac{-18 + 15\sqrt{3}}{13} \end{aligned}$$

- 061 Troba la distància del punt $P(4, -2)$ a les rectes:

a) $-6x + 8y - 5 = 0$ b) $\left. \begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{array} \right\}$ c) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{6}$ d) $y = \frac{4x-5}{3}$

a) $d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-6 \cdot 4 + 8 \cdot (-2) - 5|}{\sqrt{(-6)^2 + 8^2}} = \frac{45}{10} = \frac{9}{2} \text{ u}$

- b) Calculem l'equació general de la recta:

$$-x + 2 = \frac{y-2}{2} \rightarrow 2x + y - 6 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 4 + 1 \cdot (-2) - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 0 \text{ u}$$

- c) Trobem l'equació general de la recta:

$$6x - 6 = 3y - 6 \rightarrow 6x - 3y = 0 \rightarrow 2x - y = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 4 - 1 \cdot (-2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} \text{ u}$$

- d) Determinem l'equació general de la recta:

$$3y = 4x - 5 \rightarrow -4x + 3y + 5 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-4 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = \frac{17}{5} \text{ u}$$

- 062 Calcula la distància de l'origen de coordenades a la recta que passa per $(-3, 6)$ i és paral·lela a $\frac{x-1}{-6} = \frac{y-2}{8}$.

$$\text{Determinem la recta que es demana: } \frac{x+3}{-6} = \frac{y-6}{8}$$

- Calculem l'equació general de la recta:

$$8x + 24 = -6y + 36 \rightarrow 8x + 6y - 12 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|8 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 12|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \text{ u}$$

063 Quina distància hi ha entre aquests parells de rectes?

a) $r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases} \quad s: -x + 2y + 5 = 0$

b) $r: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{6} \quad s: y = \frac{8x-3}{4}$

c) $r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \end{cases} \quad s: y = \frac{-x-}{3}$

a) $\vec{u}_r = (2, 1), \vec{u}_s = (-2, -1).$

Els vectors són proporcionals. Un punt de r és $P(-1, 3).$

$$d(r, s) = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

b) $\vec{u}_r = (2, 6), \vec{u}_s = (4, 8).$

Els vectors no són proporcionals; així doncs, les rectes són secants.

c) $\vec{u}_r = (3, -1), \vec{u}_s = (3, -1).$

Com que els vectors són iguals, les rectes són paral·leles o coincidents.

Agafem un punt de la recta $r, A(2, -1),$ i comprovem si pertany

$$a: -1 = \frac{-2-1}{3}.$$

Les rectes són coincidents.

064 Calcula el valor de a perquè la distància del punt a la recta sigui de 4 unitats:

$$r: 12x + 5y - 19 = 0 \quad P(3, a)$$

$$4 = \frac{|12 \cdot 3 + 5a - 19|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} \rightarrow 52 = |17 + 5a|$$

$$a = 7, a = -\frac{69}{5}$$

065 Troba el valor de b perquè la recta i el punt es trobin a 5 unitats de distància:

$$r: \frac{x+1}{b} = \frac{y+3}{3} \quad P(-4, 1)$$

Expressem la recta de forma general:

$$3x + 3 = by + 3b \rightarrow 3x - by + 3 - 3b = 0$$

$$5 = \frac{|3 \cdot (-4) - b \cdot 1 + 3 - 3b|}{\sqrt{3^2 + (-b)^2}} \rightarrow 5\sqrt{9 + b^2} = |-9 - 4b|$$

$$9b^2 - 72b + 144 = 0 \rightarrow b = 4$$

La recta en el pla

- 066 Determina a perquè les dues rectes siguin paral·leles i troba, en aquest cas, la distància que les separa:

$$r: \begin{cases} x = 4 + 3\lambda \\ y = -1 + a\lambda \end{cases} \quad s: 4x - 3ay + 6 = 0$$

Expressem la recta r de forma general:

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{a} \rightarrow ax - 4a = 3y + 3 \rightarrow ax - 3y - 4a - 3 = 0$$

Perquè les rectes siguin paral·leles s'ha de complir que:

$$\frac{a}{4} = \frac{-3}{-3a} \neq \frac{-4a-3}{6} \rightarrow a = \pm 2$$

Agafem un punt $P(4, -1)$ de la recta r , i calculem la distància entre el punt i la recta s .

Si $a = 2$:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot 4 - 6 \cdot (-1) + 6|}{\sqrt{4^2 + (-6)^2}} = \frac{28}{2\sqrt{13}} = \frac{14\sqrt{13}}{13}$$

Si $a = -2$:

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) + 6|}{\sqrt{4^2 + 6^2}} = \frac{16}{2\sqrt{13}} = \frac{8\sqrt{13}}{13} \text{ u}$$

- 067 Troba l'equació d'una recta paral·lela a $\frac{x+1}{-3} = \frac{y-5}{4}$ i que es troba a 6 unitats de distància.

La recta té l'equació general següent: $4x + 3y + C = 0$

$$8 = \frac{|4 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 + C|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \rightarrow 40 = |11 + C| \quad C = 29, C = -51$$

Les rectes següents compleixen les condicions indicades.

$$4x + 3y + 29 = 0 \quad 4x + 3y - 51 = 0$$

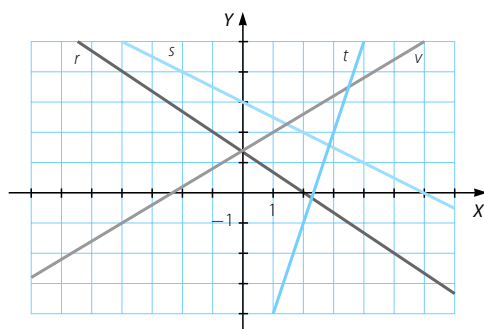
- 068 Troba les equacions, en les formes que es demanen, de les rectes següents:

r en forma paramètrica.

t en forma explícita.

s en forma contínua.

v en forma general.



$$r: \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 - 2\lambda \end{cases}$$

$$s: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1}$$

$$\left. \begin{aligned} y &= mx + n \xrightarrow{(2, -1)} -1 = 2m + n \\ y &= mx + n \xrightarrow{(3, 2)} 2 = 3m + n \end{aligned} \right\}$$

Resolem el sistema i obtenim $m = 3$ i $n = -7$.

$$t: y = 3x - 7$$

$$\left. \begin{aligned} y &= mx + n \xrightarrow{(-4, -1)} -1 = -4m + n \\ y &= mx + n \xrightarrow{(1, 2)} 2 = m + n \end{aligned} \right\}$$

I, si resolem el sistema, obtenim $m = \frac{3}{5}$ i $n = \frac{7}{5}$.

$$v: y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5} \rightarrow -3x + 5y - 7 = 0$$

- 069** Comprova si els punts $P(-1, 4)$, $Q(3, 1)$ i $R(11, -5)$ estan alineats. En cas afirmatiu, escriu l'equació de la recta on estan inclosos.

Calculem els vectors formats pels punts:

$$\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$$

$$\overrightarrow{PR} = (12, -9)$$

Com que els vectors són proporcionals, els punts estan alineats.

Calculem l'equació de la recta que els conté:

$$r: \begin{cases} x = -1 + 4\lambda \\ y = 4 - 3\lambda \end{cases}$$

- 070** Verifica si els punts $(-4, -3)$, $(1, 4)$ i $(16, 23)$ estan alineats. Si és així, escriu l'equació de la recta.

Anomenem els punts:

$$P(-4, -3)$$

$$Q(1, 4)$$

$$R(16, 23)$$

Calculem els vectors formats pels punts:

$$\overrightarrow{PQ} = (5, 7)$$

$$\overrightarrow{PR} = (20, 26)$$

Com que els vectors no són proporcionals, els punts no estan alineats.

La recta en el pla

071 Troba l'àrea del triangle que té com a vèrtexs (2, 1), (4, 3) i (6, -1).

Anomenem els punts:

$$P(2, 1) \quad Q(4, 3) \quad R(6, -1)$$

Calculem les longituds dels costats:

$$\overrightarrow{PQ} = (2, 2) \quad \overrightarrow{PR} = (4, -2) \quad \overrightarrow{QR} = (2, -4)$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$|\overrightarrow{PR}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

$$|\overrightarrow{QR}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{20}$$

Troblem l'altura sobre el costat desigual per mitjà del teorema de Pitàgores:

$$h = \sqrt{(\sqrt{20})^2 - \left(\frac{\sqrt{8}}{2}\right)^2} = \sqrt{18} \text{ u}$$

$$\text{Així doncs, l'àrea és: } A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}}{2} = 6 \text{ u}^2$$

072 Les rectes que inclouen els costats d'un triangle són $x + y - 5 = 0$, $6x + 5y - 24 = 0$ i $2x + y - 8 = 0$. Calcula'n els vèrtexs i l'àrea.

Troblem els punts de tall de les rectes:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 5 = 0 \\ 6x + 5y - 24 = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{x = -y + 5} 6(-y + 5) + 5y - 24 = 0 \rightarrow -y + 6 = 0$$

$$y = 6, x = -1$$

Les rectes es tallen en el punt $P(-1, 6)$.

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 5 = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{x = -y + 5} 2(-y + 5) + y - 8 = 0 \rightarrow -y + 2 = 0$$

$$y = 2, x = 3$$

Les rectes es tallen en el punt $Q(3, 2)$.

$$\left. \begin{array}{l} 6x + 5y - 24 = 0 \\ 2x + y - 8 = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{y = -2x + 8} 6x + 5(-2x + 8) - 24 = 0 \rightarrow -4x + 16 = 0$$

$$x = 4, y = 0 \rightarrow \text{Les rectes es tallen en el punt } R(4, 0).$$

Calculem les longituds dels costats:

$$\overrightarrow{PQ} = (4, -4) \rightarrow |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{32}$$

$$\overrightarrow{PR} = (5, -6) \rightarrow |\overrightarrow{PR}| = \sqrt{5^2 + (-6)^2} = \sqrt{61}$$

$$\overrightarrow{QR} = (1, -2) \rightarrow |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

Determinem l'altura, h , sobre el costat més llarg:

$$\left. \begin{array}{l} (\sqrt{32})^2 = x^2 + h^2 \\ (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{61} - x)^2 + h^2 \end{array} \right\} \rightarrow h = \frac{4\sqrt{61}}{61} \text{ u}$$

Així doncs, l'àrea és:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{61} \cdot \frac{4\sqrt{61}}{61}}{2} = 2 \text{ u}^2$$

- 073 La recta que passa pel punt (2, 3) i és paral·lela a la recta $\frac{x-6}{4} = \frac{y+3}{-6}$ forma un triangle amb els eixos cartesianes. Calcula'n l'àrea.

Calculem la recta:

$$\begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = 3 - 6\lambda \end{cases}$$

Determinem el punt de tall amb l'eix X:

$$0 = 3 - 6\lambda \rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \rightarrow P(4, 0)$$

Troblem el punt de tall amb l'eix Y:

$$0 = 2 + 4\lambda \rightarrow \lambda = -\frac{1}{2} \rightarrow Q(0, 6)$$

Com que el triangle que es forma és rectangle, l'àrea és:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ u}^2$$

- 074 Tenim un triangle de vèrtexs A(4, 9), B(11, 10) i C(9, 4). Comprova que és un triangle isòsceles. Dibuixem una recta paral·lela al costat desigual que passa per (7, 6) i es forma un trapezi isòsceles. Determina'n l'àrea.

Comprovem que el triangle és isòsceles:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40}$$

Troblem els punts de tall de la recta r amb els costats AB i AC.

$$\begin{cases} 3x - y - 15 = 0 \\ x - 7y + 59 = 0 \end{cases} \rightarrow D\left(\frac{41}{5}, \frac{48}{5}\right) \quad \begin{cases} 3x - y - 15 = 0 \\ x + y - 13 = 0 \end{cases} \rightarrow E(7, 6)$$

Obtenim el punt mitjà, M, del segment BC: M(10, 7).

Calculem el punt de tall de r amb el segment AM:

$$\begin{cases} 3x - y - 15 = 0 \\ x + 3y - 31 = 0 \end{cases} \rightarrow M'\left(\frac{38}{5}, \frac{39}{5}\right)$$

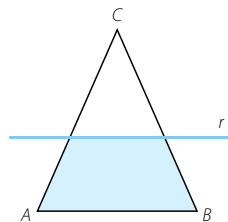
Determinem la longitud de la base menor i de l'altura:

$$\overrightarrow{DE} = \sqrt{\left(7 - \frac{41}{5}\right)^2 + \left(6 - \frac{48}{5}\right)^2} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$$

$$\overrightarrow{MM'} = \sqrt{\left(\frac{38}{5} - 10\right)^2 + \left(\frac{39}{5} - 7\right)^2} = \frac{4 \cdot \sqrt{10}}{5}$$

I calculem l'àrea:

$$A = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{\left(\sqrt{40} + \frac{6\sqrt{10}}{5}\right) \frac{4\sqrt{10}}{5}}{2} = \frac{64}{5} = 12,8 \text{ u}^2$$



La recta en el pla

075 Els punts $A(2, 2)$ i $B(-10, -2)$ són els vèrtexs que corresponen al costat desigual

d'un triangle isòscele. L'altre costat està sobre la recta $\begin{cases} x = 1 - 6\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$.

Determina'l i troba l'àrea del triangle.

Igulem el mòdul dels vectors que van de la recta fins als punts A i B .

$$\sqrt{(1 - 6\lambda - 2)^2 + (1 + 2\lambda - 2)^2} = \sqrt{(1 - 6\lambda + 10)^2 + (1 + 2\lambda + 2)^2}$$

$$\rightarrow \lambda = 1 \rightarrow C(-5, 3)$$

Troblem les longituds dels costats: $\overrightarrow{AB} = (-12, -4)$, $\overrightarrow{AC} = (-7, 1)$ i $\overrightarrow{BC} = (5, 5)$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-12)^2 + (-4)^2} = \sqrt{160}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = \sqrt{50}$$

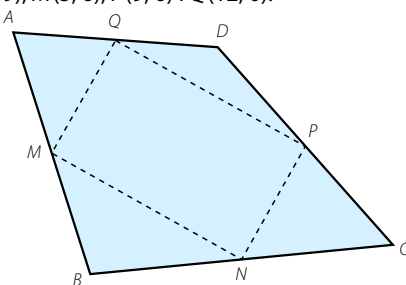
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$$

Determinem l'altura sobre el costat desigual, utilitzant el teorema de Pitàgores:

$$h = \sqrt{(\sqrt{50})^2 - \left(\frac{\sqrt{160}}{2}\right)^2} = \sqrt{10} \text{ u}$$

$$\text{Per tant, l'àrea és: } A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{160} \cdot \sqrt{10}}{2} = 20 \text{ u}^2$$

076 En un quadrilàter $ABCD$ hem dibuixat els punts mitjans dels costats, M, N, P i Q , els hem unit i han format un altre quadrilàter. Determina les coordenades dels altres punts si $A(7, 9)$, $M(5, 6)$, $P(9, 6)$ i $Q(12, 0)$.



Comprova que es verifica la propietat que els punts mitjans dels costats de qualsevol quadrilàter són els vèrtexs d'un paral·lelogram.

$$(5, 6) = \left(\frac{7+x}{2}, \frac{9+y}{2}\right) \rightarrow B(3, 3) \quad (12, 0) = \left(\frac{7+x}{2}, \frac{9+y}{2}\right) \rightarrow D(17, -9)$$

$$(9, 6) = \left(\frac{17+x}{2}, \frac{-9+y}{2}\right) \rightarrow C(1, 21) \quad N(x, y) = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{3+21}{2}\right) \rightarrow N(2, 12)$$

$$\overrightarrow{MN} = (-3, 6) \quad \overrightarrow{QP} = (-3, 6)$$

$$\overrightarrow{MQ} = (-7, -6) \quad \overrightarrow{NP} = (-7, -6)$$

Així doncs, es forma un paral·lelogram.

- 077 Calcula el centre d'un paral·lelogram del qual coneixem tres vèrtexs: $(5, -1)$, $(9, 5)$ i $(-1, -5)$. Quantes solucions té aquest problema? Per què? Fes un dibuix en el qual es vegin totes les solucions.

Anomenem els punts: $A(5, -1)$, $B(9, 5)$ i $C(-1, -5)$.

$$\overrightarrow{AB} = (4, 6)$$

Fem una translació amb origen a C i vector $(4, 6)$, i obtenim un punt D , que forma un paral·lelogram: $D(3, 1)$.

Calculem el centre del paral·lelogram, E :

$$(x, y) = \left(\frac{9-1}{2}, \frac{5-5}{2} \right) \rightarrow E(4, 0)$$

Fem una translació amb origen a C i vector $(-4, -6)$, i obtenim un punt D' , que forma un paral·lelogram: $D'(-5, -11)$.

Calculem el centre del paral·lelogram, E' :

$$(x, y) = \left(\frac{9-5}{2}, \frac{5-11}{2} \right) \rightarrow E'(2, -3)$$

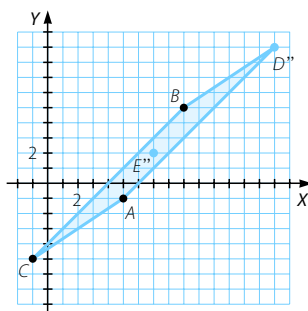
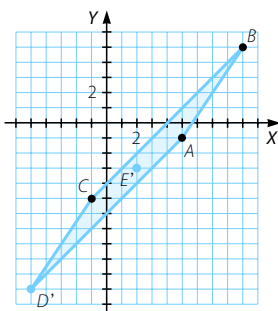
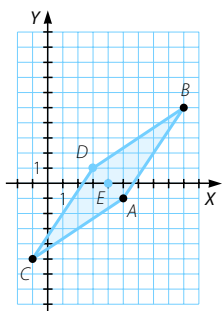
$$\overrightarrow{CB} = (10, 10)$$

Fem una translació amb origen a A i vector $(10, 10)$, i obtenim un punt D'' , que forma un paral·lelogram: $D''(15, 9)$.

Calculem el centre del paral·lelogram, E'' :

$$(x, y) = \left(\frac{15-1}{2}, \frac{9-5}{2} \right) \rightarrow E''(7, 2)$$

Aquest problema té tres solucions:



- 078 Troba l'equació de la mediatriu del segment que té com a extrems $(1, 5)$ i $(-3, -7)$.

Anomenem els punts: $P(1, 5)$ i $Q(-3, -7)$.

Calculem el punt mitjà, M : $M(-1, -1)$

Troblem el vector $\overrightarrow{PQ} = (-4, -12)$

Un vector normal a $\overrightarrow{PQ}$ és $(-3, 1)$.

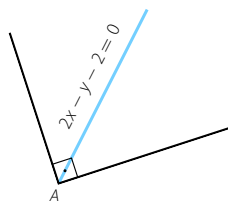
L'equació de la mediatriu és:

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y+1}{1}$$

La recta en el pla

- 079 Un angle recte té el vèrtex al punt $A(3, 4)$ i l'equació de la bisectriu és $2x - y - 2 = 0$.

Troba les equacions que defineixen els costats d'aquest angle.



La bisectriu té per vector director $(1, 2)$.

Escrivim l'equació punt-pendent dels costats:

$$y - 4 = m(x - 3) \rightarrow -mx + y - 4 + 3m = 0$$

Apliquem la fórmula de l'angle entre dues rectes:

$$\cos 45^\circ = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot m|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}}$$

$$\rightarrow m = -3, m = \frac{1}{3}$$

Les equacions són: $3x + y - 13 = 0$ $-\frac{1}{3}x + y - 3 = 0$

- 080 Troba una recta que formi un angle de 60° amb la recta $\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{cases}$ i que passi pel punt $(-4, 2)$.

Apliquem la fórmula de l'angle entre dues rectes:

$$\cos 60^\circ = \frac{|d_1 \cdot c_1 + d_2 \cdot c_2|}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2} \cdot \sqrt{c_1^2 + c_2^2}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|1 \cdot 1 + 3 \cdot m|}{\sqrt{1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + m^2}}$$

Les equacions són: $y - 2 = \frac{-6 - 5\sqrt{13}}{13}(x + 4)$ $y - 2 = \frac{-6 + 5\sqrt{13}}{13}(x + 4)$

- 081 Calcula el valor de k perquè les tres rectes: $2x + 5y - 1 = 0$, $-x + 2y + k = 0$ i $4x + 7y - 5 = 0$ es tallin al mateix punt. Determina les coordenades d'aquest punt.

Troblem les coordenades del punt de tall:

$$\begin{cases} 2x + 5y - 1 = 0 \\ 4x + 7y - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow (3, -1)$$

$$-3 + 2 \cdot (-1) + k = 0 \rightarrow k = 5$$

- 082 Troba els angles del triangle que té com a vèrtexs $(3, -5)$, $(1, 6)$ i $(-3, 2)$.

Anomenem els punts: $A(3, -5)$, $B(1, 6)$ i $C(-3, 2)$.

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 11) \quad \overrightarrow{AC} = (-6, 7) \quad \overrightarrow{CB} = (4, 4)$$

$$\cos \alpha = \frac{|-2 \cdot (-6) + 11 \cdot 7|}{\sqrt{(-2)^2 + 11^2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + 7^2}} \rightarrow \alpha = 30^\circ 17' 47,21''$$

$$\cos \beta = \frac{|-2 \cdot 4 + 11 \cdot 4|}{\sqrt{(-2)^2 + 11^2} \cdot \sqrt{4^2 + 4^2}} \rightarrow \beta = 55^\circ 18' 17,45''$$

$$180^\circ - 30^\circ 17' 47,21'' - 55^\circ 18' 17,45'' = 94^\circ 23' 55,34''$$

- 083 Troba un punt de la recta $2x - y + 18 = 0$ que equidisti dels punts $(3, -1)$ i $(7, 3)$.

Aillem y de l'equació de la recta:

$$y = 2x + 18$$

Els punts de la recta són de la forma: $(x, 2x + 18)$

Com que els punts han d'estar a la mateixa distància de la recta, tenim que:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (2x+18-(-1))^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (2x+18-3)^2} \rightarrow x = -4$$

$$2 \cdot (-4) + 18 = 10$$

El punt és $(-4, 10)$.

- 084 Troba l'equació d'una recta r que passi pels punts $(5, -4)$ i $(3, 6)$, i després, l'equació d'una recta s paral·lela a r i que estigui a 8 unitats de distància.

$$\vec{u}_r = \vec{u}_s = (-2, 10)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 5 - 2\lambda \\ y = -4 + 10\lambda \end{array} \right\} \rightarrow \frac{x-5}{-2} = \frac{y+4}{10} \rightarrow 5x + y - 21 = 0$$

Calculem els punts que disten 5 unitats de la recta r :

$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \rightarrow 5 = \frac{|5 \cdot x + 1 \cdot y - 21|}{\sqrt{5^2 + 1^2}} \rightarrow \left. \begin{array}{l} y = -5x + 21 - 5\sqrt{26} \\ y = -5x + 21 + 5\sqrt{26} \end{array} \right\}$$

Agafem els punts $(1, 16 - 5\sqrt{26})$ i $(1, 16 + 5\sqrt{26})$.

Les rectes són:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 16 - 5\sqrt{26} + 10\lambda \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 16 + 5\sqrt{26} + 10\lambda \end{array} \right\}$$

- 085 Determina un punt a l'eix d'abscisses que estigui a la mateixa distància del punt $A(5, 4)$ que de la recta $r: \frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{3}$.

Escrivim l'equació general de la recta, r :

$$3x - 4y + 19 = 0$$

Agafem un punt $P(x, 0)$ de l'eix d'abscisses:

$$\sqrt{(5-x)^2 + 16} = \frac{|3x - 4 \cdot 0 + 19|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \rightarrow x = 2$$

El punt és $(2, 0)$.

La recta en el pla

086

Donats els punts $P(-3, 2)$ i $Q(5, 6)$, determina l'equació de la recta que passa per P i que dista 5 unitats de Q . Aquesta recta forma un angle amb la recta que uneix P i Q . Calcula quina mida té.

Calculem les rectes que passen per P :

$$x + By + C = 0 \xrightarrow{(-3, 2)} C = 3 - 2B$$

$$x + By + 3 - 2B = 0$$

Determinem les rectes que disten 5 unitats de Q :

$$d(Q, s) = \frac{|5 + 6B + 3 - 2B|}{\sqrt{1^2 + B^2}} = 5 \rightarrow |4B + 8| = 5\sqrt{1 + B^2} \rightarrow \left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{32 - 5\sqrt{55}}{9} \\ b_2 &= \frac{32 + 5\sqrt{55}}{9} \end{aligned} \right\}$$

Les rectes que busquem són:

$$r: x + \frac{32 - 5\sqrt{55}}{9}y + 3 + \frac{-64 + 10\sqrt{55}}{9} = 0$$

$$s: x + \frac{32 + 5\sqrt{55}}{9}y + 3 + \frac{-64 - 10\sqrt{55}}{9} = 0$$

El vector director de la recta que uneix P i Q és: $\vec{PQ} = (8, 4) = (2, 1)$.

$$\vec{u}_r = \left(\frac{-32 + 5\sqrt{55}}{9}, 1 \right) = (-32 + 5\sqrt{55}, 9)$$

Determinem l'angle format, que és igual per a les dues rectes:

$$\cos \alpha = \frac{|2 \cdot (-32 + 5\sqrt{55}) + 1 \cdot 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-32 + 5\sqrt{55})^2 + 9^2}} = 0,2074 \rightarrow \alpha = 78^\circ 1' 33,69''$$

087

De totes les rectes que passen pel punt $A(2, 3)$, calcula la recta que determina segments iguals quan talla els eixos cartesianes.

Les rectes que passen per A són de la forma:

$$y - 3 = m(x - 2)$$

Aquestes rectes tallen els eixos en els punts:

$$(0, 3 - 2m) \quad \left(\frac{-3 + 2m}{m}, 0 \right)$$

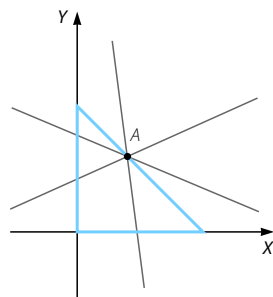
I com que la distància a l'origen $(0, 0)$ ha de ser igual:

$$\sqrt{(3 - 2m)^2} = \sqrt{\left(\frac{-3 + 2m}{m} \right)^2} \rightarrow \text{Hi ha tres solucions.}$$

$$m_1 = -1 \rightarrow y = -x + 5$$

$$m_2 = 1 \rightarrow y = x + 1$$

$$m_3 = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}x$$



088 Troba l'equació de la recta que talla els eixos de coordenades als punts (3, 0) i (0, 5).

Comprova que aquesta equació es pot escriure de la forma: $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$

Comprova també que si una recta talla els eixos als punts (a, 0) i (0, b), l'equació es pot escriure de la forma: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Aquesta manera d'escriure una recta s'acostuma a anomenar *forma canònica* o *segmentària*.

Calculem el vector director de la recta: $\vec{u}_r = (3, -5)$

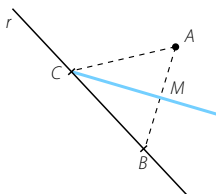
$$\frac{x-3}{3} = \frac{y}{-5} \rightarrow \frac{x}{3} - 1 = -\frac{y}{5} \rightarrow \frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$$

Troblem el vector director de la recta:

$$\vec{u}_r = (a, -b)$$

$$\frac{x-a}{a} = \frac{y}{-b} \rightarrow \frac{x}{a} - \frac{a}{a} = -\frac{y}{b} \rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

089 El punt $(-4, 2)$ és el vèrtex A d'un triangle que té el costat a localitzat sobre la recta $3x + 2y + 18 = 0$. L'equació de la mitjana que surt del vèrtex C és $x + y + 5 = 0$. Determina els vèrtexs B i C.



Determinem el punt C, intersecció de la recta r i la mitjana:

$$\begin{cases} 3x + 2y + 18 = 0 \\ x + y + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow (-8, 3)$$

El punt B és de la forma:

$$\left(x, \frac{-3x - 18}{2} \right)$$

I el punt M és de la forma:

$$(t, -t - 5)$$

Així doncs, tenim que:

$$(t, -t - 5) = \left(\frac{x-4}{2}, \frac{\frac{-3x-18}{2} + 2}{2} \right) \rightarrow \begin{cases} t = \frac{x-4}{2} \\ -t-5 = \frac{-3x-18+4}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ t = -3 \end{cases}$$

$$B(-2, -6) \quad M(-3, -2)$$

La recta en el pla

090 Comprova que aquestes rectes són paral·leles:

$$r: \frac{x-1}{6} = \frac{y+4}{8} \quad s: -4x + 3y + 6 = 0$$

Demostra que tots els punts M que obtenim pel procediment següent se situen sobre una recta, i calcula'n l'equació: «Agafa un punt A de la recta r i un punt B de s , i troba el punt mitjà M del segment d'extremes A i B .»

$$\vec{u}_r = (6, 8), \vec{u}_s = (3, 4)$$

Com que els vectors directores són proporcionals, les rectes són paral·leles o coincidents.

Agafem un punt A de r i comprovem si verifica les equacions de s :

$$A(1, -4) \quad -4 \cdot 1 + 3 \cdot (-4) + 6 \neq 0$$

Per tant, les rectes són paral·leles.

Expressem les rectes de forma paramètrica:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 6\lambda \\ y = -4 + 8\lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 6\mu \\ y = 2 + 8\mu \end{cases}$$

Els punts mitjans són:

$$\left(\frac{1 + 6\lambda + 6\mu}{2}, \frac{-4 + 8\lambda + 8\mu}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} + 3(\lambda + \mu), -2 + 4(\lambda + \mu) \right)$$

Així doncs, si fem $t = \lambda + \mu$, els punts que es demanen se situen sobre la recta:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + 3t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$$

091 Els punts $(2, -1)$, $(5, 3)$ i $(10, 3)$ són tres vèrtexs d'un rombe. Troba el quart vèrtex i calcula l'àrea del rombe.

Calculem la distància entre els vèrtexs:

$$\sqrt{(5-2)^2 + (3-(-1))^2} = 5$$

$$\sqrt{(10-2)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{80}$$

$$\sqrt{(10-5)^2 + (3-3)^2} = 5$$

Així doncs, els punts $(10, 3)$ i $(2, 1)$ són vèrtexs no consecutius del rombe.

Per tant, els altres vèrtexs, (x, y) i $(5, 3)$, són a 5 unitats dels anteriors.

$$\begin{cases} \sqrt{(10-x)^2 + (3-y)^2} = 5 \\ \sqrt{(2-x)^2 + (-1-y)^2} = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5, y = 3 \\ x = 7, y = -1 \end{cases}$$

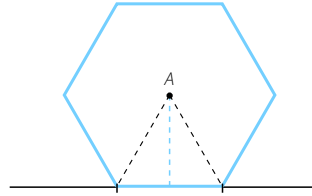
El quart vèrtex és $(7, -1)$.

Calculem l'altra diagonal i l'àrea:

$$\sqrt{(7-5)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{20}$$

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{\sqrt{80} \cdot \sqrt{20}}{2} = 20 \text{ u}^2$$

- 092 El centre d'un hexàgon regular és el punt $(6, -2)$ i un costat està sobre la recta d'equació: $-4x + 3y + 5 = 0$. Determina'n les coordenades dels vèrtexs i l'àrea.



Calculem la longitud de l'apotema:

$$d(A, r) = \frac{|-4 \cdot 6 + 3 \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} = 5$$

Troblem la longitud del costat: $c = \sqrt{5^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \rightarrow c = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ u

$$\text{Determinem l'àrea: } A = \frac{P \cdot a_p}{2} = \frac{6 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot 5}{2} = 50\sqrt{3} \text{ u}^2$$

Calculem els punts que disten $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ de A i pertanyen a la recta donada:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{10\sqrt{3}}{3} = \sqrt{(6-x)^2 + (-2-y)^2} \\ -4x + 3y + 5 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 = \sqrt{3} + 2, y_1 = 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} + 2, y_2 = 1 - \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{array} \right\}$$

$$B\left(\sqrt{3} + 2, 1 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) \quad C\left(-\sqrt{3} + 2, 1 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

Dos vèrtexs més són simètrics als vèrtexs calculats respecte de A.

$$(6, -2) = \left(\frac{\sqrt{3} + 2 + x}{2}, \frac{1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} + y}{2}\right) \rightarrow D\left(10 - \sqrt{3}, -5 - \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$(6, -2) = \left(\frac{-\sqrt{3} + 2 + x}{2}, \frac{1 - \frac{4\sqrt{3}}{3} + y}{2}\right) \rightarrow E\left(10 + \sqrt{3}, -5 + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

Per calcular la resta de vèrtexs, hem de tenir en compte la longitud dels costats.

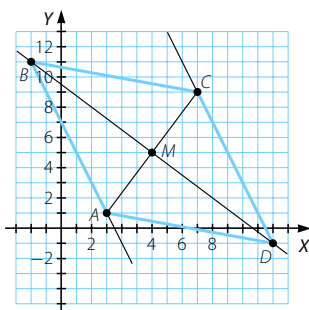
$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{(10 + \sqrt{3} - x)^2 + \left(-5 + \frac{4\sqrt{3}}{3} - y\right)^2} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{(\sqrt{3} + 2 - x)^2 + \left(1 + \frac{4\sqrt{3}}{3} - y\right)^2} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 6, y = -2 \\ x = 2\sqrt{3} + 6, y = \frac{8\sqrt{3}}{3} - 2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{(10 - \sqrt{3} - x)^2 + \left(-5 - \frac{4\sqrt{3}}{3} - y\right)^2} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \\ \sqrt{(-\sqrt{3} + 2 - x)^2 + \left(1 - \frac{4\sqrt{3}}{3} - y\right)^2} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 6, y = -2 \\ x = -2\sqrt{3} + 6, y = -\frac{8\sqrt{3}}{3} - 2 \end{array} \right\}$$

$$F\left(2\sqrt{3} + 6, \frac{8\sqrt{3}}{3} - 2\right) \quad G\left(-2\sqrt{3} + 6, -\frac{8\sqrt{3}}{3} - 2\right)$$

La recta en el pla

- 093 Dos vèrtexs no consecutius d'un rombe estan als punts $(3, 1)$ i $(9, 9)$, i un dels costats és paral·lel a la recta $x = 5 + \lambda$
 $y = -1 - 2\lambda$. Troba les coordenades dels altres vèrtexs, la longitud del costat i l'àrea.



Calculem les equacions de les rectes que passen pels vèrtexs coneguts $A(3, 1)$ i $C(9, 9)$, i són paral·leles a la recta donada:

$$\begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9 + \lambda \\ y = 9 - 2\lambda \end{cases}$$

Troblem la mediatriu del segment que uneix els vèrtexs donats:

Punt mitjà: $M(6, 5)$, i vector: $\vec{v}(6, 8) \rightarrow \vec{n}(8, -6)$

$$\begin{cases} x = 6 + 8\mu \\ y = 5 - 6\mu \end{cases}$$

Determinem el punt de tall de la mediatriu amb els costats:

$$\begin{cases} 3 + \lambda = 6 + 8\mu \\ 1 - 2\lambda = 5 - 6\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = -5 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

I obtenim, així, les coordenades d'un dels altres dos vèrtexs: $B(-2, 11)$.

$$\begin{cases} 9 + \lambda = 6 + 8\mu \\ 9 - 2\lambda = 5 - 6\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 5 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

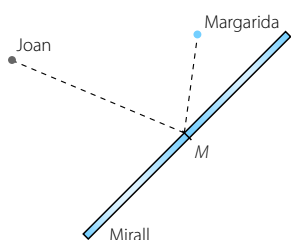
I l'últim dels vèrtexs està al punt $D(14, -1)$.

El costat fa: $c = d(A, B) = |\vec{AB}| = \sqrt{((-2) - 3)^2 + (11 - 1)^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ u

I l'àrea és:

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{1}{2} (\sqrt{6^2 + 8^2} \cdot \sqrt{(14 - (-2))^2 + ((-1) - 11)^2}) \cdot \frac{1}{2} (10 \cdot 20) = 100 \text{ u}^2$$

- 094 En Joan i la Margarida es miren l'un a l'altra a través d'un mirall situat segons la recta d'equació $y = -x + 2$. La Margarida és al punt $(-9, -1)$ i en Joan, a $(-4, 3)$. Quines coordenades té el punt M al qual miren?



Troblem el vector director de la recta donada:

$$\vec{u}_r = (1, -1)$$

Un vector perpendicular és $\vec{u}_s = (1, 1)$.

La recta, perpendicular al mirall, que passa per on hi ha la Margarida és:

$$\begin{cases} x = -9 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \end{cases}$$

Determinem el punt de tall de les dues rectes:

$$-1 + \lambda = 9 - \lambda + 2 \rightarrow \lambda = 6 \rightarrow (-3, 5)$$

Calculem el punt simètric respecte del mirall, B' :

$$(-3, 5) = \left(\frac{x-9}{2}, \frac{y-1}{2} \right) \rightarrow B' = (3, 11)$$

Repetim el procés amb l'altre punt donat i obtenim J' : $\begin{cases} x = -4 + \lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases}$

$$3 + \lambda = 4 - \lambda + 2 \rightarrow \lambda = \frac{3}{2} \rightarrow \left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right)$$

$$\left(-\frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right) = \left(\frac{x-4}{2}, \frac{y+3}{2} \right) \rightarrow J'(-1, 6)$$

Determinem la recta que passa per $(-9, 1)$ i per J' : $\begin{cases} x = -9 + 8\lambda \\ y = -1 + 7\lambda \end{cases}$

Calculem la recta que passa per $(-4, 3)$ i per B' : $\begin{cases} x = -4 + 7\mu \\ y = 3 + 8\mu \end{cases}$

Trobem el punt de tall de les rectes:

$$\begin{cases} -9 + 8\lambda = -4 + 7\mu \\ -1 + 7\lambda = 3 + 8\mu \end{cases} \rightarrow \lambda = \frac{4}{5} \rightarrow \mu = \frac{1}{5}$$

$$\text{El punt de tall és: } \left(-\frac{13}{5}, \frac{23}{5} \right)$$

- 095** Calcula les mediatriss del triangle de vèrtexs $(-1, 1)$, $(7, -1)$ i $(5, -3)$. Prova que es tallen al circumcentre, que és el centre de la circumferència inscrita al triangle. Comprova que podem traçar una circumferència que passa pels tres vèrtexs amb centre en aquest punt. De quina mida és el radi?

Anomenem els punts: $A(-1, 1)$, $B(7, -1)$ i $C(5, -3)$.

Calculem el punt mitjà, A' , del costat BC : $A'(6, -2)$

Trobem un vector perpendicular al costat BC : $(-2, 2)$

L'equació de la mediatriu que passa per A' és:

$$\frac{x-6}{-2} = \frac{y+2}{2} \rightarrow x + y - 4 = 0$$

Calculem el punt mitjà, C' , del costat AB : $C'(3, 0)$

Trobem un vector perpendicular al costat AB : $(1, 4)$

L'equació de la mediatriu que passa per C' és:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y}{4} \rightarrow 4x - y - 12 = 0$$

Calculem el punt mitjà, B' , del costat AC : $B'(2, -1)$

Trobem un vector perpendicular al costat AC : $(2, 3)$

L'equació de la mediatriu que passa per B' és:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} \rightarrow 3x - 2y - 8 = 0$$

La recta en el pla

Determinem el punt de tall de les mediatriss:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - 4 = 0 \\ 4x - y - 12 = 0 \\ 3x - 2y - 8 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{16}{5} \\ y = \frac{4}{5} \end{array} \right\}$$

El circumcentre és:

$$\left(\frac{16}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

Calculem la distància del circumcentre als vèrtexs i comprovem que és igual.

$$\sqrt{\left(-1 - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{442}}{5} u$$

$$\sqrt{\left(7 - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(-1 - \frac{4}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{442}}{5} u$$

$$\sqrt{\left(5 - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(-3 - \frac{4}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{442}}{5} u$$

Així doncs, el radi mesura $\frac{\sqrt{442}}{5} u$.

096

Troba les mitjanes del triangle de vèrtexs $(-4, 6)$, $(3, 0)$ i $(-2, -3)$. Prova que es tallen al baricentre. Comprova que els vèrtexs d'un triangle tenen coordenades (x_1, y_1) , (x_2, y_2) i (x_3, y_3) , i les coordenades del baricentre són:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

Anomenem els punts: $A(-4, 6)$, $B(3, 0)$ i $C(-2, -3)$.

Calculem el punt mitjà, A' , del costat BC :

$$A' \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2} \right)$$

Determinem la mitjana que passa per AA' :

$$\frac{x + 4}{-9} = \frac{y - 6}{15} \rightarrow 15x + 9y + 6 = 0$$

Calculem el punt mitjà, B' , del costat AC :

$$B' \left(-3, \frac{3}{2} \right)$$

Troblem la mitjana que passa per BB' :

$$\frac{x - 3}{12} = \frac{y}{-3} \rightarrow -3x - 12y + 9 = 0$$

Determinem el punt mitjà, C' , del costat BA :

$$C' \left(-\frac{1}{2}, 3 \right)$$

Calculem la mitjana que passa per CC' :

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{12} \rightarrow 12x - 3y + 15 = 0$$

Troblem el punt de tall de les rectes:

$$\left. \begin{array}{l} 15x + 9y + 6 = 0 \\ -3x - 12y + 9 = 0 \\ 12x - 3y + 15 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 1 \end{array} \rightarrow \text{El baricentre és } (-1, 1)$$

Donats els punts $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ i $T(x_3, y_3)$, determinem el punt mitjà, P' , del costat QT :

$$P' \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2} \right)$$

Troblem la mitjana que passa per PP' :

$$\frac{x - x_1}{\frac{x_2 + x_3}{2} - x_1} = \frac{y - y_1}{\frac{y_2 + y_3}{2} - y_1} \rightarrow \frac{x - x_1}{x_2 + x_3 - 2x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 + y_3 - 2y_1}$$

Calculem el punt mitjà, Q' , del costat PT :

$$Q' \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2} \right)$$

Determinem la mitjana que passa per QQ' :

$$\frac{x - x_2}{\frac{x_1 + x_3}{2} - x_2} = \frac{y - y_2}{\frac{y_1 + y_3}{2} - y_2} \rightarrow \frac{x - x_2}{x_1 + x_3 - 2x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 + y_3 - 2y_2}$$

Troblem la intersecció de les rectes:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x - x_1}{x_2 + x_3 - 2x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 + y_3 - 2y_1} \\ \frac{x - x_2}{x_1 + x_3 - 2x_2} = \frac{y - y_2}{y_1 + y_3 - 2y_2} \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x = \frac{(y - y_1)(x_2 + x_3 - 2x_1)}{y_2 + y_3 - 2y_1} - x_1 \\ x = \frac{(y - y_2)(x_1 + x_3 - 2x_2)}{y_1 + y_3 - 2y_2} - x_2 \end{array}$$

$$\rightarrow \frac{(y - y_1)(x_2 + x_3 - 2x_1)}{y_2 + y_3 - 2y_1} - x_1 = \frac{(y - y_2)(x_1 + x_3 - 2x_2)}{y_1 + y_3 - 2y_2} - x_2$$

$$\rightarrow y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

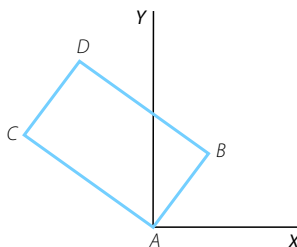
Substituïm, i tenim que:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

La recta en el pla

097

Considera el rectangle del pla representat en el dibuix (recorda que rectangle és un quadrilàter en què els quatre angles són rectes).



- Sabent que les coordenades de A són (0, 0) i les de B són (3, 4), calcula la longitud del costat AB.
- Escriu l'equació de la recta determinada per C i A.
- Determina les coordenades del vèrtex C sabent que la longitud del costat CA és doble de la del costat AB.
- Calcula les coordenades del vèrtex D.

(Activitat de Selectivitat)

- Distància: $d(A, B) = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5$
- Recta: La recta r_{AC} queda determinada pel punt A i un vector perpendicular a $\vec{AB} \rightarrow \vec{n} = (4, -3)$, o sigui:

$$\frac{x-0}{4} = \frac{y-0}{-3} \rightarrow r_{AC} : 3x + 4y = 0$$

- Vèrtex C:

$$C \in r_{AC} \rightarrow C \left(c, -\frac{4}{3}c \right) \text{ i } d(A, C) = 10 = \sqrt{(c)^2 + \left(-\frac{4}{3}c\right)^2}$$

- Vèrtex D:

$$D = C + \vec{AB} = (6, -8) + (3, 4) = (9, -4)$$

098

Un triangle rectangle té el vèrtex A, corresponent a l'angle recte, a l'origen de coordenades. Un altre dels seus vèrtexs és el punt B(2, 4), i la hipotenusa té per equació la recta $x = 2$. Calcula:

- Les equacions dels costats AB i AC.
- El tercer vèrtex C.
- L'àrea del triangle.

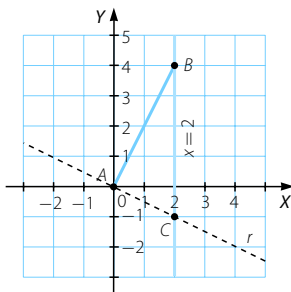
(Activitat de Selectivitat)

- Les equacions són: $r_{AB} : y = 2x$, i l'altra és perpendicular i passa per l'origen:

$$r_{AC} : y = -\frac{1}{2}x$$

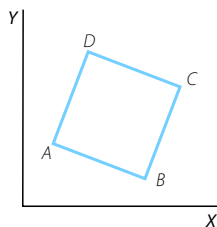
- Per calcular C:
$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{array} \right\} \rightarrow C(2, -1)$$

c) L'àrea val: $S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{|\overline{BC}| \cdot d(A, r_{BC})}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5 \text{ u}^2$



099 Els punts $A = (1, 2)$ i $D = (5, 4)$ representen els vèrtexs oposats d'un quadrat, tal com s'indica a la figura.

- Calcula el punt mitjà M de la diagonal AD del quadrat (M serà el centre del quadrat).
- Escriu l'equació de la recta que passa per M i és perpendicular a la diagonal AD (aquesta recta serà l'altra diagonal del quadrat).
- Calcula les coordenades dels altres dos vèrtexs B i C del quadrat.



(Activitat de Selectivitat)

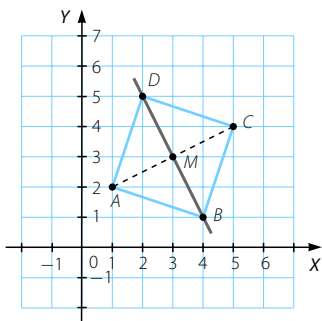
- El punt $M = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+4}{2} \right) = (3, 3)$
- Recta: r_M perpendicular a $\overline{AD}$: queda determinada pel punt M i un vector perpendicular a $\overline{AD} = (4, 2) \rightarrow \vec{n} = (2, -4)$, o sigui:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{-4} \rightarrow r_{AC}: 2x + y = 9$$
- Vèrtexs C i B : Són punts de la recta anterior i verifiquen que

$$d(C, M) = d(B, M) = d(A, M) = \sqrt{(3-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$C \in r_M \rightarrow C(c, 9-2c) \text{ i } d(C, M) = \sqrt{5} = \sqrt{(c-3)^2 + ((9-2c)-3)^2}$$

$$(c-3)^2 + (6-2c)^2 = 5 \rightarrow 5c^2 - 30c + 40 = 0 \rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ c = 4 \end{cases}$$
que ens dóna els dos punts $c = 2 \rightarrow C(2, 5)$ i $c = 4 \rightarrow C(4, 1)$



La recta en el pla

100 Al triangle de vèrtexs $A = (0, 3)$, $B = (3, 7)$ i $C = (6, 0)$ determina:

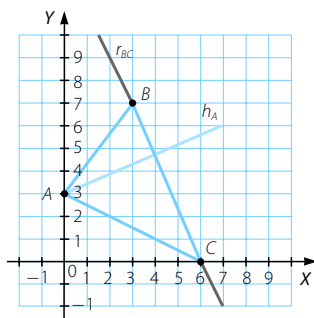
- El perímetre.
- L'equació de la recta perpendicular al segment BC que passa per A , és a dir, l'altura del triangle des del vèrtex A .
- La distància del punt A a la recta que conté el segment BC .
- La superfície.

(Activitat de Selectivitat)

- Perímetre: $P = d(A, B) + d(B, C) + d(C, A)$, on $d(A, B) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,
 $d(B, C) = \sqrt{3^2 + (-7)^2} = \sqrt{58}$ i $d(C, A) = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{45}$;
per tant, $P = 5 + \sqrt{58} + \sqrt{45} = 19,32$ u.
- Recta altura: Determinada per $A(0, 3)$ i un vector perpendicular a $\overrightarrow{BC} = (3, -7)$;
o sigui, $\vec{n} = (7, 3) \rightarrow \frac{x-0}{7} = \frac{y-3}{3} \rightarrow 3x - 7y = -21$
- Distància de A a la recta r_{BC} : $\frac{x-3}{3} = \frac{y-7}{-7} \rightarrow 7x + 3y = 42$ u.

$$d(A, r_{BC}) = \frac{|7 \cdot 0 + 3 \cdot 3 - 42|}{\sqrt{7^2 + 3^2}} = \frac{33}{\sqrt{58}} \text{ u.}$$
- Superfície: l'àrea d'un triangle es calcula $S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$, on
base $= |\overline{BC}| = d(B, C) = \sqrt{58}$ u.
Altura $= d(A, r_{BC}) = \frac{|7 \cdot 0 + 3 \cdot 3 - 42|}{\sqrt{7^2 + 3^2}} = \frac{33}{\sqrt{58}} \text{ u}$

$$S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{\sqrt{58} \cdot \frac{33}{\sqrt{58}}}{2} = \frac{33}{2} \text{ u}^2$$



101 Un triangle té dos vèrtexs A i B en els punts $A = (0, 0)$ i $B = (2, 0)$. L'àrea del triangle val 3.

- Sabent que el tercer vèrtex C té ordenada positiva i està situat sobre la recta $2x + y + 5 = 0$, calcula les coordenades de C i el perímetre del triangle.
- Dibuixa'n la gràfica corresponent.

(Activitat de Selectivitat)

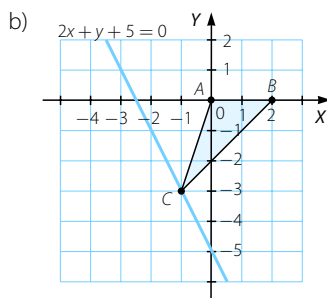
- a) La base del triangle val $|\overline{AB}| = 2$ i la recta $r_{AB}: y = 0$. Si l'àrea és 3:

$$S = \frac{2 \cdot h}{2} = 3 \rightarrow h = 3$$

Per calcular el vèrtex C , sabem que $C \in r \rightarrow C(c, -2c - 5)$: i el punt és $(-1, -3)$.

El perímetre val:

$$\begin{aligned} P &= d(A, B) + d(B, C) + d(C, A) = \\ &= 2 + \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} + \sqrt{1^2 + 3^2} = 2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{10} \text{ u} \end{aligned}$$



102

- a) Determina l'equació de la recta paral·lela a la bisectriu del segon i quart quadrant que passa pel punt $(0, a)$.
- b) Determina el valor de a perquè la recta anterior determini en el primer quadrant un triangle d'àrea 8 amb els eixos.
- c) Quina és la distància d'aquesta recta a l'origen de coordenades?
- d) Quina és la distància d'aquesta recta al punt $(-4, 0)$?

(Activitat de Selectivitat)

- a) Recta paral·lela a la bisectriu: $y = -x + h$. Si ha de passar pel punt

$$A(0, a) \rightarrow h = a \rightarrow \text{Equació: } y = -x + a.$$

- b) La recta anterior talla l'eix d'abscisses en el punt

$$\left. \begin{array}{l} y = -x + a \\ y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = a \rightarrow B(a, 0),$$

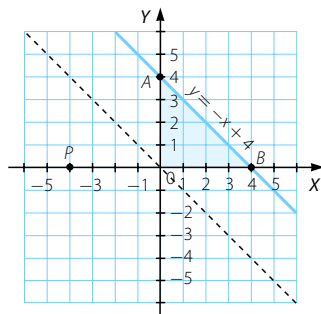
amb la qual cosa ens queda un triangle rectangle de base a i altura a

$$S = \frac{bh}{2} = \frac{a \cdot a}{2} = 8 \rightarrow a = 4.$$

- c) Distància: $d(O, r) = \left| \frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 4}{1} \right| = 4 \text{ u}$

- d) La distància serà:

$$d(P, r) = \left| \frac{1 \cdot (-4) + 1 \cdot 0 - 4}{1} \right| = 8 \text{ u}.$$



La recta en el pla

- 103 El costat BC d'un triangle està sobre la recta d'equació $3x - 2y + 1 = 0$. El vèrtex A té coordenades $(2, -1)$. Determina el peu de l'altura relativa a A .

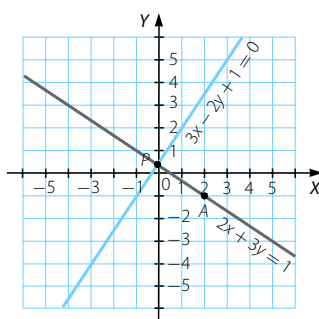
(Activitat de Selectivitat)

Recta perpendicular a r_{BC} que passa per A (recta altura):

$$\left. \begin{array}{l} A(2, -1) \\ \vec{d}_{BC} = (2, 3) \rightarrow \vec{n} = (3, -2) \end{array} \right\} \rightarrow h_A: \frac{x-2}{3} = \frac{y-(-1)}{-2} \rightarrow h_A: 2x + 3y = 1$$

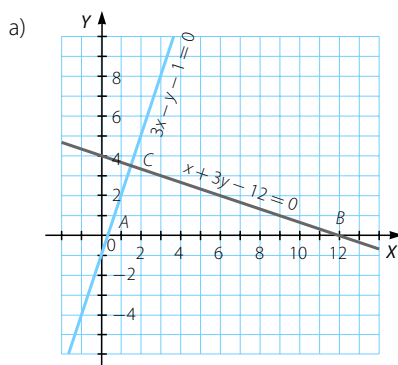
El peu que busquem és el punt d'intersecció de les dues rectes:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 2y = -1 \\ 2x + 3y = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x - 4y = -2 \\ 6x + 9y = 3 \end{array} \right\} \rightarrow -13y = -5 \rightarrow y = \frac{5}{13} \rightarrow P\left(-\frac{1}{13}, \frac{5}{13}\right)$$



- 104 a) Dibuixa el gràfic de les rectes $3x - y - 1 = 0$ i $x + 3y - 12 = 0$.
 b) Demostra que les dues rectes anteriors són perpendiculars.
 c) Calcula el punt d'intersecció de les dues rectes.
 d) Considera el triangle format per les dues rectes anteriors i per l'eix d'ordenades. Calcula'n l'àrea.

(Activitat de Selectivitat)



- b) El vector director d'una recta $Ax + By + C = 0$, així doncs, en aquest cas:
 $\vec{d}_r = (1, 3)$ i $\vec{d}_s = (-3, 1)$. Fem el producte escalar:
 $\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s = 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 = 0$
 per tant, són perpendiculars.

- c) Busquem el punt de tall de les dues rectes:

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 3y = 12 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9x - 3y = 3 \\ x + 3y = 12 \end{cases} \rightarrow 10x = 15 \rightarrow x = \frac{3}{2} \rightarrow C\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

El punt de tall de les dues rectes amb l'eix d'abscisses és:

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A\left(\frac{1}{3}, 0\right) \quad \text{i} \quad \begin{cases} x + 3y = 12 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow B(12, 0)$$

- d) Considerem el triangle de base $\overline{AB}$ i la seva altura. La base val:

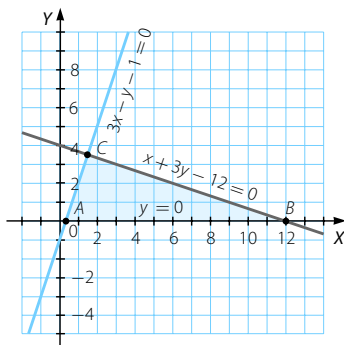
$$\text{base} = d(A, B) = \frac{35}{3}$$

i l'altura és

$$h = d(C, r_{AB}) = \frac{7}{2}$$

per tant, l'àrea val

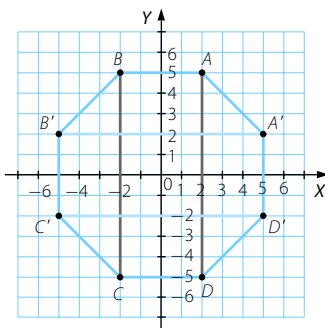
$$S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{35}{3} \cdot \frac{7}{2} \right) = \frac{275}{12} \text{ u}^2$$



105

Els punts de coordenades $(5, 2)$, $(-5, 2)$, $(-5, -2)$ i $(5, -2)$ són els vèrtexs d'un rectangle, i els punts $(2, 5)$, $(-2, 5)$, $(-2, -5)$ i $(2, -5)$ són vèrtexs d'un altre rectangle. Dibuixa els vuit punts i uneix-los per formar un octàgon.

- a) És isògon?
b) És regular?
c) Escriu l'equació dels costats de l'octàgon.
d) Calcula'n l'àrea.



- a) Tots els angles són iguals i valen 135° ; així doncs, és un polígon isògon.
b) No és regular ja que els costats no tenen la mateixa longitud:

$$AB = B'C' = CD = D'A' = 4 \quad \text{i} \quad BB' = C'C = DD' = A'A = 3\sqrt{2}$$

- c) Equació dels costats:

$$AB: y = 5 \quad BB': y - 5 = x + 2$$

$$CD: y = -5 \quad DD': y + 5 = x - 2$$

$$B'C': x = -5 \quad CC': y + 5 = -(x + 2)$$

$$A'D': x = 5 \quad AA': y - 5 = -(x - 2)$$

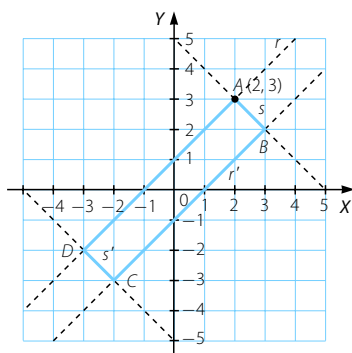
- d) Àrea: És la suma de rectangles i triangles, però també es pot calcular com la diferència entre el quadrat de costat 10 i 4 triangles d'altura 3 i base 3:

$$\text{Àrea} = 10 \times 10 - 4 \left(\frac{3 \times 3}{2} \right) = 100 - 18 = 82 \text{ u}^2$$

La recta en el pla

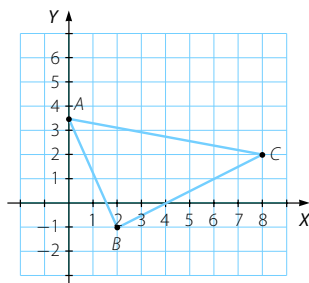
106 Considera el punt $A(2, 3)$.

- Dibuixa un rectangle el centre del qual sigui l'origen de coordenades i un dels vèrtexs sigui el punt A de manera que l'equació d'un dels costats que passa per aquest vèrtex tingui pendent 1.
 - Esbrina les coordenades dels altres tres vèrtexs.
 - Calcula l'equació dels quatre costats.
 - Calcula l'àrea del rectangle.
- a) Primer hem d'esbrinar el punt simètric de $A \rightarrow C(-2, -3)$ i l'equació del costat $AD: y - 3 = 1(x - 2) \rightarrow x - y - 1 = 0$. La gràfica del rectangle és la següent:



- Les coordenades que falten són $B(3, 2)$ i $D(-3, -2)$.
- A més de la recta $l_{AD}: x - y - 1 = 0$, les altres són $l_{BC}: y - 2 = x - 3 \rightarrow x - y + 1 = 0$
 $l_{AB}: y - 3 = (-1)(x - 2) \rightarrow x + y - 5 = 0$
 $l_{DC}: y + 2 = (-1)(x + 3) \rightarrow x + y + 5 = 0$
- L'àrea del rectangle serà $A = d(A, B) \times d(B, C) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{50} = 10 \text{ u}^2$.

107 Demosta si el triangle de la figura és un triangle rectangle o no i calcula'n l'àrea.



Per saber si és rectangle, l'angle B ha de ser $90^\circ \leftrightarrow$ el producte escalar dels vectors $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$ ha de ser 0.

$$\begin{matrix} A\left(0, \frac{7}{2}\right) \\ B(2, -1) \end{matrix} \left\{ \overrightarrow{BA} = \left(-2, \frac{9}{2}\right) \text{ i } \begin{matrix} C(8, 2) \\ B(2, -1) \end{matrix} \right\} \overrightarrow{BC} = (6, 3)$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-2) \cdot 6 + \frac{9}{2} \cdot 3 = -12 + \frac{27}{2} \neq 0$$

per tant, no és un triangle rectangle.

$$\text{L'àrea és } S = \frac{1}{2}(b \cdot h) = \frac{1}{2}(d(B, C) \cdot d(A, r_{BC}))$$

$$\text{Tenim } d(B, C) = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5} \text{ u i } r_{BC}: \frac{x-8}{6} = \frac{y-2}{3} \rightarrow x-2y-4=0$$

$$d(A, r_{BC}) = \frac{\left|0 - 2 \cdot \frac{7}{2} - 4\right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{11}{\sqrt{5}}$$

$$\text{L'àrea: } S = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{5} \cdot \frac{11}{\sqrt{5}}\right) = \frac{33}{2} \text{ u}^2$$

PREPARA LA SELECTIVITAT

(Activitats de Selectivitat)

- 1 Segui r la recta d'equació $3x - 5y + 2 = 0$. Troba les equacions de les rectes paral·lela i perpendicular a r que passen pel punt $(-15, 4)$.

Paral·lela: $3x - 5y + k = 0 \xrightarrow{(-15, 4) \in r} 3(-15) - 5 \cdot 4 + k = 0 \rightarrow k = 65$; així doncs, $r: 3x - 5y + 65 = 0$.

Perpendicular: El vector director serà el normal a $\vec{d}_r = (5, 3) \rightarrow \vec{n} = (-3, 5)$; per tant, la recta serà: $s: \frac{x+15}{-3} = \frac{y-4}{5} \rightarrow 5x + 3y + 63 = 0$.

- 2 Determina el valor de a perquè la recta $x - 2ay = 1$ i la recta $x + 3y = 8$ siguin:

a) Paral·leles.

b) Perpendiculars.

$$\text{a) Paral·leles: } \frac{1}{1} = \frac{-2a}{3} \rightarrow -2a = 3 \rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

b) Perpendiculars:

$$\vec{u}_r \perp \vec{u}_s \rightarrow \vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = 0 \rightarrow (2a, 1) \cdot (-3, 1) = -6a + 1 = 0 \rightarrow a = \frac{1}{6}$$

- 3 Considera els punts del pla $A(2, -1)$ i $B(0, 3)$ i la recta r d'equació $x + y - 2 = 0$. Calcula les coordenades d'un punt C de r que estigui alineat amb A i B .

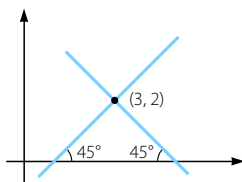
Serà un punt $C(c_1, c_2) \in r \xrightarrow{y=2-x} C(c_1, 2-c_1)$.

Els punts A, B i C han d'estar alineats:

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC} \rightarrow (-2, 4) \parallel (c_1, -1-c_1) \rightarrow \frac{-2}{c_1} = \frac{4}{-1-c_1} \rightarrow c_1 = 1 \rightarrow C(1, 1)$$

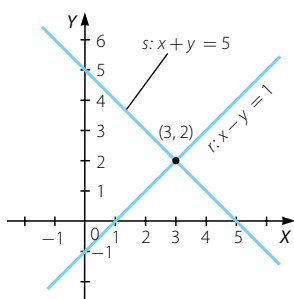
La recta en el pla

- 4 Escriu l'equació de les dues rectes que passen pel punt $(3, 2)$ i formen un angle de 45° amb l'eix de les x tal com s'indica en el dibuix següent:



Recta r : $\begin{cases} A(3, 2) \\ m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \end{cases} \rightarrow y - 2 = 1(x - 3) \rightarrow x - y = 1$

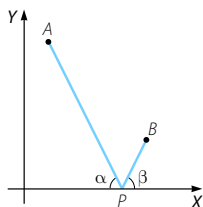
Recta s : $\begin{cases} A(3, 2) \\ m = \operatorname{tg} (-45^\circ) = -1 \end{cases} \rightarrow y - 2 = (-1)(x - 3) \rightarrow x + y = 5$



- 5 L'eix OX representa la banda d'una taula de billar. Una bola que està situada al punt $A(1, 6)$ ha de tocar una bola situada al punt $B = (5, 2)$ després d'haver rebotat a la banda (quan una bola de billar rebotja a la banda, els angles α i β de la figura són iguals).

Determina:

- El punt exacte P on la bola hauria de tocar amb la banda.
- L'equació de la trajectòria inicial que ha de seguir la bola.
- L'equació de la trajectòria que segueix la bola després d'haver topat amb la banda, fins a tocar la bola en el punt B .
- L'angle entre les trajectòries AP i PB .



- a) Busquem el punt B' simètric a B respecte de l'eix d'abscisses: $B'(5, -2)$. Els punts $A(1, 6)$, $P(x, 0)$ i $B'(5, -2)$ han d'estar alineats, o sigui que

$$\frac{x-1}{5-1} = \frac{0-6}{-2-6} \rightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{6}{8} \rightarrow x = 4$$

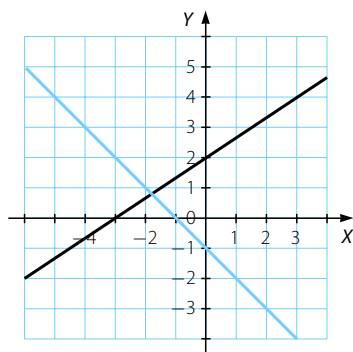
El punt és $P(4, 0)$.

b) Equació: $r_{AP}: \frac{x-4}{3} = \frac{y-0}{-6} \rightarrow 2x + y = 8$

c) Equació: $r_{PB}: \frac{x-4}{1} = \frac{y-0}{2} \rightarrow 2x - y = 8$

d) Angle: $\cos \gamma = \frac{\vec{PA} \cdot \vec{PB}}{|\vec{PA}| \cdot |\vec{PB}|} = \frac{(-3) \cdot 1 + 6 \cdot 2}{\sqrt{42} \sqrt{5}} = \frac{9}{\sqrt{210}} \rightarrow \gamma = 51^\circ 36' 23''$

- 6 Cadascuna de les rectes del gràfic passa, almenys, per dos punts de coordenades enters.



- a) Troba les equacions de les dues rectes.

- b) Determina el punt d'intersecció P .

- a) Agafem l'equació segmentària de cada recta:

$$r: \begin{cases} A(-3, 0) \\ B(0, 2) \end{cases} \rightarrow \frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1 \rightarrow 2x - 3y = -6$$

$$s: \begin{cases} C(-1, 0) \\ D(0, -1) \end{cases} \rightarrow \frac{x}{-1} + \frac{y}{-1} = 1 \rightarrow x + y = -1$$

- b) Punt de tall:

$$\begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ x + y = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = -6 \\ 3x + 3y = -3 \end{cases} \rightarrow 5x = -9 \rightarrow x = -\frac{9}{5} \rightarrow P\left(-\frac{9}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

LITERATURA I MATEMÀTIQUES

Viatge a Laputa

Vaig sol·licitar permís al rei per anar a veure les curiositats de Laputa. Me'l va concedir de bon grat i va ordenar al meu preceptor que m'acompanyés. El que més m'interessava saber era a quin principi natural o tècnic devia l'illa la seva capacitat de moviments. A continuació n'ofereixo un informe filosòfic al lector. [...]

En virtut de la força magnètica d'aquesta pedra, l'illa s'eleva, descendeix i es trasllada d'un cantó a l'altre, perquè un dels costats de l'imant està dotat de poder d'atracció i l'altre de repulsió respecte de la part del planeta on s'estenen els dominis del monarca. Col·locant-lo en posició erecta amb el pol d'atracció encarat cap a terra, l'illa descendeix; però quan és l'altre extrem el que es dirigeix cap a baix, la força repulsiva la fa pujar cap amunt. Quan la posició de la pedra és obliqua, el moviment de l'illa també ho és, perquè les forces d'aquest imant sempre actuen en paral·lel a la seva direcció.

Amb el moviment de translació obliqua, l'illa recorre les diferents parts del domini reial. Per explicar aquest sistema de desplaçament, traçarem una línia imaginària AB que dividirà el territori de Balnibarbi per la meitat. Amb c d representarem l'imant, on d serà el pol d'atracció i c el de repulsió, i situarem l'illa al punt C . Posem ara la pedra en posició c d amb el pol de repulsió cap a baix i tindrem que l'illa experimentarà un moviment d'ascensió oblic vers el punt D . Quan hagi arribat a D , farem girar la pedra sobre el seu eix fins que el pol d'atracció ens quedi encarat al punt E : l'illa es traslladarà obliquament cap a E . Si aleshores tornem a fer girar la pedra sobre el seu eix fins a obtenir la posició EF , amb el pol de repulsió cap a baix, l'illa s'eleva obliquament cap a F . Des d'aquest punt, dirigim el pol d'atracció cap a B i podrem desplaçar l'illa a G . De G podem passar a H , fent girar la pedra de manera que l'extrem repulsiu miri cap a baix. I així, canviant l'orientació de la pedra d'acord amb cada necessitat, l'illa es fa pujar i baixar alternativament en direcció obliqua, i amb aquesta combinació de moviments ascendants i descendents (l'obliquïtat és de poca consideració) va passant d'una part a l'altra de l'imperi.

Cal dir, però, que aquesta illa no es pot moure més enllà de l'extensió dels dominis de terra ferma i que no es pot elevar a una altura de més de 6.436 metres. [...]

JONATHAN SWIFT

Sistemes d'inequacions lineals

ABANS DE COMENÇAR... RECORDA

001 Calcula tres valors de x que siguin solució d'aquestes inequacions:

a) $x + 5 < -2$ b) $\frac{x}{2} - 4 \geq 0$ c) $-3x - 2 \leq 3$

a) Tres solucions són: $x = -8$, $x = -9$ i $x = -10$

b) Tres solucions són: $x = 10$, $x = 12$ i $x = 14$

c) Tres solucions són: $x = 0$, $x = 1$ i $x = 2$

002 Resol la inequació $\frac{1}{2}x - 4 \leq 3x + 1$. Raona els passos que fas per resoldre-la.

Si resollem l'equació associada $\frac{x}{2} - 4 = 3x + 1$, obtenim $x = -2$, que divideix

la recta real en dos intervals: $(-\infty, -2)$ i $(-2, +\infty)$. Els punts de $(-2, +\infty)$, com també el punt -2 , verifiquen la inequació donada; així doncs, la solució és $[-2, +\infty)$.

003 Calcula les solucions d'aquests sistemes d'inequacions:

a) $\left. \begin{array}{l} x + 3 > 5 \\ 2x - 1 > 11 \end{array} \right\}$ b) $\left. \begin{array}{l} 15 + 7x \geq 8 \\ 3x < 14x + 6 \end{array} \right\}$

a) $\left. \begin{array}{l} x + 3 > 5 \rightarrow x > 2 \\ 2x - 1 > 11 \rightarrow x > 6 \end{array} \right\}$

Així doncs, la solució del sistema d'inequacions és $(6, +\infty)$.

b) $\left. \begin{array}{l} 15 + 7x \geq 8 \rightarrow x \geq -1 \\ 3x < 14x + 6 \rightarrow x > \frac{-6}{11} \end{array} \right\}$

Per tant, la solució del sistema d'inequacions és $\left(\frac{-6}{11}, +\infty\right)$.

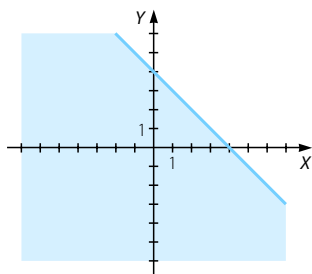
ACTIVITATS

001 Dibuixa la regió del pla que determinen les solucions de les següents inequacions lineals amb dues incògnites:

a) $x + y < 4$ b) $2x + 3y > -2$ c) $x - 3y \leq 0$ d) $-x - y \geq -2$

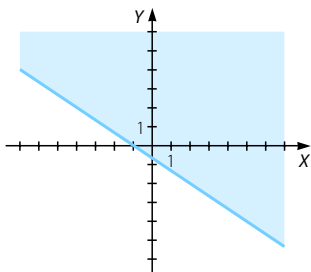
a) $x + y = 4 \rightarrow$ Recta que talla els eixos en els punts $(4, 0)$ i $(0, 4)$.

Els punts de la regió inferior, sense incloure-hi la recta, verifiquen la inequació.



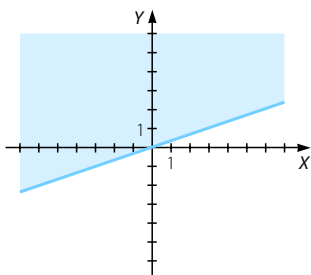
- b) $2x + 3y = -2 \rightarrow$ Recta que talla els eixos en els punts $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$ i $(-1, 0)$.

Els punts de la regió superior, sense incloure-hi la recta, verifiquen la inequació.



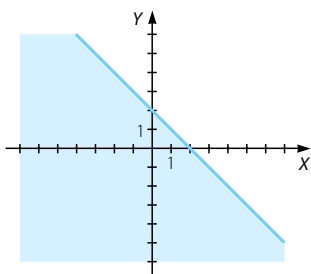
- c) $x - 3y = 0 \rightarrow$ Recta que talla els eixos en els punts $(0, 0)$ i passa per $(3, 1)$.

Els punts de la regió superior, sense incloure-hi la recta, verifiquen la inequació.



- d) $-x - y = -2 \rightarrow$ Recta que talla els eixos en els punts $(0, 2)$ i $(2, 0)$.

Els punts de la regió inferior, sense incloure-hi la recta, verifiquen la inequació.

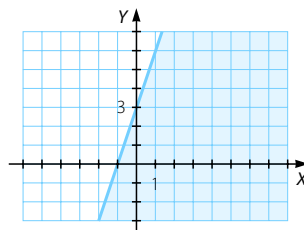


002

Determina inequacions les solucions de les quals són aquestes regions del pla:

Recta que passa per $(0, 3)$ i $(-1, 0) \rightarrow y = 3x + 3$

Com que el punt $(0, 0)$ es troba a la regió, deduïm que $y \leq 3x + 3$. També val qualsevol inequació equivalent a la donada.



Sistemes d'inequacions lineals

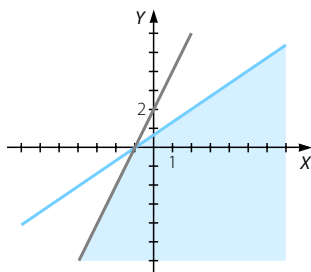
003 Resol aquests sistemes d'inequacions de dues inequacions i dues incògnites.

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} -2x + y \leq 2 \\ 2x - 3y \geq -2 \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} -x + 2y \leq 4 \\ 2x - 4y \leq 1 \end{array} \right\} \end{array}$$

a) $-2x + y = 2 \rightarrow$ Recta que talla els eixos en $(-1, 0)$ i $(0, 2)$.

$2x - 3y = -2 \rightarrow$ Recta que talla els eixos en $(-1, 0)$ i $\left(0, \frac{2}{3}\right)$.

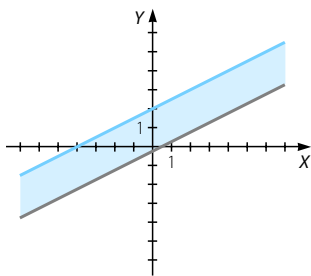
El punt $(0, 0)$ verifica les dues inequacions. La solució del sistema està formada per la regió del pla limitada per les dues rectes (incloent-ne els punts) i que conté aquest punt.



b) $-x + 2y = 4 \rightarrow$ Recta que talla els eixos en els punts $(0, 2)$ i $(-4, 0)$.

$2x - 4y = 1 \rightarrow$ Recta que talla els eixos en $\left(0, \frac{-1}{4}\right)$ i $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

El punt $(0, 0)$ verifica les dues inequacions. La solució del sistema està formada per la regió del pla limitada per les dues rectes (incloent-ne els punts) i que conté aquest punt.



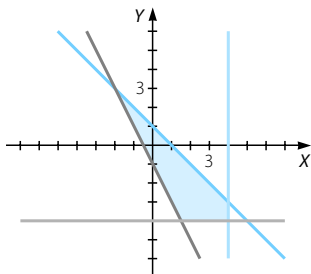
004 Resol el sistema d'inequacions lineals següent:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 1 \\ -2x - y \leq 1 \\ x \leq 4 \\ y \geq -4 \end{array} \right\}$$

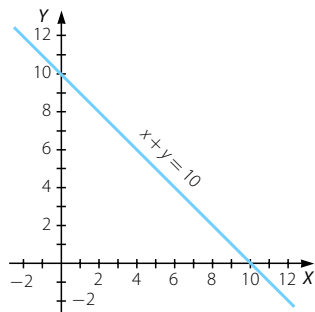
Representem les rectes associades:

$x + y = 1$; $-2x - y = 1$; $x = 4$; $y = -4$.

El punt $(0, 0)$ verifica les quatre inequacions; així doncs, la solució està formada per la regió del pla delimitada per les quatre rectes i que conté el punt $(0, 0)$.

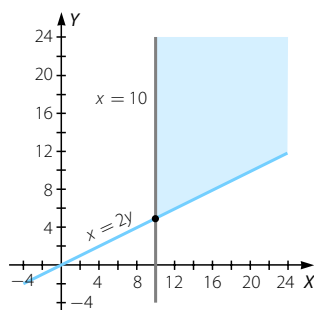


005 Donada la funció $f(x, y) = x + y$, dibuixa en el pla la recta solució que surt per al valor $f(x, y) = 10$.



- 006 Representa gràficament la regió del pla que és solució del conjunt de restriccions següent:

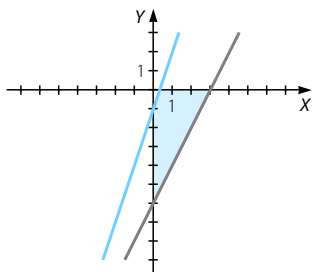
$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 2y \\ x \geq 10 \end{array} \right\}$$



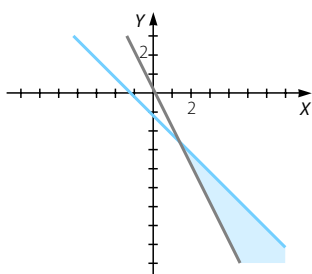
- 007 Dibuixa la regió factible que representen aquestes restriccions:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \left. \begin{array}{l} 3x - y \geq 1 \\ 2x - y < 6 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{array} \right\} & \text{b) } \left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 1 \\ -x - y > 6 \\ x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

- a) Representem les rectes associades a les inequacions: $3x - y = 1$; $2x - y = 6$; $x = 0$; $y = 0$. Si impossem les condicions del sistema d'inequacions, obtenim una regió factible acotada de vèrtexs $A(0, -1)$; $B(0, -6)$; $C(3, 0)$ i $D\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

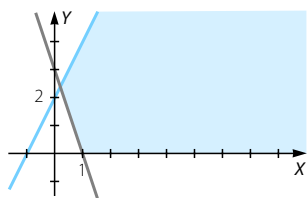


- b) Representem les rectes associades a les inequacions: $2x + y = 1$; $-x - y = 6$; $x = 0$; $y = 0$. Obtenim una regió factible no acotada que té com a vèrtex el punt d'intersecció de les rectes $2x + y = 1$ i $-x - y = 6 \rightarrow (7, -13)$.



Sistemes d'inequacions lineals

008 Determina les restriccions que representen la regió factible següent:



Recta que passa per (1, 0) i (0, 3) $\rightarrow y = -3x + 3$

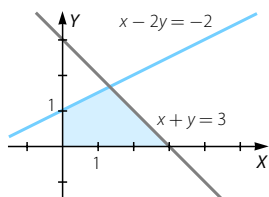
Inequació que no conté el punt (0, 0) $\rightarrow y \geq -3x + 3$

Recta que passa per (-1, 0) i (0, 2) $\rightarrow y = 2x + 2$

Inequació que conté el punt (0, 0) $\rightarrow y \leq 2x + 2$

Les restriccions que determinen aquesta regió són:
$$\begin{cases} y \geq -3x + 3 \\ y \leq 2x + 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

009 Determina els vèrtexs de la regió següent:

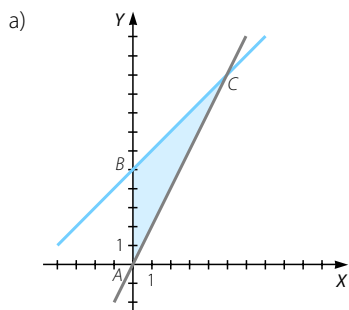


Vèrtexs: (0, 0), (0, 1) i (3, 0), i el punt solució del sistema:
$$\begin{cases} x - 2y = -2 \\ x + y = 3 \end{cases} \rightarrow \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

010 Troba els vèrtexs de les regions factibles que representen aquestes restriccions:

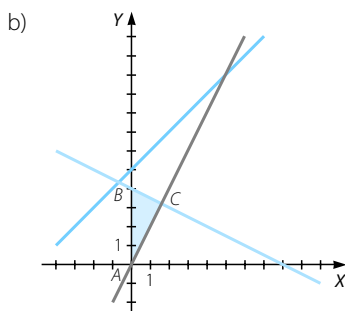
$$\text{a) } \begin{cases} x - y > -5 \\ 2x - y \leq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y > -5 \\ 2x - y \leq 0 \\ x + 2y \leq 8 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$



Vèrtexs: A(0, 0); B(0, 5) i C, que és la solució del sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \rightarrow C(5, 10)$$

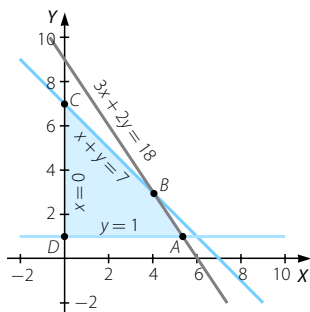


Vèrtexs: $A(0, 0)$; $B(0, 4)$ i C , que és la solució del sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \rightarrow C\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

- 011 Calcula els punts que fan la funció $f(x, y) = x + y$ màxima i mínima en relació al conjunt de restriccions següents:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1 \\ 3x + 2y \leq 18 \\ x + y \leq 7 \end{cases}$$



Calculem el valor de la funció en cadascun dels vèrtexs:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow A\left(\frac{16}{3}, 1\right) \rightarrow f\left(\frac{16}{3}, 1\right) = \frac{19}{3}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 18 \\ x + y = 7 \end{cases} \rightarrow B(4, 3) \rightarrow f(4, 3) = 7$$

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow C(0, 7) \rightarrow f(0, 7) = 7$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow D(0, 1) \rightarrow f(0, 1) = 1$$

El mínim s'aconsegueix en el punt $D(0,1)$ i el màxim s'aconsegueix en qualsevol punt del segment $\overline{BC}$.

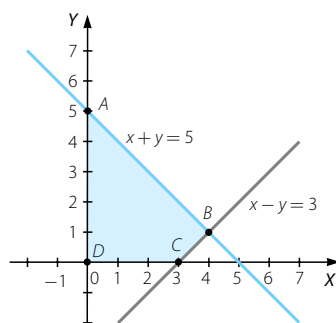
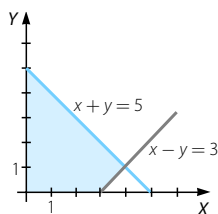
Sistemes d'inequacions lineals

- 012 Troba la solució òptima que maximitza la funció $f(x, y) = x + 2y$ en la regió factible següent:

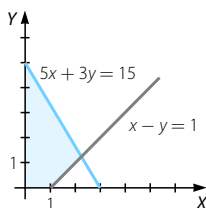
Trobem els punts de tall i el valor de la funció en aquests punts:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x + y = 5 \end{array} \right\} &\rightarrow A(0, 5) \rightarrow f(A) = 0 + 2 \cdot 5 = 10 \\ \left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{array} \right\} &\rightarrow B(4, 1) \rightarrow f(B) = 4 + 2 \cdot 1 = 6 \\ \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ x - y = 3 \end{array} \right\} &\rightarrow C(3, 0) \rightarrow f(C) = 3 + 2 \cdot 0 = 3 \\ \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right\} &\rightarrow D(0, 0) \rightarrow f(D) = 0 + 2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Per tant, el màxim s'aconsegueix en el punt $A(0, 5)$.



- 013 Determina la solució òptima que maximitza la funció $f(x, y) = 2x - y$ en aquesta regió factible:

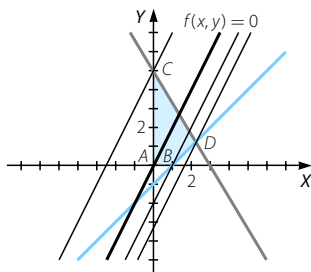


Com que la regió factible està acotada, el màxim s'aconseguirà en un dels vèrtexs. Si tracem rectes paral·leles a la funció objectiu que passin pels vèrtexs, comprovem que el màxim s'aconsegueix

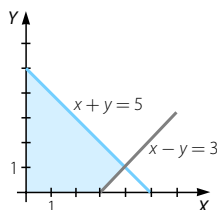
en el vèrtex $D\left(\frac{9}{4}, \frac{5}{4}\right)$, que és la solució

del sistema d'equacions:
$$\begin{cases} 5x + 3y = 15 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

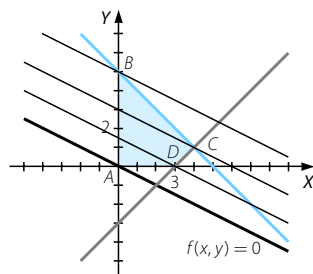
El valor del màxim és: $2 \cdot \frac{9}{4} - \frac{5}{4} = \frac{13}{4}$



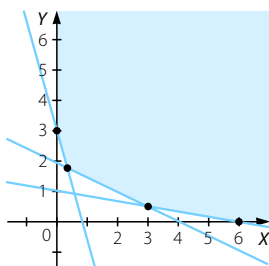
- 014 Troba la solució òptima que maximitza la funció $f(x, y) = x + 2y$ en la regió factible següent:



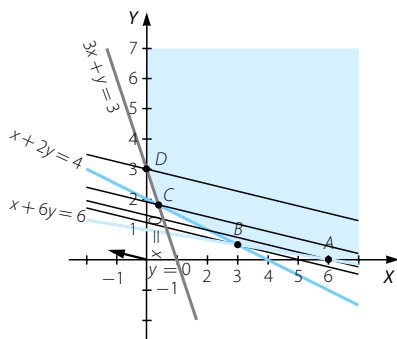
Com que la regió factible està acotada, el màxim s'aconseguirà en un dels vèrtexs. Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin per cadascun dels vèrtexs, observem que el màxim s'aconsegueix en el vèrtex $B(0, 5)$ i val: $0 + 2 \cdot 5 = 10$



- 015 Donada la funció $f(x, y) = x - 4y$, calcula, mitjançant els feixos de rectes paral·leles a la funció, el punt que l'optimitza en la regió factible següent:



A la gràfica hem representat les cinc rectes que defineixen la regió factible.



Els punts de tall són els següents:

$$\begin{cases} x + 6y = 6 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A(6, 0) \rightarrow f(6, 0) = 6 + 4 \cdot 0 = 6$$

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + 6y = 6 \end{cases} \rightarrow B\left(3, \frac{1}{2}\right) \rightarrow f\left(3, \frac{1}{2}\right) = 3 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow C\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right) \rightarrow f\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right) = \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{9}{5} = \frac{38}{5} = 7,3$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x + y = 3 \end{cases} \rightarrow D(0, 3) \rightarrow f(0, 3) = 0 + 4 \cdot 3 = 12$$

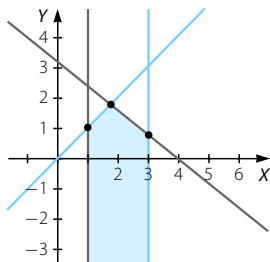
També hem dibuixat les rectes paral·leles a la funció $f(x, y) = x - 4y$ que passen pels quatre vèrtexs.

El valor mínim de la funció a la regió factible s'obté en el punt $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$ i no hi ha màxim.

Sistemes d'inequacions lineals

016

Considera la funció $f(x, y) = x + y$. Calcula, mitjançant els feixos de rectes paral·leles a la funció, el punt que l'optimitza en la regió factible següent:



A la gràfica hem representat les quatre rectes que defineixen la regió factible.

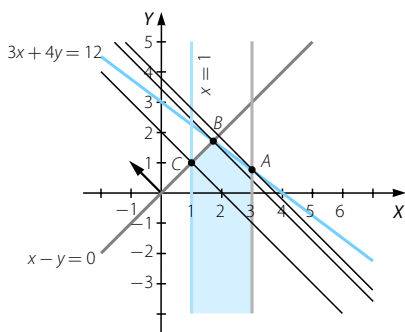
Els punts de tall són els següents:

$$\begin{cases} x = 3 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases} \rightarrow A\left(3, \frac{3}{4}\right) \rightarrow f\left(3, \frac{3}{4}\right) = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases} \rightarrow B\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right) \rightarrow f\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right) = \frac{12}{7} + \frac{12}{7} = \frac{24}{7}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x - y = 0 \end{cases} \rightarrow C(1, 1) \rightarrow f(1, 1) = 1 + 1 = 2$$

També hem dibuixat les rectes paral·leles a la funció que passen pels tres vèrtexs.



El valor màxim de la funció a la regió factible s'obté en el punt $A\left(3, \frac{3}{4}\right)$ i no hi ha mínim.

017

Comprova que el punt $(2, 3)$ pertany al semiplà determinat per la inequació:

$$3x - 2y \leq 1$$

Troba les coordenades de dos punts més de la mateixa regió del pla.

El punt $(2, 3)$ pertany al semiplà determinat per $3x - 2y \leq 1$ perquè $3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0 \leq 1$.

Per tant, $(0, 0)$ i $(-1, 0)$ són dos punts de la mateixa regió del pla.

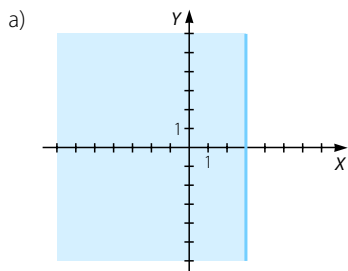
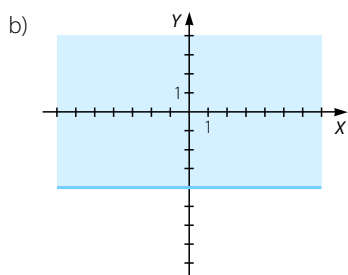
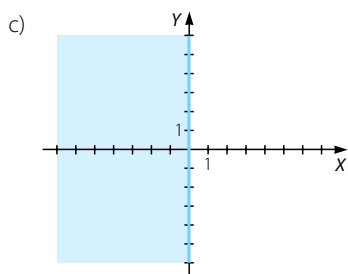
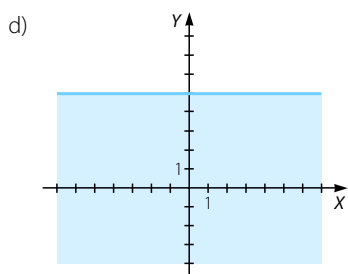
018 Resol gràficament les inequacions:

a) $x \leq 3$

b) $y > -4$

c) $x < 0$

d) $y \leq 5$

La recta $x = 3$ forma part de la solució.La recta $y = -4$ no forma part de la solució.La recta $x = 0$ no forma part de la solució.La recta $y = 5$ forma part de la solució.

Sistemes d'inequacions lineals

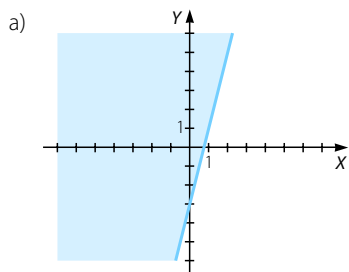
019 Resol les següents inequacions lineals amb dues incògnites.

a) $4x - y < 3$

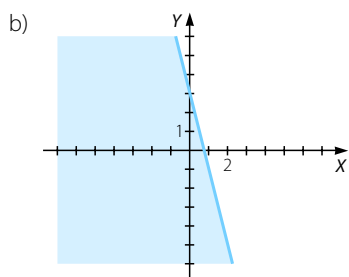
b) $4x + y \leq 3$

c) $-4x - y \geq 3$

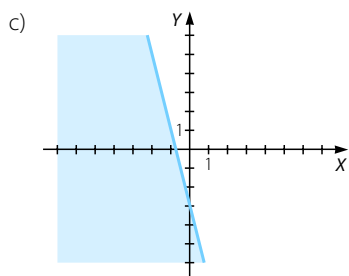
d) $-4x + y > 3$



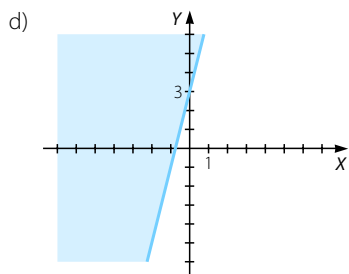
La recta $4x - y = 3$ no forma part de la solució.



La recta $4x + y = 3$ forma part de la solució.



La recta $-4x - y = 3$ forma part de la solució.



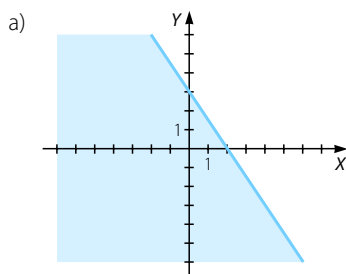
La recta $-4x + y = 3$ no forma part de la solució.

020

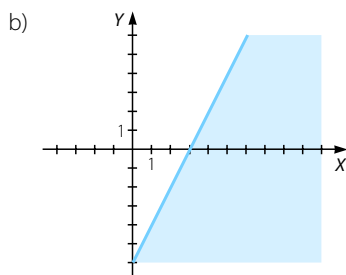
Resol gràficament aquestes inequacions:

a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leq 1$

b) $\frac{2x - y}{3} > 2$



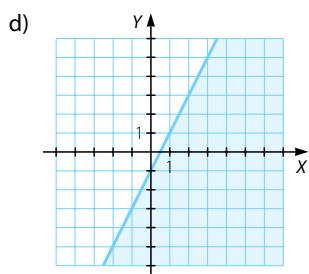
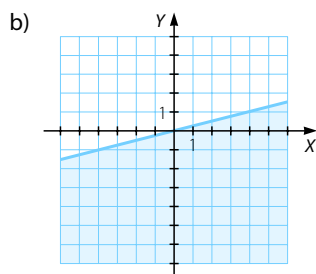
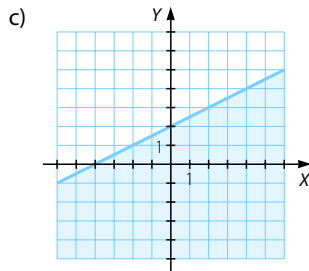
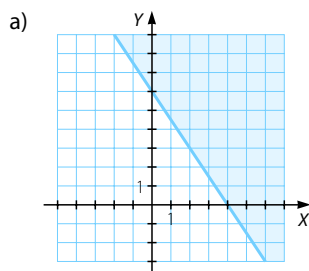
La recta $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ forma part de la solució.



La recta $2x - y = 6$ no forma part de la solució.

021

Determina les inequacions que tenen com a solucions els semiplans següents:



Sistemes d'inequacions lineals

- a) Recta que passa per (4, 0) i (0, 6) $\rightarrow y = \frac{-3}{2}x + 6$. La regió de punts no conté el punt (0, 0); així doncs, la inequació és $y \geq \frac{-3}{2}x + 6$.
- b) Recta que passa per (0, 0) i (4, 1) $\rightarrow y = \frac{1}{4}x$. La regió de punts conté el punt (0, -1); així doncs, la inequació és $x \geq 4y$.
- c) Recta que passa per (0, 2) i (-4, 0) $\rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$. La regió de punts conté el punt (0, 0); així doncs, la inequació és $2y \leq x + 4$.
- d) Recta que passa per (1, 1) i (0, -1) $\rightarrow y = 2x - 1$. La regió de punts no conté el punt (0, 0); així doncs, la inequació és $y \leq 2x - 1$.

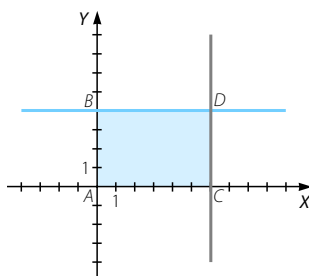
022 Resol els sistemes d'inequacions següents:

$$\left. \begin{array}{l} a) \ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 6 \\ y \leq 4 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} d) \ x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 4y \leq 12 \\ x - 5y \geq 10 \end{array} \right\}$$

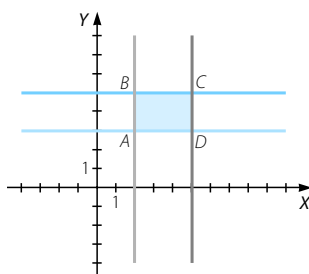
$$\left. \begin{array}{l} b) \ x \geq 2 \\ y \geq 3 \\ x \leq 5 \\ y \leq 5 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} e) \ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2y - x \leq 4 \\ x + y \geq 8 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} c) \ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 6 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} f) \ x \geq 0 \\ x + 3y \geq 0 \\ x - y \leq 7 \end{array} \right\}$$

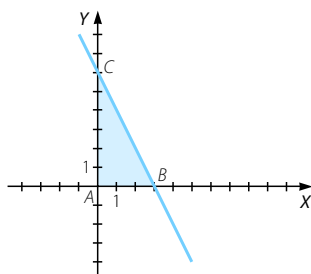
- a) El sistema d'inequacions té com a solució la regió del pla que té de vèrtexs A(0, 0); B(0, 4); C(6, 0) i D(6, 4). Els segments de recta que uneixen els vèrtexs formen part de la solució.



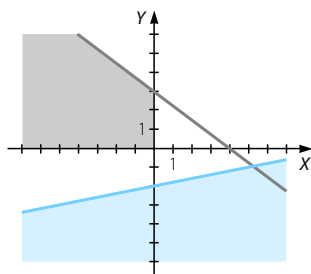
- b) El sistema d'inequacions té com a solució la regió del pla que té de vèrtexs A(2, 3); B(2, 5); C(5, 5) i D(5, 3). Els segments de recta que uneixen els vèrtexs formen part de la solució.



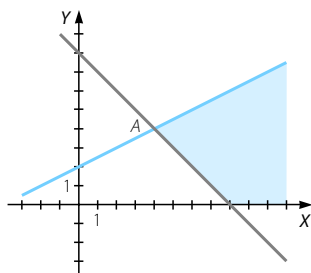
- c) El sistema d'inequacions té com a solució la regió del pla que té de vèrtexs $A(0, 0)$; $B(3, 0)$ y $C(6, 0)$. Els segments de recta que uneixen els vèrtexs formen part de la solució.



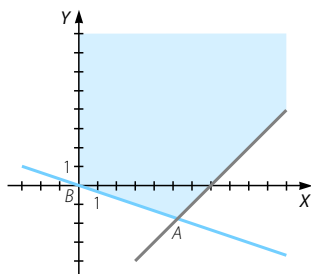
- d) Com que $x \leq 0$ i $y \geq 0$, ens trobem al segon quadrant. I com que $3x + 4y \leq 12$ i $x - 5y \geq 10$ no tenen punts comuns en aquest quadrant, resulta que el sistema d'inequacions no té solució.



- e) El sistema d'inequacions té com a solució la regió del pla que formen els punts del primer quadrant situats a la part inferior de $2x - y = 4$ i a la part superior de $x + y = 8$. El punt A, intersecció de les dues rectes, és $(4, 4)$. Els segments de recta també formen part de la solució.



- f) El sistema d'inequacions té com a solució la regió de punts no acotada limitada a la part superior per la recta $x = 0$ i a la part inferior per les rectes $x + 3y = 0$ i $x - y = 7$. Els vèrtexs són $A\left(\frac{21}{4}, \frac{7}{4}\right)$ i $B(0, 0)$. Els segments de recta també formen part de la solució.



023

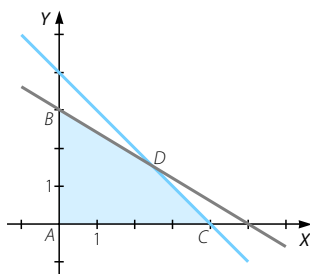
Troba les regions del pla determinades pels sistemes d'inequacions i indica, en cada cas, si són acotades o no.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + 5y \leq 15 \\ x + y \leq 4 \end{array} \right\}$$

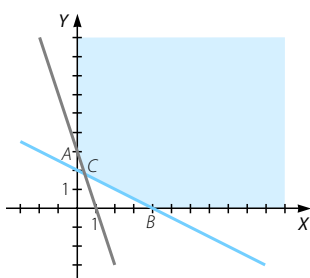
$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \geq 3 \\ x + 2y \geq 4 \end{array} \right\}$$

Sistemes d'inequacions lineals

- a) La regió del pla que obtenim està acotada i té com a vèrtexs $A(0, 0)$; $B(0, 3)$; $C(4, 0)$ i $D\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, que és la intersecció de les rectes $3x + 5y = 15$ i $x + y = 4$. Els segments de recta que uneixen els vèrtexs també formen part de la regió.



- b) La regió del pla que obtenim no està acotada per la part superior i té com a vèrtexs $A(0, 3)$; $B(4, 0)$ i $C\left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5}\right)$, que és el punt d'intersecció de les rectes $3x + y = 3$ i $x + 2y = 4$. Els segments de recta que delimiten la regió també en formen part.



024 Representa gràficament la regió determinada per aquest sistema d'inequacions. Hi sobra alguna inequació?

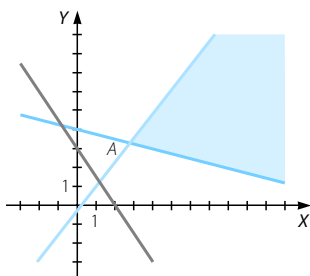
$$\left. \begin{array}{l} x + 4y \geq 16 \\ 9x - 7y \geq 2 \\ 3x + 2y \geq 6 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La solució no està acotada per la dreta

i té un únic vèrtex: $A\left(\frac{120}{43}, \frac{142}{43}\right)$,

que és la intersecció de les rectes $x + 4y = 16$ i $9x - 7y = 2$. Està limitada per la part superior per la recta $9x - 7y = 2$ i per la part inferior, per la recta $x + 4y = 16$. Els segments de recta que delimiten la regió també en formen part.

La inequació $3x + 2y \geq 6$ no influeix en la solució.

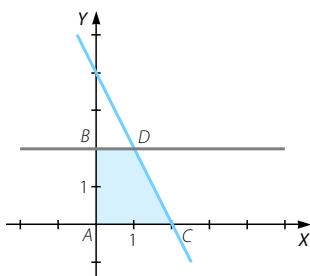


025 Dibuixa la regió del pla definida per les inequacions

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ \text{següents: } 0 \leq y \leq 2 \\ y + 2x \leq 4 \end{array} \right\}$$

(Activitat de Selectivitat)

La solució està determinada per la regió del pla limitada pels vèrtexs $A(0, 0)$; $B(0, 2)$; $C(2, 0)$ i $D(1, 2)$. Els segments de recta que uneixen aquests vèrtexs també formen part de la solució.

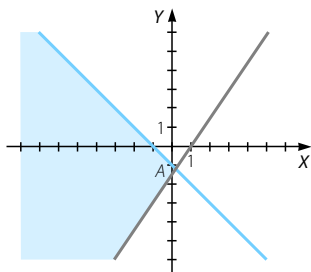


026 Representa la regió solució del sistema d'inequacions lineals següent:

$$\begin{cases} 3x - 2y \leq 3 \\ x + y \leq -1 \end{cases}$$

Determina tres punts d'abscissa $x = -2$ i ordenada entera que siguin solució del sistema.

(Activitat de Selectivitat)



La solució no està acotada per l'esquerra i té un únic vèrtex: $A\left(\frac{1}{5}, \frac{-6}{5}\right)$,

que és la intersecció de les rectes $3x - 2y = 3$ i $x + y = -1$.

Està limitada per la part superior per la recta $x + y = -1$ i per la part inferior, per la recta $3x - 2y = 3$. Els segments de recta també formen part de la regió.

Tres punts d'abscissa $x = -2$ i ordenada entera són: $(-2, -1)$; $(-2, -2)$ i $(-2, -3)$.

027 Considera el sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ x + y \geq 5 \\ x - 5y \leq 0 \end{cases}$$

a) Soluciona'l gràficament.

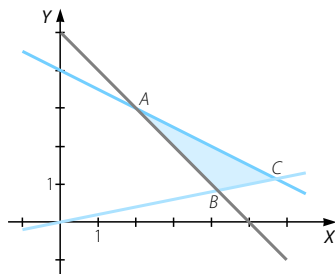
b) Troba'n totes les solucions enteres.

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \rightarrow A(2, 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + y = 5 \\ x - 5y = 0 \end{cases} \rightarrow B\left(\frac{25}{6}, \frac{5}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + 2y = 8 \\ x - 5y = 0 \end{cases} \rightarrow C\left(\frac{40}{7}, \frac{8}{7}\right) \end{aligned}$$



La solució del sistema d'inequacions és la regió del pla limitada pels vèrtexs A , B i C .

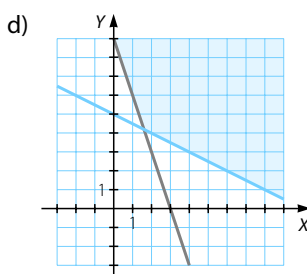
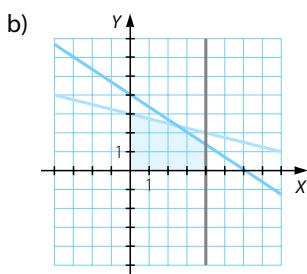
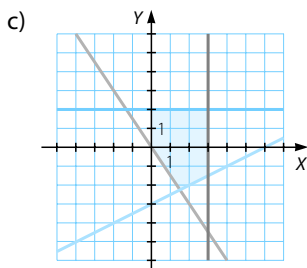
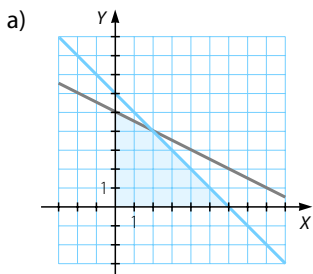
Els segments de recta que uneixen els vèrtexs també formen part de la regió.

b) Les solucions enteres d'aquest sistema són $(4, 1)$; $(3, 2)$; $(2, 3)$; $(4, 2)$ i $(5, 1)$.

Sistemes d'inequacions lineals

028

Determina un sistema d'inequacions per a cada solució representada en aquestes gràfiques:



- a) Les equacions de les dues rectes són $x + y = 6$ i $x + 2y = 10$. El sistema d'inequacions que dona lloc a la regió ombrejada és:

$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 6 \\ x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Les equacions de les tres rectes són $x = 4$; $x + 4y = 12$ i $3y + 2x = 12$. El sistema d'inequacions que dona lloc a la regió ombrejada és:

$$\left. \begin{array}{l} x + 4y \leq 12 \\ 2x + 3y \leq 12 \\ 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \end{array} \right\}$$

- c) Les equacions de les quatre rectes són $x = 3$; $y = 2$; $x - 2y = 6$ i $2y + 3x = 0$. El sistema d'inequacions que dona lloc a la regió ombrejada és:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 3 \\ 2 \geq y \\ x - 2y \leq 6 \\ 2y + 3x \geq 0 \end{array} \right\}$$

- d) Les equacions de les dues rectes són $3x + y = 9$ i $x + 2y = 10$. El sistema d'inequacions que dona lloc a la regió ombrejada és:

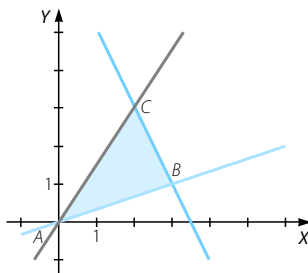
$$\left. \begin{array}{l} 3x + y \geq 9 \\ x + 2y \geq 10 \end{array} \right\}$$

- 029 Determina un sistema d'inequacions que tingui com a conjunt de solucions l'interior i els costats del triangle del pla amb vèrtexs $(0, 0)$, $(2, 3)$ i $(3, 1)$.

(Activitat de Selectivitat)

- Recta que passa per $(0, 0)$ i $(2, 3) \rightarrow 3x - 2y = 0$
- Recta que passa per $(0, 0)$ i $(3, 1) \rightarrow x - 3y = 0$
- Recta que passa per $(3, 1)$ i $(2, 3) \rightarrow 2x + y = 7$

La regió factible que dona el triangle és:



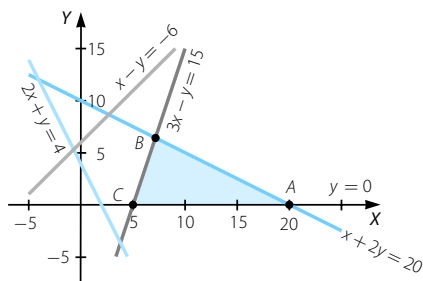
El sistema d'inequacions que dona lloc a la regió factible és:

$$\begin{cases} 2x + y \leq 7 \\ x - 3y \leq 0 \\ 3x - 2y \geq 0 \end{cases}$$

- 030 Representa gràficament el conjunt de punts que verifiquen el sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \geq 4 \\ 3x - y \geq 15 \\ x + 2y \leq 20 \\ x - 1 \geq -6 \end{cases}$$

Calcula els vèrtexs de la regió.



Els punts de tall són:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 0 \\ x + y = 20 \end{cases} &\rightarrow A(20, 0) & \begin{cases} 3x - y = 15 \\ x + 2y = 20 \end{cases} &\rightarrow B\left(\frac{50}{7}, \frac{45}{7}\right) & \begin{cases} 3x - y = 15 \\ y = 0 \end{cases} &\rightarrow C(5, 0) \end{aligned}$$

Sistemes d'inequacions lineals

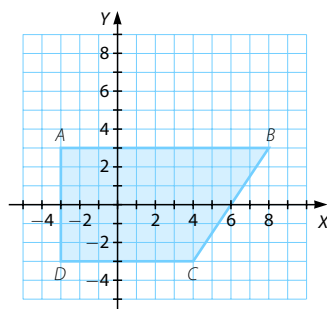
031 Escriu les inequacions que defineixen el recinte de la figura següent:

Les rectes estan determinades per aquests punts:

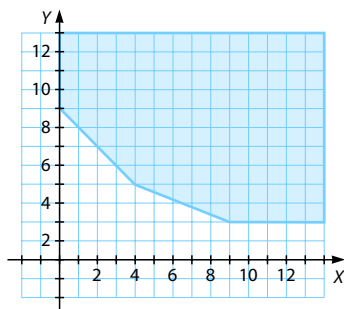
$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} A(-3, 3) \\ B(8, 3) \end{array} \right\} \rightarrow r_{AB}: y = 3 \\ & \left. \begin{array}{l} B(8, 3) \\ C(4, -3) \end{array} \right\} \rightarrow r_{BC}: 3x - 2y = 18 \\ & \left. \begin{array}{l} C(4, -3) \\ D(-3, -3) \end{array} \right\} \rightarrow r_{CB}: y = -3 \\ & \left. \begin{array}{l} D(-3, -3) \\ A(-3, 3) \end{array} \right\} \rightarrow r_{DA}: x = -3 \end{aligned}$$

El sistema d'inequacions és el següent:

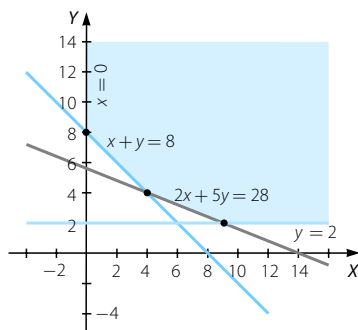
$$\begin{cases} y \leq 3 \\ 3x - 2y \leq 18 \\ y \geq -3 \\ x \geq -3 \end{cases}$$



032 Escriu el sistema d'inequacions que defineixen el recinte d'aquesta figura:



Les rectes que defineixen la regió són les següents:



l el sistema és:

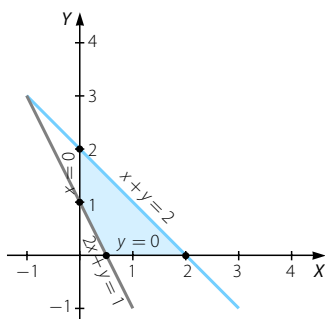
$$\begin{cases} y \leq 3 \\ 3x - 2y \leq 18 \\ y \geq -3 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

- 033 Dibuixa la regió del pla formada pels punts (x, y) que compleixen les desigualtats següents:

$$\begin{cases} y \leq 3 \\ 3x - 2y \leq 18 \\ y \geq -3 \\ x \geq -3 \end{cases}$$

(Explica detalladament per què el dibuix que has fet correspon a la regió demanada.)

(Activitat de Selectivitat)



- 034 a) Escriu l'equació a de les tres rectes del pla que limiten la regió puntejada del dibuix.
b) Escriu les tres desigualtats que determinen aquesta regió.

(Activitat de Selectivitat)

- a) Equacions de les rectes

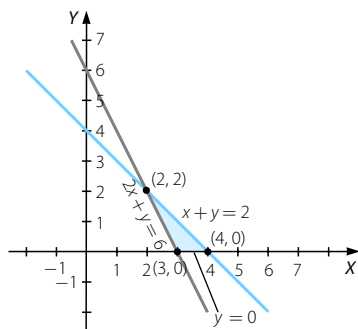
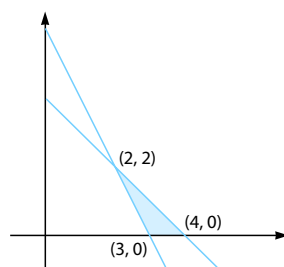
$$\begin{matrix} A(2, 2) \\ B(3, 0) \end{matrix} \left\} \rightarrow r_{AB}: 2x + y = 6$$

$$\begin{matrix} B(3, 0) \\ C(4, 0) \end{matrix} \left\} \rightarrow r_{BC}: y = 0$$

$$\begin{matrix} C(4, 0) \\ A(2, 2) \end{matrix} \left\} \rightarrow r_{CA}: x + y = 4$$

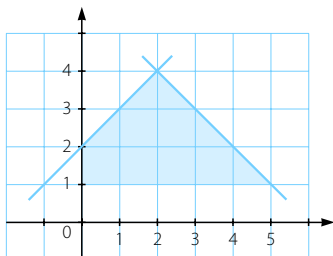
- b) Sistema d'inequacions:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ x + y \leq 4 \\ 2x + y \leq 6 \end{cases}$$



Sistemes d'inequacions lineals

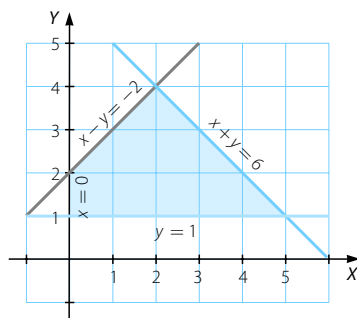
- 035 Determina el sistema de quatre inequacions amb dues incògnites que té per solució el polígon ombrejat dibuixat a la gràfica següent, suposant que els costats també són solució.



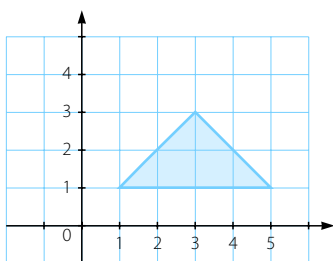
(Activitat de Selectivitat)

Sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 1 \\ x - y \geq -2 \\ x + y \leq 6 \end{cases}$$



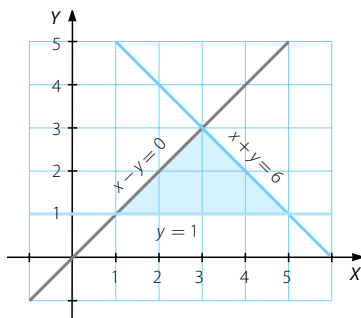
- 036 Determina el sistema de tres inequacions i dues incògnites que té per solució el triangle assenyalat en la gràfica següent, suposant que els costats del triangle també formen part de la solució.



(Activitat de Selectivitat)

Sistema:

$$\begin{cases} y \geq 1 \\ x - y \geq 0 \\ x + y \leq 6 \end{cases}$$



- 037 Troba un sistema d'inequacions que tingui com a conjunt de solucions l'interior i els costats del triangle de vèrtexs $(0, 1)$, $(2, 0)$ i $(3, 4)$.

(Activitat de Selectivitat)

Busquem les rectes:

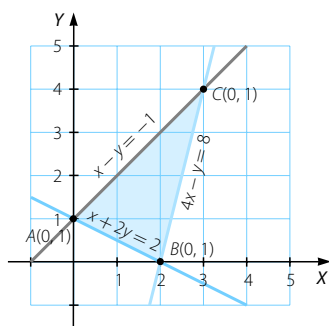
$$\begin{matrix} A(0, 1) \\ B(2, 0) \end{matrix} \left\} \rightarrow r_{AB}: y = x + 2y = 2$$

$$\begin{matrix} B(2, 0) \\ C(3, 4) \end{matrix} \left\} \rightarrow r_{BC}: 4x - y = 8$$

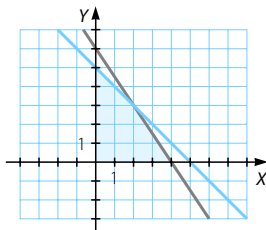
$$\begin{matrix} C(3, 4) \\ A(0, 1) \end{matrix} \left\} \rightarrow r_{CA}: x - y = -1$$

Sistema:

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ 4x - y \leq 8 \\ x - y \geq -1 \end{cases}$$



- 038 Considera la regió factible següent:



Troba els punts en els quals les funcions agafen els valors màxims.

- a) $f(x, y) = 3x + y$ b) $f(x, y) = x + 2y - 1$ c) $f(x, y) = 3x + 2y - 1$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(0, 0)$; $B(4, 0)$; $C(2, 3)$ i $D(0, 5)$.

- Com que $f(A) = 0$; $f(B) = 12$; $f(C) = 9$ i $f(D) = 5$, el màxim s'aconsegueix en el punt B i val 12.
- Com que $f(A) = -1$; $f(B) = 3$; $f(C) = 7$ i $f(D) = 9$, el màxim s'aconsegueix en el punt D i val 9.
- Com que $f(A) = -1$; $f(B) = 11$; $f(C) = 11$ i $f(D) = 9$, el màxim s'aconsegueix en els punts B i C i en tots els del segment BC , i val 11.

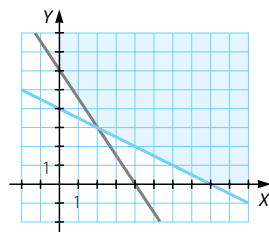
Sistemes d'inequacions lineals

- 039 Calcula els punts de la regió on s'assoleix el valor mínim d'aquestes funcions.

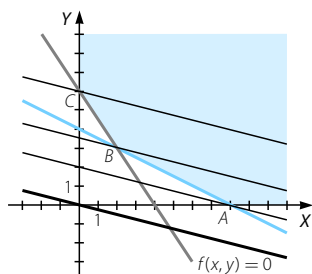
a) $f(x, y) = x + 4y$

b) $f(x, y) = x + y + 4$

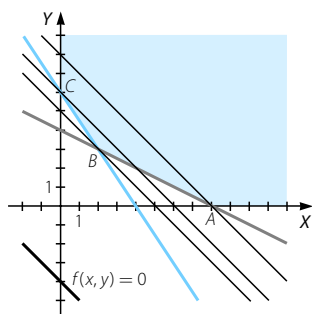
La regió factible no està acotada i té com a vèrtexs $A(8, 0)$; $B(2, 3)$ i $C(0, 6)$.



- a) Si tracem paral·leles a la funció objectiu $f(x, y) = x + 4y$, que passin pels vèrtexs, comprovem que el mínim s'aconsegueix en $A(8, 0)$ i val 8.



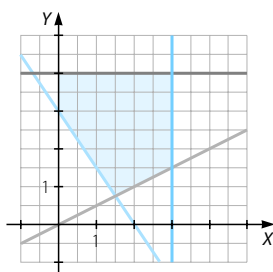
- b) Si tracem paral·leles a la funció objectiu $f(x, y) = x + y + 4$, que passin pels vèrtexs, comprovem que el mínim s'aconsegueix en $B(2, 3)$ i val 9.



- 040 Donada la regió factible, determina el màxim i el mínim de les funcions següents:

a) $f(x, y) = 2x + y$

b) $f(x, y) = 3x + 2y - 3$



La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$; $B\left(3, \frac{3}{2}\right)$; $C(3, 4)$; $D(0, 4)$ i $E(0, 3)$.

a) Si substituïm els vèrtexs a la funció objectiu, obtenim que $f(A) = \frac{15}{4}$; $f(B) = \frac{15}{2}$; $f(C) = 10$; $f(D) = 4$ i $f(E) = 3$, per tant, el màxim s'aconsegueix en C i val 10, i el mínim s'aconsegueix en E i val 3.

b) Si substituïm els vèrtexs a la funció objectiu, obtenim que $f(A) = 3$; $f(B) = 9$; $f(C) = 14$; $f(D) = 5$ i $f(E) = 3$, així doncs, el màxim s'aconsegueix en C i val 14, i el mínim s'aconsegueix en A i E , per tant, en tots els punts del segment AE , i val 3

- 041 a) Representa gràficament la regió determinada per les restriccions següents:

$$2x + y \leq 6 \quad -x + y \leq 3 \quad 4x + y \leq 10 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

i determina'n els vèrtexs.

- b) Calcula el màxim de la funció $f(x, y) = 4x + 2y - 3$ en el recinte anterior i indica on s'assoleix.

(Activitat de Selectivitat)

- a) Regió factible acotada amb aquests vèrtexs:

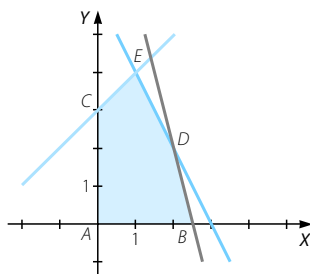
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A(0, 0)$$

$$\begin{cases} 4x + y = 10 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow B\left(\frac{10}{4}, 0\right)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -x + y = 3 \end{cases} \rightarrow C(0, 3)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 4x + y = 10 \end{cases} \rightarrow D(2, 2)$$

$$\begin{cases} -x + y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{cases} \rightarrow E(1, 4)$$



- b) Com que la regió factible està acotada, el màxim de la funció $f(x, y) = 4x + 2y - 3$ s'aconsegueix en un dels vèrtexs. I com que $f(A) = -3$; $f(B) = 7$; $f(C) = 3$; $f(D) = 9$ i $f(E) = 9$, el màxim s'aconsegueix en els vèrtexs D i E , per tant, en tots els punts del segment DE , i val 9.

Sistemes d'inequacions lineals

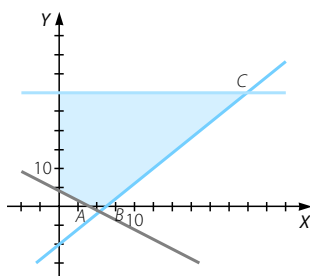
042 D'un problema de programació lineal es dedueixen les restriccions següents:

$$4x + 3y \geq 12 \quad y \leq 30 \quad x \leq \frac{10+y}{2} \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

- Representa gràficament la regió factible del problema i calcula'n els vèrtexs.
- Maximitza en aquesta regió factible la funció objectiu $F(x, y) = x + 3y$.
- El punt $(11, 10)$ pertany a la regió factible?

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left. \begin{aligned} 4x + 3y &= 12 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow A(3, 0) \\ & \left. \begin{aligned} 2x &= 10 + y \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow B(5, 0) \\ & \left. \begin{aligned} 2x &= 10 + y \\ y &= 30 \end{aligned} \right\} \rightarrow C(20, 30) \\ & \left. \begin{aligned} y &= 30 \\ x &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow D(0, 30) \\ & \left. \begin{aligned} 4x + 3y &= 12 \\ x &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow E(0, 4) \end{aligned}$$



- El màxim de la funció objectiu $F(x, y) = x + 3y$ s'aconsegueix en un dels vèrtexs. Com que $F(A) = 3$; $F(B) = 5$; $F(C) = 110$; $F(D) = 90$ i $F(E) = 12$, el màxim s'aconsegueix en C i té un valor de 110.
- El punt $(11, 10)$ no pertany a la regió factible.

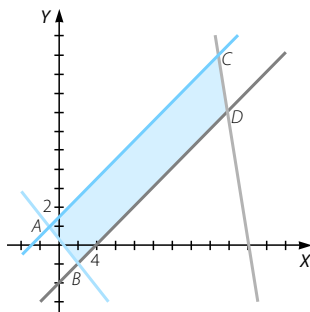
043 a) Troba els vèrtexs de la regió determinada per les inequacions següents:

$$3x + y \leq 60 \quad x - 2y \geq -3 \quad y \geq \frac{x}{2} - 2 \quad 2x + 3y \geq 1$$

- Calcula els punts de la regió on la funció $f(x, y) = 3x - 2y$ assoleix els valors màxim i mínim i determina'ls.

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left. \begin{aligned} x - 2y &= -3 \\ 2x + 3y &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow A(-1, 1) \\ & \left. \begin{aligned} 2y &= x - 4 \\ 2x + 3y &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow B(2, -1) \\ & \left. \begin{aligned} x - 2y &= -3 \\ 3x + y &= 60 \end{aligned} \right\} \rightarrow C\left(\frac{117}{7}, \frac{69}{7}\right) \\ & \left. \begin{aligned} x - 2y &= -3 \\ 3x + y &= 60 \end{aligned} \right\} \rightarrow D\left(\frac{124}{7}, \frac{48}{7}\right) \end{aligned}$$



- Com que la regió està acotada, el màxim i el mínim de la funció $f(x, y) = 3x - 2y$ s'aconsegueixen en els vèrtexs. I com que $f(A) = -5$; $f(B) = 8$; $f(C) = \frac{213}{7}$ i $f(D) = \frac{276}{7}$, el màxim s'aconsegueix en D i té un valor de $\frac{276}{7}$, i el mínim s'aconsegueix en A i té un valor de -5 .

- 044 Determina els valors màxim i mínim de la funció $z = 5x + 3y$ subjecta a les restriccions:

$$3x + y \geq 4 \quad x + y \leq 6 \quad 0 \leq y \leq 5 \quad x \leq 5$$

(Activitat de Selectivitat)

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs:

$$\begin{cases} 3x + y = 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A\left(\frac{4}{3}, 0\right)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 5 \end{cases} \rightarrow B(5, 0)$$

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x = 5 \end{cases} \rightarrow C(5, 1)$$

$$\begin{cases} y = 5 \\ x + y = 6 \end{cases} \rightarrow D(1, 5)$$

$$\begin{cases} y = 5 \\ 3x + y = 4 \end{cases} \rightarrow E\left(-\frac{1}{3}, 5\right)$$

$$f(A) = \frac{20}{3}$$

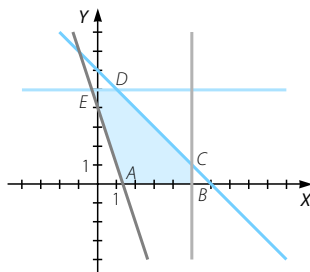
$$f(B) = 15$$

$$f(C) = 28$$

$$f(D) = 18$$

$$f(E) = \frac{40}{3}$$

El mínim s'aconsegueix en el vèrtex A i té un valor de $\frac{20}{3}$, i el màxim s'aconsegueix en C i té un valor de 28.



- 045 Considera el sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ x + y \geq 1 \\ 3x + y \leq 13 \end{cases}$$

a) Representa gràficament la regió factible.

b) Calcula el màxim de la funció $f(x, y) = x - 3y$ en aquesta regió.

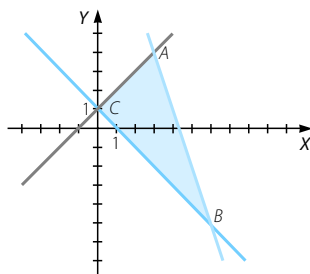
(Activitat de Selectivitat)

a) La regió factible està acotada i té com a vèrtexs els punts:

$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow A(3, 4)$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + y = 13 \end{cases} \rightarrow B(6, -5)$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow C(0, 1)$$



b) Substituïm els vèrtexs en la funció objectiu: $f(A) = -9$; $f(B) = 21$ i $f(C) = -3$. S'aconsegueix el màxim en el vèrtex B(6, -5) i té un valor de 21.

Sistemes d'inequacions lineals

- 046 Es vol minimitzar la funció lineal: $3x + 4y + 2(10 - x) + 3(18 - y)$ amb les restriccions:

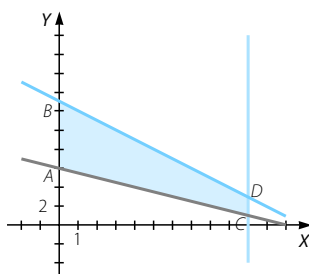
$$\begin{aligned} x &\geq 0 & y &\geq 0 & 10 - x &\geq 0 & 18 - y &\geq 0 \\ x + y &\leq 13 & (10 - x) + (18 - 2y) &\leq 16 \end{aligned}$$

Es demana:

- Representació gràfica del conjunt factible.
- Trobar les coordenades de tots els seus vèrtexs.
- Trobar totes les solucions òptimes.

(Activitat de Selectivitat)

- $(10 - x) + (18 - 2y) = 16 \rightarrow x + 2y = 12$
- Els vèrtexs són $A(0, 6)$; $B(0, 13)$; $C(10, 1)$ i $D(10, 3)$.
- Com que la regió factible està acotada, la funció objectiu aconsegueix les solucions òptimes en els vèrtexs. I com que $f(A) = 80$; $f(B) = 87$; $f(C) = 85$ i $f(D) = 87$, el mínim s'aconsegueix en A , i té un valor de 80, i el màxim s'aconsegueix en B i D i, per tant, el valor és 87.



- 047 Considerem el recinte pla limitat per les inequacions següents:

$$x - y \leq 4 \quad y + 2x \geq 7 \quad -2x - y + 13 \geq 0 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0$$

- Representa el recinte i calcula'n els vèrtexs.
- Troba en quins punts d'aquest recinte la funció $F(x, y) = 4x + 2y - 1$ assoleix els valors màxim i mínim.

(Activitat de Selectivitat)

- La regió factible està acotada i té com a vèrtexs:

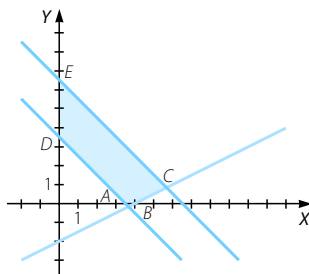
$$\begin{cases} y + 2x = 7 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A\left(\frac{7}{2}, 0\right)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - y = 4 \end{cases} \rightarrow B(4, 0)$$

$$\begin{cases} -2x - y + 13 = 0 \\ x - y = 4 \end{cases} \rightarrow C\left(\frac{17}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + 2x = 7 \end{cases} \rightarrow D(0, 7)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -2x - y + 13 = 0 \end{cases} \rightarrow E(0, 13)$$



- Com que la regió està acotada, les solucions màximes s'aconsegueixen en els vèrtexs. I com que $f(A) = 13$; $f(B) = 15$; $f(C) = 25$; $f(D) = 13$ i $f(E) = 25$, el màxim s'aconsegueix en C i E i, per tant, en tots els punts del segment CE , i té un valor de 25, i el mínim s'aconsegueix en els vèrtexs D i A i, per tant, el valor és 13.

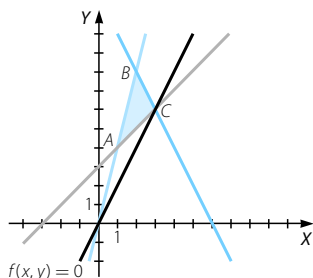
048 Representa el recinte definit per les inequacions:

$$0 \leq y \leq 4x \quad y \geq x + 3 \quad y + 2x - 12 \leq 0$$

i troba els valors màxim i mínim de la funció $F(x, y) = y - 2x$ en aquest recinte.

(Activitat de Selectivitat)

La regió està acotada per les rectes $y = 4x$; $y = x + 3$; $y + 2x - 12 = 0$, i té com a vèrtexs $A(1, 4)$; $B(2, 8)$ i $C(3, 6)$.



Com que $f(A) = 2$; $f(B) = 4$ i $f(C) = 0$, el màxim s'aconsegueix en B i val 4, i el mínim s'aconsegueix en C i val 0.

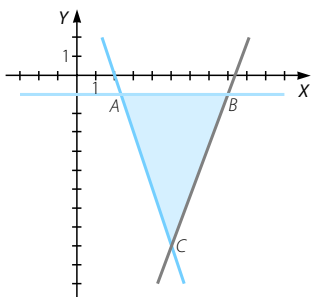
049 Considera $T = \{(x, y) / y + 3x \geq 6, y + 1 \leq 0, 8x - 3y \leq 67\}$ i $f(x, y) = 3y - 8x$.

a) Representa gràficament la regió T .

b) Calcula el valor màxim i el mínim, si existeixen, de la funció $f(x, y)$ en T i digues en quins punts s'assoleixen.

(Activitat de Selectivitat)

a) La regió T està acotada per les rectes $y + 3x = 6$; $y + 1 = 0$; $8x - 3y = 67$, i té com a vèrtexs $A\left(\frac{7}{3}, -1\right)$; $B(8, -1)$ i $C(5, -9)$. Els segments de recta que uneixen els vèrtexs també formen part de la solució.



b) Com que la regió factible està acotada, el màxim i el mínim de la funció objectiu s'aconsegueixen en els vèrtexs. I com que $f(A) = \frac{47}{3}$; $f(B) = -67$ i $f(C) = -67$, el màxim s'aconsegueix en el vèrtex A , amb valor $\frac{47}{3}$, i el mínim s'aconsegueix en els vèrtexs B i C i, per tant, en tots els punts del segment BC , i té valor -67 .

Sistemes d'inequacions lineals

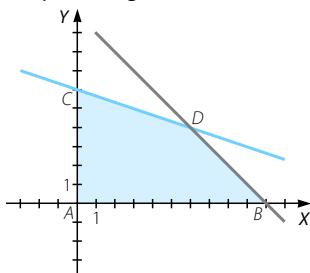
050 Considera el sistema d'inequacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 3y \leq 18 \\ x + y \leq 10 \end{array} \right\}$$

- Representa gràficament la regió de solucions.
- Determina el màxim de la funció $f(x, y) = 3x + 5y$ en aquesta regió i per a quins valors s'assoleix aquest màxim.
- Determina el màxim de la funció $f(x, y) = 3x + 3y$ en aquesta regió i per a quins valors s'assoleix.

(Activitat de Selectivitat)

- Es tracta d'una regió acotada, limitada per les rectes $x = 0$; $y = 0$; $x + 3y = 18$; $x + y = 10$, i té com a vèrtexs $A(0, 0)$; $B(10, 0)$; $C(0, 6)$ i $D(6, 4)$. Els punts dels segments de recta que uneixen els vèrtexs pertanyen a la solució del sistema d'inequacions.
- Com que la regió factible està acotada, el màxim de la funció objectiu $f(x, y) = 3x + 5y$ i s'aconsegueix en un dels vèrtexs. I com que $f(A) = 0$; $f(B) = 30$; $f(C) = 30$ i $f(D) = 38$, el màxim s'aconsegueix en D i té valor 38.
- Igual que a l'apartat anterior, la regió factible està acotada. Com que $f(A) = 0$; $f(B) = 30$; $f(C) = 18$ i $f(D) = 30$, el màxim s'aconsegueix en els punts B i D i, per tant, a tots els punts del segment BD . Té valor 33.



051 Considera la funció $f(x, y) = x - y$.

- Representa el conjunt:

$$A = \{(x, y) / 3x + y \geq 15, y - x \leq -5, 2x + 3y \leq 60, y \geq 0\}$$

i calcula el valor màxim de $f(x, y)$ en A . Es podria eliminar alguna de les desigualtats que defineixen el conjunt A de manera que encara fos el mateix conjunt?

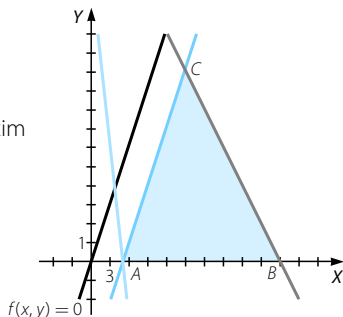
- Digues si la funció $f(x, y)$ assoleix valor màxim en el conjunt:

$$B = \{(x, y) / 3x + y \leq 15, x - y \geq 5, x \geq 0\}$$

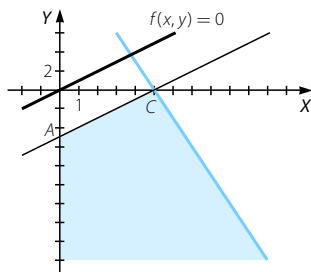
En cas afirmatiu, calcula aquest valor.

(Activitat de Selectivitat)

- El conjunt A està acotat i té com a vèrtexs $B(30, 0)$; $C(15, 10)$ i $D(5, 0)$. La funció $f(x, y) = x - y$ aconsegueix el màxim en algun dels vèrtexs. Com que $f(B) = 30$; $f(C) = 5$ i $f(D) = 5$, el màxim s'aconsegueix en B i val 30. Podem eliminar la inequació $3x + y \geq 15$, de manera que continuarem tenint el mateix conjunt.



- b) El conjunt B no està acotat i té com a vèrtexs $A(0, -5)$ i $C(5, 0)$. Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin per aquests vèrtexs, comprovem que la recta $x - y = 5$ passa per A i C, i obtenim en aquests vèrtexs el valor mínim. Així doncs, la funció objectiu no aconsegueix el màxim en el conjunt B.



052 En un problema de programació lineal, la regió de solucions és el quadrat de vèrtexs $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 3)$ i $(3, 1)$, i la funció objectiu és $B(x, y) = 3x + 2y$.

- a) Determina en quin punt la funció objectiu és màxima i quin és aquest valor màxim.
b) Dóna un conjunt d'inequacions que determini la regió de solucions.

(Activitat de Selectivitat)

- a) Com que el quadrat és una regió acotada, la funció objectiu aconseguirà els extrems en els vèrtexs. I com que $B(1, 1) = 5$; $B(1, 3) = 9$; $B(3, 3) = 15$ i $B(3, 1) = 11$, el màxim s'aconsegueix en el vèrtex $(3, 3)$ i val 15.
b) Les rectes que delimiten un quadrat de vèrtexs $(1, 1)$; $(1, 3)$; $(3, 3)$ i $(3, 1)$, són $x = 1$; $y = 1$; $x = 3$ i $y = 3$.

El sistema d'inequacions que dóna lloc a la regió interna

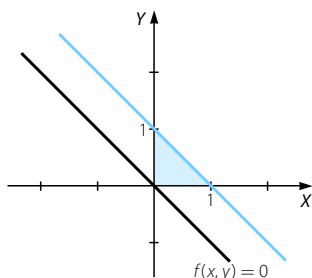
$$\text{del quadrat és: } \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

053 En un problema de programació lineal, la regió factible és el conjunt convex format pel triangle de vèrtexs: $(0, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, 0)$. La funció objectiu és paral·lela a la recta $x + y = 0$. Troba els punts en els quals la funció objectiu assoleix:

- a) El mínim. b) El màxim.

(Activitat de Selectivitat)

El triangle de vèrtexs $(0, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, 0)$ està limitat per les rectes $x = 0$; $y = 0$ i $x + y = 1$.



Si tracem paral·leles a $x + y = 0$ que passin pels vèrtexs, obtenim que el mínim s'aconsegueix en $(0, 0)$ i val 0, i el màxim s'aconsegueix en tots els punts del segment que uneix $(0, 1)$ i $(1, 0)$, i val 1.

Sistemes d'inequacions lineals

054 Sigui la funció $f(x, y) = ax + by$. Si es consideren les restriccions següents:

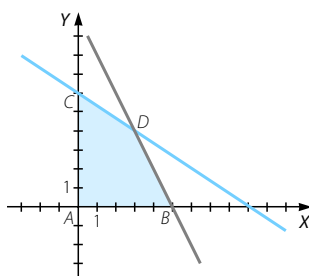
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 18 \\ 2x + y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

determina la relació que ha d'existir entre a i b perquè el màxim de la funció $f(x, y)$ s'assoleixi en el punt $(3, 4)$.

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(0, 0)$; $B(5, 0)$; $C(0, 6)$ i $D(3, 4)$.

Com que $f(A) = 0$; $f(B) = 5a$; $f(C) = 6b$ i $f(D) = 3a + 4b$, i situem el màxim en D , ha de passar que:

$$\left. \begin{array}{l} 3a + 4b \geq 0 \\ 3a + 4b \geq 5a \\ 3a + 4b \geq 6b \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 3a \geq -4b \\ 4b \geq 2a \\ 3a \geq 2b \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 2b \geq a \\ 3a \geq 2b \end{array} \right\} \rightarrow 3a \geq 2b \geq a$$

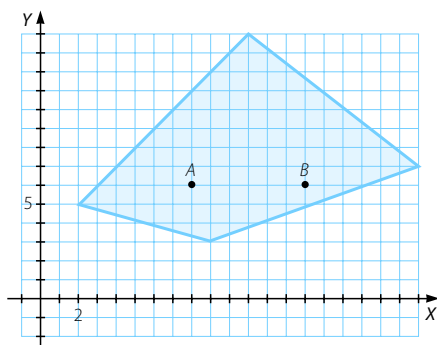


que és la relació que ens demanen per a a i b com a paràmetres positius.

Els casos següents no poden tenir lloc:

- a i b no poden ser 0, perquè no obtindríem una funció de la forma $ax + by$.
- a i b no poden tenir signes oposats, perquè la funció objectiu no aconseguiria el seu màxim en D .
- a i b no poden ser tots dos negatius, perquè no es compliria la primera de les restriccions anteriors.

055 La funció objectiu d'un problema de programació lineal és $f(x, y) = ax - by + c$, on a, b, c són nombres positius. Esbrina en quin dels dos punts A o B del gràfic la funció objectiu pren un valor més gran. Raona la resposta.



(Activitat de Selectivitat)

Com que la funció objectiu és $f(x, y) = ax - by + c$, amb a, b i c nombres positius, si substituïm els punts $A(8, 6)$ i $B(14, 6)$ comprovem que el màxim s'aconsegueix en B .

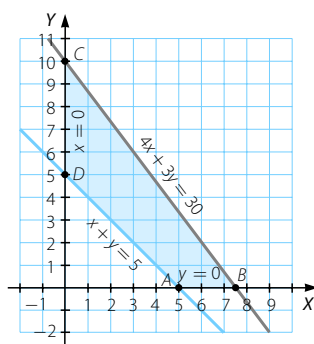
- 056 Representa gràficament la regió factible determinada per les desigualtats següents:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 5 \\ 4x + 3y \leq 30 \end{array} \right\}$$

Calcula la solució que fa mínima la funció objectiu $z = x + 2y$ sotmesa a les restriccions anteriors.

(Activitat de Selectivitat)

Gràfica de la regió factible:



Punts de tall:

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ x + y = 5 \end{array} \right\} \rightarrow A(5, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y = 30 \\ x = 0 \end{array} \right\} \rightarrow B\left(\frac{15}{2}, 0\right)$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y = 30 \\ x = 0 \end{array} \right\} \rightarrow C(0, 10)$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ x + y = 5 \end{array} \right\} \rightarrow D(0, 5)$$

Valors de la funció en els vèrtexs:

$$z = x + 2y \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} z(A) = 5 + 2 \cdot 0 = 5 \\ z(B) = \frac{15}{2} + 2 \cdot 0 = \frac{15}{2} \\ z(C) = 0 + 2 \cdot 10 = 20 \\ z(D) = 0 + 2 \cdot 5 = 10 \end{array} \right.$$

La funció $z = x + 2y$ es fa mínima en el punt $A(5, 0)$.

Sistemes d'inequacions lineals

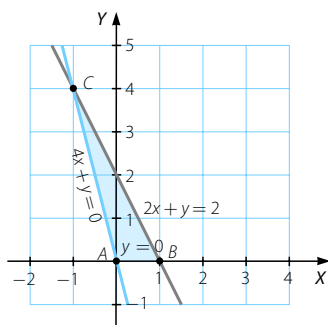
057 Dibuixa la regió del pla determinada per les desigualtats

$$\begin{cases} 2x + y \leq 2 \\ 4x + y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Calcula després el màxim de la funció $z = x + y$ en aquesta regió.

(Activitat de Selectivitat)

Gràfica de la regió:



Punts de tall:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases} \rightarrow A(0, 0)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow B(1, 0)$$

$$\begin{cases} 4x + y = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \rightarrow C(-1, 4)$$

Valors de la funció en els vèrtexs:

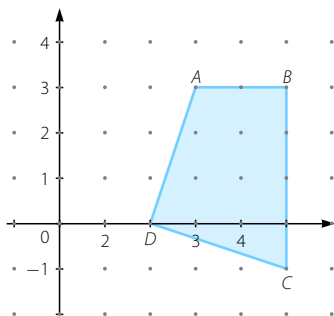
$$z = x + y \rightarrow \begin{cases} z(A) = 0 + 0 = 0 \\ z(B) = 1 + 0 = 1 \\ z(C) = -1 + 4 = 3 \end{cases}$$

La funció $z = x + y$ es fa màxima en el punt $C(-1, 4)$.

058 El quadrilàter $ABCD$ és la regió solució d'un sistema d'inequacions lineals. Els costats del quadrilàter també formen part de la regió solució.

- Troba el valor màxim i el mínim de la funció $F(x, y) = x + 3y$ en aquesta regió.
- En quins punts de la regió solució la funció de l'apartat anterior assoleix el màxim i en quins, el mínim?

(Activitat de Selectivitat)



a) Les rectes que defineixen el recinte són:

$$\begin{matrix} A(3, 3) \\ B(5, 3) \end{matrix} \left\} \rightarrow r_{AB}: y = 3$$

$$\begin{matrix} B(5, 3) \\ C(5, -1) \end{matrix} \left\} \rightarrow r_{BC}: x = 5$$

$$\begin{matrix} C(5, -1) \\ D(2, 0) \end{matrix} \left\} \rightarrow r_{CD}: x + 3y = 2$$

$$\begin{matrix} D(2, 0) \\ A(3, 3) \end{matrix} \left\} \rightarrow r_{DA}: 3x + y = 6$$

La funció agafa els valors òptims en punts del contorn del recinte.
Per tant, calculem el valor de la funció en aquests punts:

$$z = x + 3y \rightarrow \begin{cases} z(A) = 3 + 3 \cdot 3 = 12 \\ z(B) = 5 + 3 \cdot 3 = 14 \\ z(C) = 5 + 3 \cdot (-1) = 2 \\ z(D) = 2 + 3 \cdot 0 = 2 \end{cases}$$

Valor màxim: 14; valor mínim: 2.

b) Punts on s'obtenen els valors òptims:

Màxim: punt B .

Mínim: en qualsevol punt del segment CD .

059 Maximitza la funció $f(x, y) = 2x - 3y$ amb les restriccions:

$$x + 2y \leq 24$$

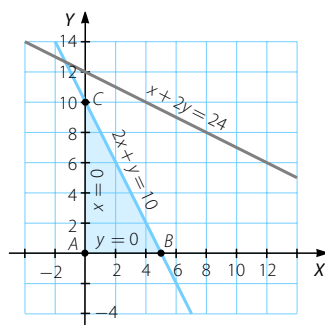
$$2x + y \leq 10$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

(Activitat de Selectivitat)

Gràfica de la regió definida per les restriccions:



Sistemes d'inequacions lineals

Punts de tall:

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} \rightarrow A(0, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 10 \\ y = 0 \end{array} \right\} \rightarrow B(5, 0)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 10 \\ x = 0 \end{array} \right\} \rightarrow C(0, 10)$$

Valor màxim de la funció:

$$z = 2x - 3y \rightarrow \begin{cases} z(A) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0 \\ z(B) = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 0 = 10 \\ z(C) = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 10 = -30 \end{cases}$$

El valor màxim s'obté en el punt $B(5, 0)$ i val 10.

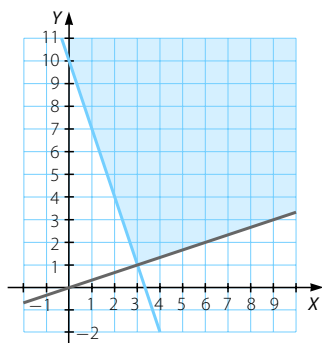
- 060 a) Determina la regió solució del sistema i el seu vèrtex:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y \geq 10 \\ x - 3y \leq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Calcula el valor de la funció $F(x, y) = x - 4y$ en el vèrtex i explica raonadament si correspon a un extrem de $F(x, y)$ i de quina classe és.

(Activitat de Selectivitat)

- a) Regió i vèrtex:



El vèrtex és el punt $P(3, 1)$.

- b) Tipus de valor: El valor de la funció en el punt $P(3, 1)$ és $F(3, 1) = 3 - 4 \cdot 1 = -1$. Com que serà un extrem, calculem el valor en un altre punt, per exemple en el punt $Q(5, 3) \rightarrow f(5, 3) = 5 - 4 \cdot 3 = -7$, que és més petit que en P ; així doncs, en el punt P s'aconsegueix el màxim de la funció $F(x, y) = x - 4y$.

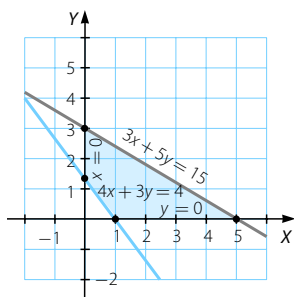
061 Calcula en quins punts de la regió determinada pel sistema d'inequacions

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 4x + 3y - 4 \geq 0 \\ 3x + 5y \leq 15 \end{cases}$$

la funció $F(x, y) = \frac{4x}{3} + y$ pren els seus valors màxim i mínim, i quins són aquests valors.

(Activitat de Selectivitat)

Gràfica de la regió definida per les inequacions:



Els punts de tall són:

$$\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow A(5, 0)$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 15 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow B(0, 3)$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow C\left(0, \frac{4}{3}\right)$$

$$\begin{cases} 4x + 3y = 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow D(1, 0)$$

Els valors de la funció en aquests punts són:

$$F(x, y) = \frac{4}{3}x + y \rightarrow \begin{cases} F(A) = \frac{20}{3} \\ F(B) = 3 \\ F(C) = \frac{4}{3} \\ F(D) = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Màxim: Punt $A(5, 0)$. Valor $\frac{20}{3}$.

Mínim: Segment: $\overline{CD}$. Valor: $\frac{4}{3}$.

Sistemes d'inequacions lineals

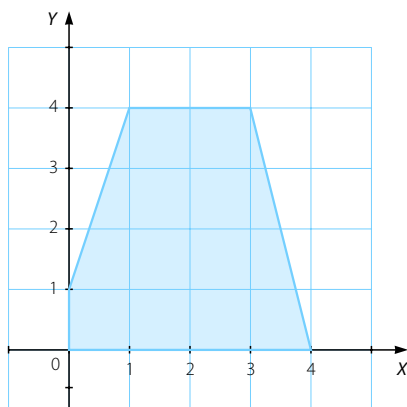
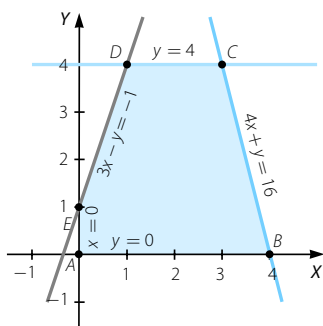
PREPARA LA SELECTIVITAT

(Activitats de Selectivitat)

- 1 Escriu un sistema de quatre inequacions (amb dues variables x i y) de tal manera que la regió del pla que determini aquest sistema sigui la regió ombrejada del dibuix següent:

Sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 4x + y \leq 16 \\ y \leq 4 \\ 3x - y \geq -1 \end{array} \right\}$$

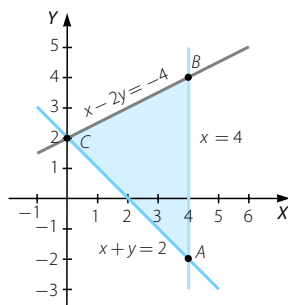


- 2 a) Representa gràficament la regió de solucions del sistema d'inequacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 4 \\ x + y \geq 2 \\ x - 2y + 4 \geq 0 \end{array} \right\}$$

- b) Calcula el mínim de la funció $F(x,y) = x - 2y$ en la regió solució del sistema anterior. En quins punts d'aquesta regió s'assoleix aquest mínim?

- a) Gràfica de la regió solució:



b) El mínim s'aconsegueix en punt del contorn de la regió. Calculem els vèrtexs:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 4 \\ x + y = 2 \end{cases} &\rightarrow A(4, -2) \\ \begin{cases} x = 4 \\ x + 2y = -4 \end{cases} &\rightarrow B(4, 4) \\ \begin{cases} x - 2y = -4 \\ x + y = 2 \end{cases} &\rightarrow C(0, 2) \end{aligned}$$

El valor de la funció en cada vèrtex:

$$F(x, y) = x - 2y \rightarrow \begin{cases} F(4, -2) = 4 - 2(-2) = 8 \\ F(4, 4) = 4 - 2 \cdot 4 = -4 \\ F(0, 2) = 0 - 2 \cdot 2 = -4 \end{cases}$$

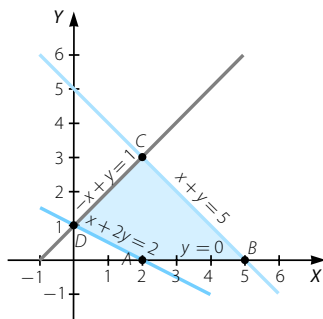
Així doncs, el mínim s'aconsegueix en qualsevol punt del segment $\overline{AC}$.

3 Dibuixa la regió del pla determinada pel sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ -x + y \leq 1 \\ x + 2y \geq 2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

i calcula el màxim de la funció $f(x, y) = 2x + 2y$ en aquesta regió.

Regió:



Punts de tall:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 0 \\ x + 2y = 2 \end{cases} &\rightarrow A(2, 0) \\ \begin{cases} y = 0 \\ x + y = 5 \end{cases} &\rightarrow B(5, 0) \\ \begin{cases} -x + y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases} &\rightarrow C(2, 3) \\ \begin{cases} -x + y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases} &\rightarrow D(0, 1) \end{aligned}$$

Sistemes d'inequacions lineals

El valor de la funció en cada vèrtex:

$$f(x, y) = 2x + 2y \rightarrow \begin{cases} F(2, 0) = 4 \\ F(5, 0) = 10 \\ F(2, 3) = 10 \\ F(0, 1) = 2 \end{cases}$$

Per tant, el màxim s'aconsegueix en qualsevol punt del segment $\overline{BC}$.

- 4 Troba els punts de la regió del dibuix on la funció $F(x, y) = 2x + 4y + 5$ pren el valor màxim i digues quin és aquest valor màxim.

El valor òptim d'una funció s'obté en un punt del contorn:

$$A(0, 0) \rightarrow F(0, 0) = 5$$

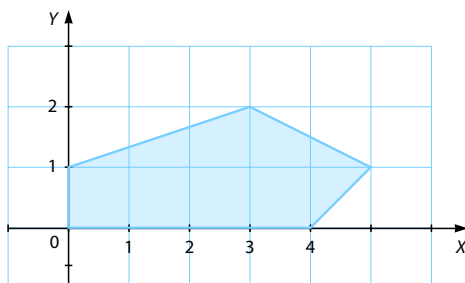
$$B(4, 0) \rightarrow F(4, 0) = 13$$

$$C(5, 1) \rightarrow F(5, 1) = 19$$

$$D(3, 2) \rightarrow F(3, 2) = 19$$

$$E(0, 1) \rightarrow F(0, 1) = 9$$

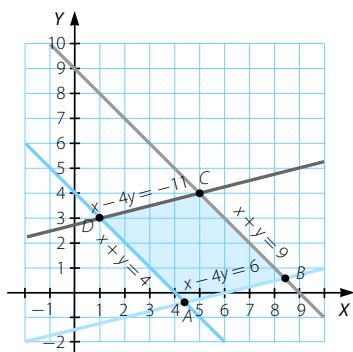
Per tant, el màxim de la funció s'obté en qualsevol punt del segment $\overline{CD}$.
i el seu valor és 19.



- 5 Considera el sistema d'inequacions següent:

$$\left. \begin{aligned} x - 4y &\geq -11 \\ x + y &\geq 4 \\ x - 4y &\leq -6 \\ x + y &\leq 9 \end{aligned} \right\}$$

- a) Dibuixa la regió de solucions del sistema.
b) Una funció objectiu $f(x, y) = ax + by + c$ pren el valor mínim en aquesta regió en el punt $(4, 15/4)$. Digues si també pren el valor mínim en altres punts de la regió i, si és així, determina'ls.
a) Regió solució:



Punts de tall:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 4y = 6 \end{cases} \rightarrow A\left(\frac{22}{5}, \frac{-2}{5}\right)$$

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - 4y = 6 \end{cases} \rightarrow B\left(\frac{42}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - 4y = -11 \end{cases} \rightarrow C(4, 4)$$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 4y = -11 \end{cases} \rightarrow D(1, 3)$$

La funció agafa el valor mínim en el punt $E\left(4, \frac{15}{4}\right)$, que és un punt del segment $\overline{CD}$, per la qual cosa agafarà aquest mateix valor mínim en qualsevol dels punts del segment $\overline{CD}$.

LITERATURA I MATEMÀTIQUES

L'estel daurat

[El jove Vili, un dels protagonistes d'aquesta novel·la, que es desenvolupa en una ciutat d'Hongria, als anys vint del segle xx, una tarda obre a la seva habitació el llibre de Física i observa durant una estona aquesta fórmula:]

$$g = S \sqrt{1 + \frac{4\pi rR}{T^2 g} \cos^2 \varphi - 2 \frac{4\pi R}{r^2 g} \cos^2 \varphi}$$

«Això quin sentit té? —es va preguntar confós—. Qui inventa aquestes coses per amargar la vida als alumnes?» Va sentir ràbia. Se li va fer un nus a la gola. Els nombres estúpids s'arrossegaven davant seu com cucs, mentre que les lletres ho feien com larves.

Va badallar. [...]

Un professor particular hi anava cada tarda per «estovar-li» el cap i que li entressin les dues assignatures més difícils: Matemàtiques i Física. Mentre esperava que arribés per ensenyar-li totes aquestes «burrades», s'entretenia, més aviat amb torpesa, amb el llibre d'exercicis de Matemàtiques.

Podia passar hores llegint-los, però en va: «Un senyor va comprar cinc metres de roba...», «Fa vuit anys un pare era cent vegades més vell que el seu fill; vuit anys més tard només li faltaven quatre anys per ser tres anys més gran que el mateix fill...», «Un home ric que contracta dos jornalers...». Es fixava només en l'anècdota i no es preocupava d'allò que havia de resoldre, i imaginava situacions divertides amb els personatges dels problemes. Es deixava embolicar com en un somni lent, i se n'imaginava els detalls: el color de la roba, qui eren el pare i el fill, si aquell senyor tenia barba, si el noi sabia anar amb bicicleta i on vivia el ric... Però quan arribava el moment inevitable d'enfrontar-se als nombres, desbaratat el joc, es justificava amb l'argument: «Però, a veure, qui necessita aquella roba? Jo, segur que no. És més que clar que el pare, el fill i el ric, tots, són rucs i no serveixen per res.»

DEZSŐ KOSZTOLÁNYI

L'estel daurat

Dezsö Kosztolányi

A en Vili, el jove protagonista d'aquesta novel·la, que es desenvolupa en una ciutat d'Hongria, als anys vint del segle xx, no li agraden les matemàtiques ni la física. El seu professor d'aquestes assignatures, Antal Novák, està preocupat perquè en Vili no ha après res del que ha explicat durant el curs. A l'última classe mira de repassar abans de l'examen final i li demana que parli de qualsevol tema. En Vili tria el tema de les variacions.

—Tracem una recta —va dir en Vili i va assenyalar la pissarra amb la idea d'aprofitar el passeig fins a la tarima per moure els músculs.

—Com vulgui —va contestar en Novák, sorprès—. Traci aquesta recta. Però no aquí, sinó mentalment.

—Que sigui AB .

—O bé CD —va proposar, contrariat, en Novák; ja veia que el xicot no tenia ni idea del que parlava.

En Vili li seguia la veta i s'aferrava a les seves paraules com a un salvavides.

—Doncs que sigui CD —va repetir.

—O bé XY —va suggerir el professor, per complicar-ho encara més.

—O bé XY —va cedir en Vili.

—Però què és el que vol fer amb aquesta recta? —va exclamar finalment en Novák—. Per a què vol utilitzar la recta en les variacions? Definitivament, no ho entenc pas. [...]

El professor va proposar un altre exercici: traçar una perpendicular a un pla oblic. En Vili repetia com un lloro, però quan en Novák l'interrogava, es quedava mut, desemparat, sense saber què dir.

Aclaparat per tanta incomprensió, en Novák es va prometre a si mateix que, per molt que li costés, aconseguiria que aquell noi aprengués. [...] En Vili es mirava el professor i pensava: «Per a ell és tan fàcil.» Però en lloc de visualitzar la imatge del pla inclinat i la línia perpendicular, conceptes que li eren totalment aliens, només veia els moviments bruscos del professor, que gesticulava com un saltimbanqui: els seus dits, els seus anells inclòs el de corralina, voletejaven en l'aire. Les abstraccions no eren el fort d'en Vili. Només li resultava intel·ligible la realitat més immediata, el món visible i palpable.

Expressa algebraicament aquest problema:

«Una fàbrica vol elaborar un nou tipus de pastís amb dos productes A i B . El primer conté un 70 % de greixos i un 15 % d'hidrats de carboni, mentre que el segon conté un 12 % de greixos i un 80 % d'hidrats de carboni. El pastís ha de contenir, almenys, 40 g de greixos i 90 g d'hidrats de carboni. El cost del producte A és de 0,05 €/g i el del producte B és de 0,02 €/g. Quants grams de cada producte ha de tenir el pastís perquè el cost sigui mínim?»

$x \rightarrow$ Quantitat del producte A

$y \rightarrow$ Quantitat del producte B

Es tracta de fer mínim el cost que està determinat

per la funció $f(x, y) = 0,05x + 0,02y$.

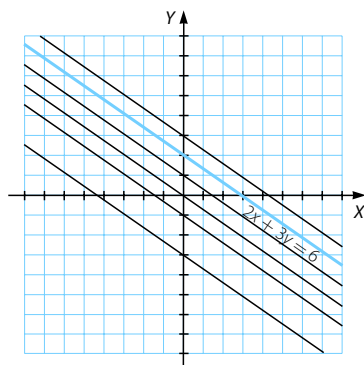
I ha de complir aquestes condicions:

$$\left. \begin{array}{l} 0,70x + 0,12y \geq 40 \\ 0,15x + 0,80y \geq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Programació lineal

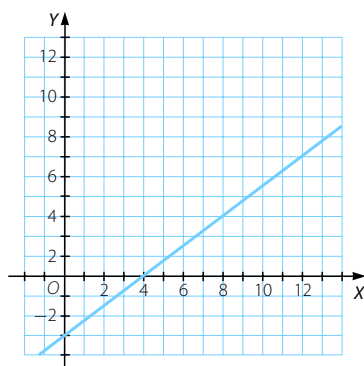
ABANS DE COMENÇAR... RECORDA

- 001 Dibuixa la recta $2x + 3y = 6$ i totes les rectes paral·leles a ella.



- 002 Dibuixa el conjunt de punts del pla que fan que la funció $f(x, y) = 3x - 4y$ prengui el valor 12.

És la recta d'equació $3x - 4y = 12$.



- 003 Donada la funció $f(x, y) = x + y$, esbrina en quins punts assoleix el màxim amb les restriccions següents:

$$1 \leq x \leq 3 \text{ i } 4 \leq y \leq 9$$

Les restriccions ens donen un rectangle.

En els vèrtexs d'aquest rectangle, la funció $f(x, y) = x + y$ assoleix els valors següents:

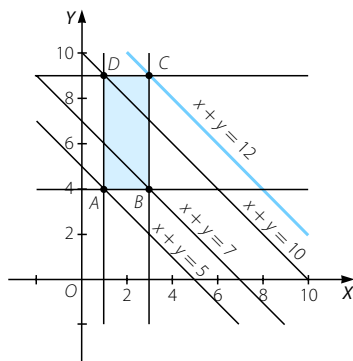
$$f(A(1, 4)) = 1 + 4 = 5$$

$$f(B(3, 4)) = 3 + 4 = 7$$

$$f(C(3, 9)) = 3 + 9 = 12$$

$$f(D(1, 9)) = 1 + 9 = 10$$

El màxim s'assoleix al punt $C(3, 9)$.



ACTIVITATS

- 001 Planteja aquest problema: «Tenim com a màxim 120 unitats de dos productes, A i B. Hi ha 65 unitats del A, amb uns guanys de 4 €, i 55 del B, amb 6,50 € per unitat. Determina les quantitats que es venen per maximitzar els beneficis.»

$x \rightarrow$ nre. d'unitats del producte A

$y \rightarrow$ nre. d'unitats del producte B

	Producte A	Producte B
Guanys per unitat (€)	4	6,50

$\rightarrow f(x, y) = 4x + 6,50y \rightarrow$ Funció objectiu

Maximitzar $f(x, y) = 4x + 6,50y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 65 \\ 0 \leq y \leq 55 \\ x + y \leq 120 \end{array} \right\}$

- 002 Planteja: «Tenim taules de tipus A amb 2 m² de fusta, 1 hora de feina i un benefici de 80 € cada una, i de tipus B amb 1 m² de fusta, 3 hores de feina i 50 € de benefici. Si hi ha 600 m² de fusta i un màxim de 900 hores, determina com obtenir el benefici màxim.»

$x \rightarrow$ nre. de taules de tipus A

$y \rightarrow$ nre. de taules de tipus B

	Tipus A	Tipus B	Total
Fusta (m ²)	2	1	600
Feina (hores)	1	3	900
Benefici (€)	80	50	

$\rightarrow 2x + y \leq 600$

$\rightarrow x + 3y \leq 900$

$\rightarrow f(x, y) = 80x + 50y \rightarrow$ Funció objectiu

Maximitzar $f(x, y) = 80x + 50y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 600 \\ x + 3y \leq 900 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$

- 003 Disposem de 90.000 m² per construir parcel·les de 3.000 i 5.000 m², tipus A i B. Els beneficis són de 10.000 € per cada parcel·la A i de 20.000 € per cada parcel·la B. El nombre màxim de parcel·les B és de 120, i el de parcel·les A és 150. Determina quantes parcel·les de cada tipus necessitem per obtenir beneficis màxims.

$x \rightarrow$ nre. de parcel·les de tipus A

$y \rightarrow$ nre. de parcel·les de tipus B

	Parcel·les tipus A	Parcel·les tipus B
Mida (m ²)	3.000	5.000
Total parcel·les	150	120
Benefici (€)	10.000	20.000

$\rightarrow 3.000x + 5.000y \leq 90.000$

$\rightarrow 0 \leq x \leq 150; 0 \leq y \leq 120$

$\rightarrow f(x, y) = 10.000x + 20.000y \rightarrow$ Funció objectiu

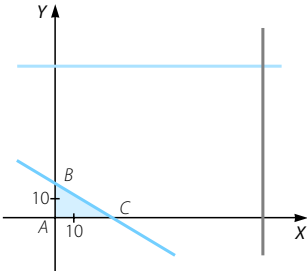
Programació lineal

Maximitzar $f(x, y) = 10.000x + 20.000y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} 3.000x + 5.000y \leq 90.000 \\ 0 \leq x \leq 150 \\ 0 \leq y \leq 120 \end{array} \right\}$

La regió factible està acotada.

Vèrtexs: $A(0, 0)$, $B(0, 18)$ i $C(30, 0)$.



Com que $f(A) = 0$, $f(B) = 360.000$ i $f(C) = 300.000$, el màxim s'aconsegueix en el vèrtex B , cosa que significa que per obtenir el màxim benefici, 360.000 €, cal construir 18 parcel·les de tipus B i cap parcel·la de tipus A .

004

Volem invertir en dos productes financers A i B . La inversió en B serà, almenys, de 3.000 € i no s'invertirà en A més del doble que en B . El producte A proporciona un benefici del 10 %, i el B del 5 %. Si disposem d'un màxim de 12.000 €, quant hem d'invertir en cada producte per maximitzar el benefici?

$x \rightarrow$ quantitat de diners invertits en el producte financer A

$y \rightarrow$ quantitat de diners invertits en el producte financer B

	Producte financer A	Producte financer B
Benefici (€)	0,10	0,05

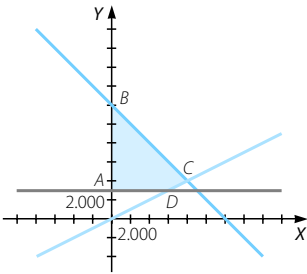
$\rightarrow f(x, y) = 0,10x + 0,05y \rightarrow$ Funció objectiu

Maximitzar $f(x, y) = 0,10x + 0,05y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} x + y \leq 12.000 \\ 3.000 \leq y \\ 0 \leq x \leq 2y \end{array} \right\}$

La regió factible està acotada.

Vèrtexs: $A(0, 3.000)$; $B(0, 12.000)$; $C(8.000, 4.000)$ i $D(6.000, 3.000)$.



Com que $f(A) = 150$, $f(B) = 600$, $f(C) = 1.000$ i $f(D) = 750$, el màxim s'aconsegueix en C . És a dir, hem d'invertir 8.000 € en el producte A i 4.000 € en el producte B per obtenir un benefici màxim de 1.000 €.

005

Es fabriquen dos tipus d'aparells *A* i *B* als tallers *X* i *Y*. En cada un dels tallers es treballen 100 hores a la setmana. Cada aparell *A* necessita 3 hores del taller *X* i 1 hora de *Y*, i cada aparell *B*, 1 i 2 hores, respectivament. Cada aparell *A* es ven a 100 € i cada aparell *B* a 150 €. Calcula gràficament el nombre d'aparells de cada tipus que s'han de produir perquè la facturació sigui màxima.

$x \rightarrow$ nombre d'aparells de tipus *A*

$y \rightarrow$ nombre d'aparells de tipus *B*

	Tipus A	Tipus B	Hores treballades
Taller X (hores)	3	1	100
Taller Y (hores)	1	2	100
Preu per aparell (€)	100	150	

$$\rightarrow 3x + y \leq 100$$

$$\rightarrow x + 2y \leq 100$$

$$\rightarrow f(x, y) = 100x + 150y \rightarrow \text{Funció objectiu}$$

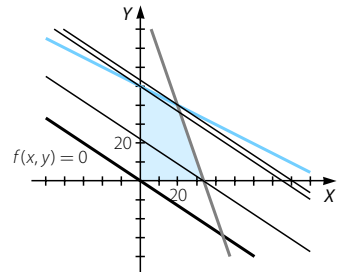
Maximitzar $f(x, y) = 100x + 150y$

$$\text{Subjecte a } \left\{ \begin{array}{l} 3x + y \leq 100 \\ x + 2y \leq 100 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array} \right.$$

La regió factible està acotada.

Vèrtexs: $A(0, 0)$; $B(0, 50)$; $C(20, 40)$ i $D\left(\frac{100}{3}, 0\right)$.

Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin per cadascun dels vèrtexs, comprovem que el màxim s'aconsegueix en *C*. Així doncs, cal produir 20 aparells de tipus *A* i 40 aparells de tipus *B* per obtenir un benefici màxim de 8.000 €.



006

Tenim 120 refrescos de taronja i 180 de llimona. Es venen en paquets de dos tipus: els paquets de tipus *A* contenen 3 refrescos de taronja i 3 de llimona, i els de tipus *B* contenen 2 refrescos de taronja i 4 de llimona. El benefici és de 6 € per cada paquet de tipus *A* i 5 € per cada paquet de tipus *B*. Troba, gràficament, quants paquets de cada tipus han de vendre per maximitzar el benefici.

$x \rightarrow$ nre. de paquets de tipus *A*

$y \rightarrow$ nre. de paquets de tipus *B*

	Paquets tipus A	Paquets tipus B	Total
Taronja	3	2	120
Llimona	3	4	180
Benefici (€)	6	5	

$$\rightarrow 3x + 2y \leq 120$$

$$\rightarrow 3x + 4y \leq 180$$

$$\rightarrow f(x, y) = 6x + 5y \rightarrow \text{Funció objectiu}$$

Programació lineal

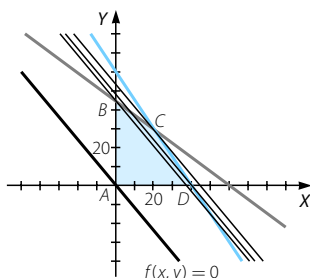
Maximitzar $f(x, y) = 6x + 5y$

Subjecte a
$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y \leq 120 \\ 3x + 4y \leq 180 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array} \right\}$$

La regió factible està acotada.

Vèrtexs: $A(0, 0)$; $B(0, 45)$; $C(20, 30)$ i $D(40, 0)$.

Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin pels vèrtexs, comprovem que el màxim s'aconsegueix en C . Així doncs, cal vendre 20 paquets de tipus A i 30 paquets de tipus B perquè el benefici màxim sigui de 270 €.



007 Resol aquest problema de programació lineal:

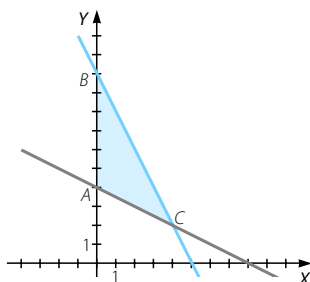
Maximitzar $f(x, y) = x - 2y$

Subjecte a
$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \geq 8 \\ -2x - y \geq -10 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La regió factible està acotada.

Vèrtexs: $A(0, 4)$; $B(0, 10)$ i $C(4, 2)$.

Com que $f(A) = -8$, $f(B) = -20$ i $f(C) = 0$, el màxim s'aconsegueix en el vèrtex C , amb valor 0.



008 Resol el problema de programació lineal:

Maximitzar $f(x, y) = x + y$

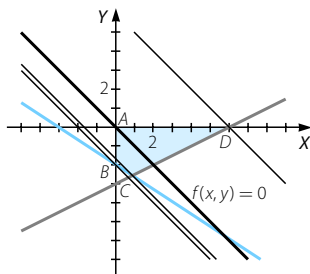
Subjecte a
$$\left. \begin{array}{l} x - 2y \leq 6 \\ 2x + 3y \geq -6 \\ x \geq 0, y \leq 0 \end{array} \right\}$$

La regió factible està acotada.

Tracem paral·leles que passin per $A(0, 0)$;

$B(0, -2)$; $C\left(\frac{6}{7}, -\frac{18}{7}\right)$ i $D(6, 0)$.

El màxim s'aconsegueix en D i val 6.



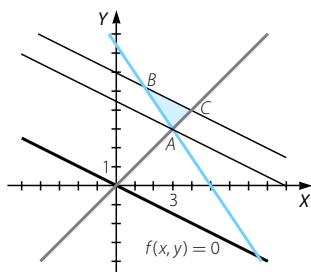
009 Resol aquest problema de programació lineal:

Maximitzar $f(x, y) = 2x + 4y$

Subjecte a
$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 12 \\ x - y \leq 0 \\ 6x + 4y \geq 30 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La regió factible està acotada.

Tracem paral·leles que passin per $A(3, 3)$; $B\left(\frac{3}{2}, \frac{21}{4}\right)$ i $C(4, 4)$.



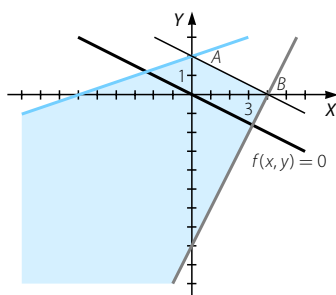
El màxim s'aconsegueix en B i C i, per tant, s'obté en tots els punts del segment BC .

010 Resuelve el siguiente problema de programación lineal:

Maximitzar $f(x, y) = 3x + 6y$

Subjecte a
$$\begin{cases} -x + 3y \leq 6 \\ 2x - y \leq 8 \\ x + 2y \leq 4 \end{cases}$$

La regió factible no està acotada. Té dos vèrtexs: $A(0, 2)$ i $B(4, 0)$.



La funció objectiu aconsegueix el màxim en els vèrtexs A i B i, per tant, en tots els punts del segment que uneix A amb B , i el valor és 12.

011 Resol aquest problema de programació lineal:

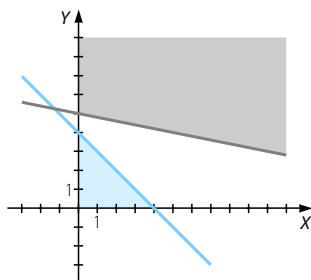
Maximitzar $f(x, y) = -x + 3y$

Subjecte a
$$\begin{cases} x + 5y \geq 25 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

El sistema d'inequacions
$$\begin{cases} x + 5y \geq 25 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$$

no té solució en el primer quadrant;
així doncs, no hi ha regió factible
per al conjunt de restriccions de l'enunciat.

El problema no té solució.



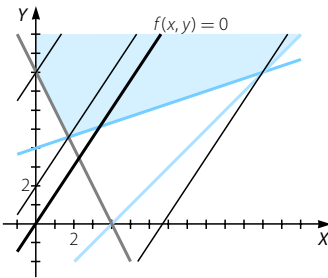
Programació lineal

012 Resol aquest problema de programació lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximitzar} & f(x, y) = 3x - 2y \\ \text{Subjecte a} & \left. \begin{array}{l} -x + 3y \geq 12 \\ 2x + y \geq 8 \\ x - y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

La regió factible no està acotada. Si tracem rectes paral·leles a $3x - 2y = 0$, comprovem que sempre podem traçar una recta paral·lela per damunt de l'anterior que talli la regió factible.

El problema no té solució.



013 Una fàbrica elabora dos tipus de productes, A i B. El tipus A necessita 2 obrers que treballin un total de 20 hores, i s'obté un benefici de 1.500 € per unitat. El tipus B necessita 3 obrers amb un total de 10 hores de feina i el benefici és de 1.000 € per unitat. Si disposen de 60 obrers i 480 hores de feina, determina la quantitat d'unitats de A i de B que s'han de fabricar per maximitzar el benefici.

$x \rightarrow$ nre. d'unitats del producte de tipus A

$y \rightarrow$ nre. d'unitats del producte de tipus B

	Tipus A	Tipus B	Total
Obrers	2	3	60
Temps (hores)	20	10	480
Benefici per unitat (€)	1.500	1.000	

$$\rightarrow 2x + 3y \leq 60$$

$$\rightarrow 20x + 10y \leq 480$$

$$\rightarrow f(x, y) = 1.500x + 1.000y \rightarrow \text{Funció objectiu}$$

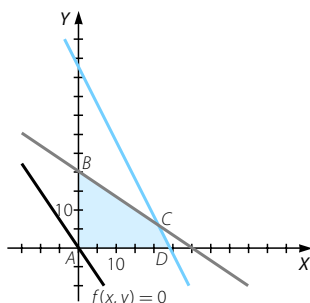
$$\text{Maximitzar } f(x, y) = 1.500x + 1.000y$$

$$\text{Subjecte a } \left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 60 \\ 20x + 10y \leq 480 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La regió factible està acotada.

Vèrtexs: A(0, 0); B(0, 20); C(21, 6) i D(24, 0).

Com que $f(A) = 0$, $f(B) = 20.000$, $f(C) = 37.500$ i $f(D) = 36.000$, el màxim s'aconsegueix en el vèrtex C. Així doncs, cal fabricar 21 unitats de tipus A i 6 unitats de tipus B perquè el benefici sigui màxim i valgui 37.500 €.



014

Una fàbrica de conserva té 800 kg de pèsols per conservar en dos tipus de llaunes. La llauna petita en conté 200 g i aporta un benefici de 10 cèntims per llauna. La llauna gran en conté 500 g i aporta un benefici de 30 cèntims. Si al magatzem només tenen 2.000 llaunes de mida petita i 1.000 de grans, determina la quantitat de llaunes de cada mida que hem de produir per maximitzar el benefici.

$x \rightarrow$ nre. de llaunes petites $y \rightarrow$ nre. de llaunes grans

	Llauna petita	Llauna gran	Total	
Quantitat de pèsols (kg)	0,2	0,5	800	$\rightarrow 0,2x + 0,5y \leq 800$
Total llaunes	2.000	1.000		$\rightarrow x \leq 2.000; y \leq 1.000$
Benefici per unitat (€)	0,10	0,30		$\rightarrow f(x, y) = 0,10x + 0,5y \rightarrow$ Funció objectiu

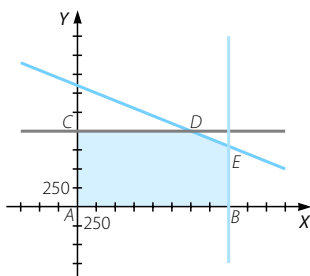
Maximitzar $f(x, y) = 0,10x + 0,5y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} 0,2x + 0,5y \leq 800 \\ 0 \leq x \leq 2.000 \\ 0 \leq y \leq 1.000 \end{array} \right\}$

La regió factible està acotada.

Vèrtexs: $A(0, 0)$; $B(2.000, 0)$; $C(0, 1.000)$; $D(1.500, 1.000)$ i $E(2.000, 800)$.

Com que $f(A) = 0$, $f(B) = 200$, $f(C) = 300$, $f(D) = 450$ i $f(E) = 440$, el valor màxim s'aconsegueix en el punt D. Per tant, hem de fabricar 1.500 llaunes petites i 1.000 llaunes grans per maximitzar el benefici i que sigui de 450 €.



Programació lineal

015

Un esportista necessita consumir diàriament 36 g d'una substància *M*, 24 g de *N* i 8 g de *P*. A la farmàcia ha trobat dos tipus de càpsules que contenen aquestes substàncies. Les càpsules *A* tenen 6 g de *M*, 2 g de *N* i 18 g de *P*, i costen 3 cèntims per càpsula. Les càpsules *B* tenen 3 g de *M*, 4 g de *N* i 18 g de *P*, i costen 4,5 cèntims per càpsula. Quantes càpsules de cada tipus necessita perquè el cost sigui mínim?

$x \rightarrow$ nre. de càpsules de tipus *A*

$y \rightarrow$ nre. de càpsules de tipus *B*

	Càpsula <i>A</i>	Càpsula <i>B</i>	Total
Substància <i>M</i> (g)	6	3	36
Substància <i>N</i> (g)	2	4	24
Substància <i>P</i> (g)	18	18	8
Cost per càpsula (cèntims)	3	4,5	

$$\rightarrow 6x + 3y \geq 36$$

$$\rightarrow 2x + 4y \geq 24$$

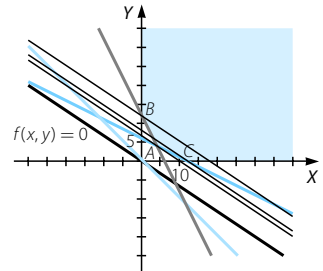
$$\rightarrow 18x + 18y \geq 8$$

$$\rightarrow f(x, y) = 3x + 4,5y \rightarrow \text{Funció objectiu}$$

Minimitzar $f(x, y) = 3x + 4,5y$

Subjecte a
$$\left. \begin{array}{l} 6x + 3y \geq 36 \\ 2x + 4y \geq 24 \\ 18x + 18y \geq 8 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array} \right\}$$

La regió factible no està acotada per la part superior i té tres vèrtexs: *A*(4, 4), *B*(0, 12) i *C*(12, 0). Si tracem paral·leles a la funció objectiu comprovem que el mínim s'aconsegueix en *A*. Així doncs, un esportista necessita 4 càpsules de cada tipus perquè el cost sigui mínim, i aquest cost és de 30 cèntims.



016

Els animals d'una granja han de prendre, almenys, 60 mg de vitamina *A* i, almenys, 90 mg de vitamina *B*. Existeixen dos compostos amb aquestes vitamines. El compost *X* conté 10 mg de vitamina *A* i 15 mg de *B*, i cada dosi val 0,50 €. El compost *Y* conté 10 mg de cada vitamina, i cada dosi costa 0,30 €. A més, es recomana no prendre'n més de 8 dosis diàries. Calcula quines dosis han de prendre perquè el cost sigui mínim.

$x \rightarrow$ nre. de dosis del compost *X*

$y \rightarrow$ nre. de dosis del compost *Y*

	Compost <i>X</i>	Compost <i>Y</i>	Quantitat
Vitamina <i>A</i> (mg)	10	10	60
Vitamina <i>B</i> (mg)	15	10	90
Cost (€)	0,50	0,30	

$$\rightarrow 10x + 10y \geq 60$$

$$\rightarrow 15x + 10y \geq 90$$

$$\rightarrow f(x, y) = 0,50x + 0,30y$$

$\rightarrow$ Funció objectiu

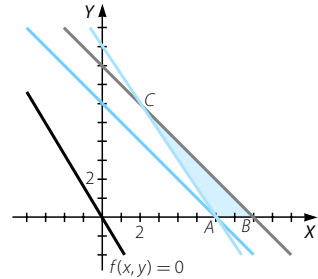
$$\begin{array}{ll} \text{Minimitzar} & f(x, y) = 0,50x + 0,30y \\ \text{Subjecte a} & \left. \begin{array}{l} x + y \leq 8 \\ 10x + 10y \geq 60 \\ 15x + 10y \geq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \end{array}$$

La regió factible està acotada.

Vèrtexs: $A(6, 0)$; $B(8, 0)$ i $C(2, 6)$.

Si substituïm a la funció objectiu obtenim que $f(A) = 3$, $f(B) = 4$ i $f(C) = 2,8$; així doncs, el mínim s'aconsegueix en el punt C .

Per tant, els animals han de prendre 2 dosis del compost X i 6 dosis del compost Y perquè el cost sigui mínim, cost que és de 2,80 €.



017

Una empresa es dedica a elaborar lots de productes que es venen als supermercats. En aquest moment estan empaquetant dos lots diferents. El lot de tipus A té 1 formatge i 2 ampolles de vi, i transportar-lo costa 0,90 €. El lot de tipus B té 3 formatges i 1 ampolla de vi, i el transport val 1,50 €. L'empresa disposa de 200 formatges i 100 ampolles de vi, i han d'elaborar, almenys, 10 lots del tipus A i 25 del tipus B . Quants lots de cada classe han d'elaborar perquè les despeses en transport siguin mínimes?

$x \rightarrow$ nre. de lots de tipus A $y \rightarrow$ nre. de lots de tipus B

	Lot tipus A	Lot tipus B	Total	
Formatge	1	3	200	$\rightarrow x + 3y \leq 200$
Ampolles de vi	2	1	100	$\rightarrow 2x + y \leq 100$
Cost del transport (€)	0,90	1,50	$\rightarrow f(x, y) = 0,90x + 1,50y \rightarrow$ Funció objectiu	

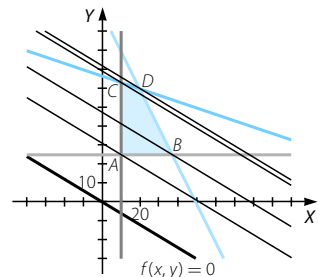
$$\text{Minimitzar} \quad f(x, y) = 0,90x + 1,50y$$

$$\text{Subjecte a} \quad \left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 200 \\ 2x + y \leq 100 \\ 10 \leq x \\ 25 \leq y \end{array} \right\}$$

La regió factible està acotada.

Vèrtexs: $A(10, 25)$; $B\left(\frac{75}{2}, 25\right)$; $C\left(10, \frac{190}{3}\right)$ i $D(20, 60)$.

Com que $f(A) = 46,5$, $f(B) = 71,25$, $f(C) = 104$ i $f(D) = 108$, el mínim s'aconsegueix en A , amb un valor de 46,5. És a dir, perquè les despeses, del transport siguin mínimes han d'elaborar 10 lots de tipus A i 25 lots de tipus B , amb unes despeses totals de 46,50 €.



Programació lineal

018 Aquesta és la composició dels articles A i B pels elements M1, M2 i M3.

	A	B
M1	2	1
M2	3	2
M3	1	2

Necessitem, almenys, 45 unitats de M1, 71 de M2 i 25 de M3, i els costos de trasllat de A i B són 50 € i 60 €, respectivament. Determina els articles que s'han d'elaborar perquè els costos de trasllat siguin mínims.

$x \rightarrow$ nre. d'articles A

$y \rightarrow$ nre. d'articles B

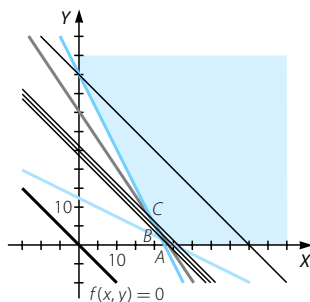
Minimitzar $f(x, y) = 50x + 60y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} 2x + y \geq 45 \\ 3x + 2y \geq 71 \\ x + 2y \geq 25 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$

La regió factible no està acotada.

Vèrtexs: A(25, 0); B(23, 1); C(19, 7) i D(0, 45).

Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin per aquests vèrtexs, obtenim que el mínim s'aconsegueix en B. Això significa que perquè els costos de trasllat siguin mínims s'han d'elaborar 23 articles A i 1 article B. En aquest cas, el cost serà de 1.200 €.



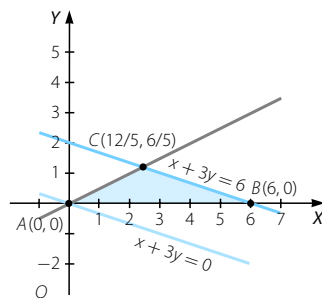
019 Determina la solució òptima de la funció $f(x, y) = x + 3y$ sotmesa al conjunt d'inequacions següent:

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$2x + 6y \leq 12$$

$$x \geq 2y$$

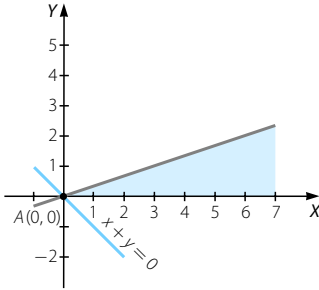


La solució és:

- El segment BC per al màxim: per a qualsevol punt P del segment es compleix que $f(P) = f(B) = f(C) = 6$.
- El punt A és el mínim $f(A) = 0$.

- 020 Determina la solució òptima de la funció $f(x, y) = x + y$ sotmesa al conjunt d'inequacions següent:

$$x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad x - 6y \leq 12 \quad x \geq 3y$$



No hi màxim (és una regió oberta) i el mínim s'assoleix en el punt $A(0, 0)$.

- 021 El premi d'un concurs consisteix en un xec de 240 € per gastar en llibres i jocs. Els llibres valen 8 €, i els jocs, 24 €. L'organització estableix la condició que el nombre de llibres que compri el guanyador no pot superar el doble del nombre de jocs.



- Planteja un sistema d'inequacions amb les restriccions i representa la regió factible.
- Determina, de manera raonada, si el guanyador podria comprar 12 llibres i 6 jocs.
- Podria comprar 7 llibres i 7 jocs? En cas que li sobressin diners, quants n'hi sobrarien?

a) $x \rightarrow$ nombre de llibres $y \rightarrow$ nombre de jocs

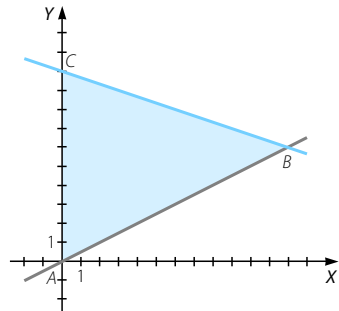
	Llibres	Jocs	Total
Cost (€)	8	24	240

$$\rightarrow 8x + 24y \leq 240$$

El sistema d'inequacions que hem de resoldre és:

$$\left. \begin{array}{l} 8x + 24y \leq 240 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

La regió factible està acotada i els vèrtexs són $A(0, 0)$; $B(12, 6)$ i $C(0, 10)$.



- Els vèrtexs pertanyen a la regió factible, perquè a les inequacions es dona la igualtat. El punt B representa 12 llibres i 6 jocs i, per tant, sí que els podria comprar.
- Sí que podria comprar 7 llibres i 7 jocs, perquè el punt $(7, 7)$ pertany a la regió factible. El cost serà de 224 € i li sobraran 16 €.

Programació lineal

022

Una empresa té dos centres de producció. Un genera diàriament 1 tona de material altament radioactiu, 3 de radiació mitjana i 5 de baixa radiació. L'altre centre genera cada dia 2 tones de cada tipus. L'empresa ha de reciclar, almenys, 80 tones de material altament radioactiu, 160 de radiació mitjana i 200 de baixa radiació. Si el cost diari de l'operació és de 20.000 € en cada centre, quants dies s'ha de dur a terme perquè el cost de l'operació sigui mínim?

$x \rightarrow$ nre. de dies que ha de reciclar el primer centre de producció

$y \rightarrow$ nre. de dies que ha de reciclar el segon centre de producció

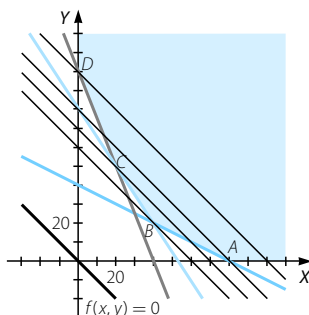
	Primer centre	Segon centre	Total reciclat	
Radiació alta (tones)	1	2	80	$\rightarrow x + 2y \geq 80$
Radiació mitjana (tones)	3	2	160	$\rightarrow 3x + 2y \geq 160$
Radiació baixa (tones)	5	2	200	$\rightarrow 5x + 2y \geq 200$
Cost diari (€)	20.000	20.000		$\rightarrow f(x, y) = 20.000x + 20.000y$ $\rightarrow$ Funció objectiu

Minimitzar $f(x, y) = 20.000x + 20.000y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} x + 2y \geq 80 \\ 3x + 2y \geq 160 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$

La regió factible no està acotada i té com a vèrtexs $A(80, 0)$, $B(40, 20)$, $C(20, 50)$ i $D(0, 100)$.

Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin pels vèrtexs, comprovem que el mínim s'aconsegueix en B i val 1.200.000 €.



Perquè el cost del reciclatge sigui el mínim possible, el primer centre de producció ha de treballar 40 dies, i el segon centre de producció, 20 dies.

023

Disposem de 105.00 € per invertir en dos tipus d'accions, A i B. Les de tipus A tenen un interès anual del 8% i les de tipus B del 7%. Si inverteixo com a màxim 65.000 en les de tipus A, com a mínim 3.000 € en les de tipus B i vull que la inversió en les de tipus A sigui, almenys, igual a la inversió en les de tipus B, quina és la distribució amb la qual obtinc un benefici més gran?

$x \rightarrow$ diners invertits en A $y \rightarrow$ diners invertits en B

	Tipus A	Tipus B	
Interès anual (%)	0,08	0,07	$\rightarrow f(x, y) = 0,08x + 0,07y \rightarrow$ Funció objectiu

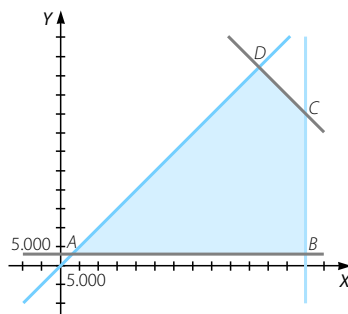
Maximitzar $f(x, y) = 0,08x + 0,07y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 65.000 \\ y \geq 3.000 \\ x \geq y \\ x + y \leq 105.000 \end{array} \right\}$

La regió factible està acotada amb vèrtexs en $A(3.000, 3.000)$, $B(65.000, 3.000)$, $C(65.000, 40.000)$ i $D(52.500, 52.500)$.

Com que $f(A) = 450$, $f(B) = 5.410$, $f(C) = 8.000$ i $f(D) = 7.875$, el màxim s'aconsegueix en C .

He d'invertir 65.000 € en les accions de tipus A i 3.000 € en les accions de tipus B .
Obtindrè 8.000 €.



- 024 Un circ ha muntat una carpa amb una capacitat per a 1.500 persones, entre adults i nens. El nombre de nens no pot superar els 600 i el nombre d'adults no pot superar el doble del nombre de nens.



Si el preu de l'entrada d'adults és de 8 €, i el de nens és un 40 % menys, quina és la quantitat màxima que poden recaptar per les entrades?

$x \rightarrow$ nre. d'entrades d'adults

$y \rightarrow$ nre. d'entrades de nens

	Adults	Nens
Preu (€)	8	4,80

$\rightarrow f(x, y) = 8x + 4,80y \rightarrow$ Funció objectiu

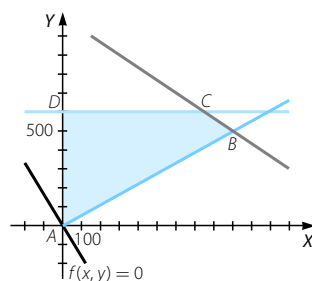
Maximitzar $f(x, y) = 8x + 4,80y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2y \\ 0 \leq y \leq 600 \\ x + y \leq 1.500 \end{array} \right\}$

La regió factible està acotada amb vèrtexs $A(0, 0)$; $B(1.000, 500)$; $C(900, 600)$ i $D(0, 600)$.

Com que $f(A) = 0$, $f(B) = 10.400$, $f(C) = 10.080$ i $f(D) = 2.880$, el màxim s'aconsegueix en B .

Per maximitzar els diners recaptats amb les entrades, cal vendre 1.000 entrades d'adult i 500 entrades de nen, amb la qual cosa obtenen 10.400 €.



Programació lineal

025

Una empresa fabrica dos models de guants: un model normal i un model de luxe. El departament de costura de l'empresa té 900 hores disponibles, el d'acabat disposa de 300 hores i el d'empaquetat disposa de 100 hores. Les hores necessàries de cada departament per parell de guants i els beneficis, en €, es donen a la taula següent:

	Costura	Acabat	Empaquetat	Beneficis
Normal	1	1/2	1/8	4
De luxe	3/2	1/3	1/4	8

Quants parells de cada model han de fabricar per maximitzar el benefici?

(Activitat de Selectivitat)

$x \rightarrow$ nre. de parells de guants del model normal

$y \rightarrow$ nre. de parells de guants del model de luxe

	Model normal	Model de luxe	Hores
Departament de costura	1	$\frac{3}{2}$	900
Departament d'acabat	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	300
Departament d'empaquetat	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	100
Beneficis (€)	4	8	

$$\rightarrow x + \frac{3}{2}y \leq 900$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \leq 300$$

$$\rightarrow \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y \leq 100$$

$$\rightarrow f(x, y) = 4x + 8y$$

$\rightarrow$ Funció objectiu

Maximitzar $f(x, y) = 4x + 8y$

$$\text{Subjecte a } \left. \begin{array}{l} x + \frac{3}{2}y \leq 900 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y \leq 300 \\ \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

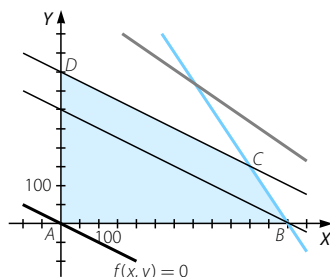
La regió factible està acotada amb vèrtexs:

$A(0, 0); B(600, 0); C(500, 150)$ i $D(0, 400)$.

Si tracem paral·leles a la funció objectiu, tenim que el màxim s'aconsegueix en el segment DC .

Com que són parells de guants, només valen els punts que tinguin coordenades enteres, és a dir, els punts que tinguin les coordenades de la forma $\left(x, \frac{800-x}{2}\right)$, amb $0 \leq x \leq 500$ i x un nombre parell.

El benefici és de 3.200 €.



026

Per Nadal, una botiga de queviures vol preparar dos tipus de lots, L_1 i L_2 . Cada lot del tipus L_1 està format per 4 barres de torró, 2 ampolles de cava i 2 paquets de cafè, i cada lot del tipus L_2 està format per 2 barres de torró, 2 ampolles de cava i 4 paquets de cafè. Amb cada lot del tipus L_1 obtenen un benefici de 4,50 €, i amb cada lot del tipus L_2 un de 3 €. La botiga disposa de 300 barres de torró, 180 ampolles de cava i 300 paquets de cafè. Quants lots de cada tipus han de preparar per obtenir un benefici màxim?

(Activitat de Selectivitat)

$x \rightarrow$ nre. de lots L_1 $y \rightarrow$ nre. de lots L_2

	Lots L_1	Lots L_2	Total
Barres de torró	4	2	300
Ampolles de cava	2	2	180
Paquets de cafè	2	4	300
Benefici (€)	4,50	3	

$$\rightarrow 4x + 2y \leq 300$$

$$\rightarrow 2x + 2y \leq 180$$

$$\rightarrow 2x + 4y \leq 300$$

$$\rightarrow f(x, y) = 4,50x + 3y$$

$\rightarrow$ Funció objectiu

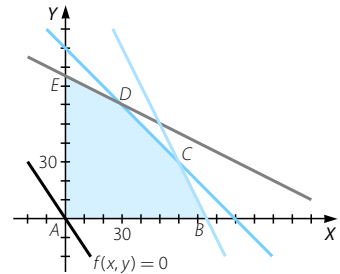
Maximitzar $f(x, y) = 4,50x + 3y$

Subjecte a
$$\left. \begin{array}{l} 4x + 2y \leq 300 \\ 2x + 2y \leq 180 \\ 2x + 4y \leq 300 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array} \right\}$$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(0, 0)$, $B(75, 0)$, $C(60, 30)$, $D(30, 60)$ i $E(0, 75)$.

Com que $f(A) = 0$; $f(B) = 337,5$; $f(C) = 360$; $f(D) = 315$; $f(E) = 225$, el màxim s'aconsegueix en C.

Per maximitzar el benefici han de preparar 60 lots de tipus L_1 i 30 lots de tipus L_2 , amb un benefici de 360 €.



027

Un professor ha donat als seus alumnes una llista de problemes perquè en resolguin, com a màxim, 70. Els problemes estan classificats en dos grups. Els del grup A valen 5 punts cadascun, i els del grup B, 7 punts. Per resoldre un problema del tipus A es necessiten 2 minuts i per resoldre un problema del tipus B, 3 minuts. Si els alumnes disposen de dues hores i mitja per resoldre'ls, quants problemes de cada tipus hauran de fer per obtenir la puntuació màxima?

(Activitat de Selectivitat)



Programació lineal

$x \rightarrow$ nre. de problemes del tipus A $y \rightarrow$ nre. de problemes del tipus B

	Problemes tipus A	Problemes tipus B	Total
Temps (min)	2	3	150
Punts	5	7	

$$\rightarrow 2x + 3y \leq 150$$

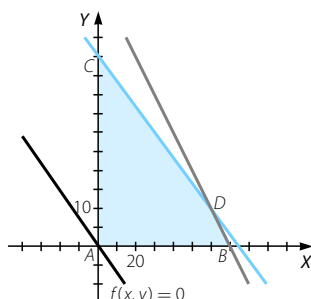
$$\rightarrow f(x, y) = 5x + 7y \rightarrow \text{Funció objectiu}$$

Maximitzar $f(x, y) = 5x + 7y$

Subjecte a
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y \leq 150 \\ x + y \leq 70 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array} \right\}$$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(0, 0)$; $B(70, 0)$; $C(0, 50)$ i $D(60, 10)$.

Com que $f(A) = 0$, $f(B) = 350$, $f(C) = 350$ i $f(D) = 370$, el màxim s'aconsegueix en D . Això significa que per obtenir la puntuació màxima cal fer 60 problemes del tipus A i 10 problemes del tipus B, amb la qual cosa s'aconsegueixen 370 punts.



028

En un magatzem d'electrodomèstics hi ha neveres i rentadores, i poden emmagatzemar un total de 180 unitats. Per atendre de manera adequada la demanda dels clients, han de tenir, almenys, 30 rentadores i el nombre de neveres ha de ser, almenys, igual al nombre de rentadores més 20. Si el cost de cada nevera és de 450 € i el de cada rentadora és de 375 €:

- Formula el problema corresponent.
- Representa la regió factible.
- Quantes unitats de cada electrodomèstic han d'emmagatzemar per minimitzar el cost total?

(Activitat de Selectivitat)

a) $x \rightarrow$ nre. de neveres $y \rightarrow$ nre. de rentadores

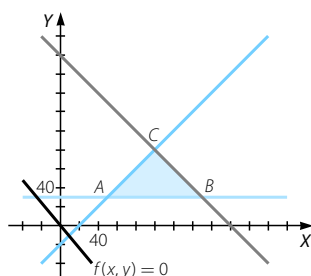
	Neveres	Rentadores
Cost (€)	450	375

$$\rightarrow f(x, y) = 450x + 375y \rightarrow \text{Funció objectiu}$$

Minimitzar $f(x, y) = 450x + 375y$

Subjecte a
$$\left. \begin{array}{l} x + y \leq 180 \\ y \geq 30 \\ x \geq y + 20 \end{array} \right\}$$

- La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(50, 30)$; $B(150, 30)$ i $C(100, 80)$.
- Si substituïm els vèrtexs en la funció objectiu, obtenim $f(A) = 33.750$, $f(B) = 78.750$ i $f(C) = 75.000$; per tant, el mínim s'aconsegueix en A . Així doncs, han d'emmagatzemar 50 neveres i 30 rentadores perquè el cost sigui mínim i valgui 33.750 €.



- 029 Una botiga d'articles de pell necessita per a la pròxima campanya un mínim de 80 bosses, 120 parells de sabates i 90 caçadores. Es proveeix dels articles en dos tallers: A i B. El taller A produeix diàriament 4 bosses, 12 parells de sabates i 2 caçadores amb un cost diari de 360 €. La producció diària del taller B és de 2 bosses, 2 parells de sabates i 6 caçadores, amb un cost de 400 € cada dia.



Determina, justificant la resposta:

- El nombre de dies que ha de treballar cada taller per proveir la botiga amb un cost mínim.
- El valor d'aquest cost mínim.

(Activitat de Selectivitat)

$x \rightarrow$ nre. de dies que treballa el taller A

$y \rightarrow$ nre. de dies que treballa el taller B

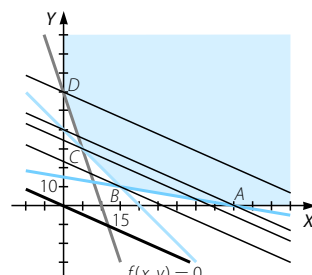
	Taller A	Taller B	Total	
Bosses	4	2	80	$\rightarrow 4x + 2y \geq 80$
Sabates	12	2	120	$\rightarrow 12x + 2y \geq 120$
Caçadores	2	6	90	$\rightarrow 2x + 6y \geq 90$
Cost (€)	360	400	$\rightarrow f(x, y) = 360x + 400y \rightarrow$ Funció objectiu	

Minimitzar $f(x, y) = 360x + 400y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} 4x + 2y \geq 80 \\ 12x + 2y \geq 120 \\ 2x + 6y \geq 90 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array} \right\}$

- La regió factible no està acotada i té com a vèrtexs $A(45, 0)$, $B(15, 10)$, $C(5, 30)$ i $D(0, 60)$. Si tracem paral·leles a la funció objectiu pels diferents vèrtexs, podem comprovar que el mínim s'aconsegueix en B. Per tant, el taller A ha de treballar 15 dies i el taller B ho ha de fer 10 dies per minimitzar el cost.

- El valor del cost mínim és de 9.400 €.



Programació lineal

030

Dos grups diferents, G_1 i G_2 , de la mateixa empresa poden dur a terme un projecte de jardineria. Es tracta d'enjardinar tres zones: A, B i C. A la taula següent es recull el nombre d'unitats que pot enjardinar cada grup durant una setmana:

	Zona A	Zona B	Zona C
Grup G_1	4	10	7
Grup G_2	10	5	7

Han d'enjardinar un mínim de 40 unitats a la zona A, 50 unitats a la zona B i 40 unitats a la zona C, i el cost setmanal s'estima en 3.300 € per al grup G_1 i en 4.000 € per al grup G_2 .

Quantes setmanes haurà de treballar cada grup per acabar el projecte amb el cost mínim? Expressa la funció objectiu i les restriccions del problema. Representa gràficament la regió factible i calcula'n els vèrtexs.

(Activitat de Selectivitat)

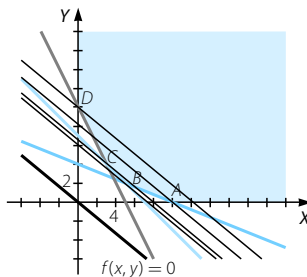
$x \rightarrow$ nre. de setmanes que haurà de treballar el grup G_1

$y \rightarrow$ nre. de setmanes que haurà de treballar el grup G_2

	Grup G_1	Grup G_2	Total	
Zona A	4	10	40	$\rightarrow 4x + 10y \geq 40$
Zona B	10	5	50	$\rightarrow 10x + 5y \geq 50$
Zona C	7	7	49	$\rightarrow 7x + 7y \geq 49$
Cost (€)	3.300	4.000		$\rightarrow f(x, y) = 3.300x + 4.000y$ $\rightarrow$ Funció objectiu

Minimitzar $f(x, y) = 3.300x + 4.000y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} 4x + 10y \geq 40 \\ 10x + 5y \geq 50 \\ 7x + 7y \geq 49 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$



La regió factible no està acotada i té com a vèrtexs A(10, 0), B(5, 2), C(3, 4) i D(0, 10). Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin per aquests vèrtexs, comprovem que el mínim s'aconsegueix en B. El grup G_1 haurà de treballar 5 setmanes i el grup G_2 ho haurà de fer 2 setmanes perquè el cost sigui mínim; aquest cost és de 24.500 €.

031

Una empresa fabrica dues qualitats d'un bé, i n'ha de produir en total un mínim de 100 unitats i un màxim de 200. El cost de producció d'una unitat de primera qualitat és de 15 € i s'obté un benefici unitari de 100 €. El cost de producció d'una unitat de segona qualitat és de 10 € i s'obté un benefici unitari de 50 €.

- Planteja i resol un programa lineal per esbrinar el cost mínim total per obtenir un benefici total de, almenys, 12.500 €.
- Planteja i resol un programa lineal per esbrinar el benefici total màxim amb un cost total no superior a 2.550 €.

(Activitat de Selectivitat)

$x \rightarrow$ nre. d'unitats de qualitat 1

$y \rightarrow$ nre. d'unitats de qualitat 2

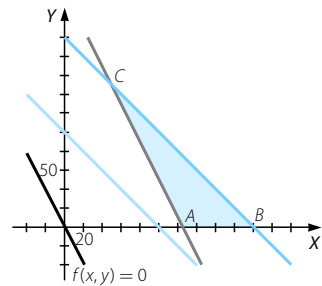
	Qualitat 1	Qualitat 2
Cost de producció (€)	15	10
Benefici per unitat (€)	100	50

- a) Minimitzar $f(x, y) = 15x + 10y$

$$\text{Subjecte a } \left. \begin{array}{l} 100 \leq x + y \leq 200 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \\ 100x + 50y \geq 12.500 \end{array} \right\}$$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(125, 0)$, $B(200, 0)$ i $C(50, 150)$.

Com que $f(A) = 1.875$, $f(B) = 3.000$ i $f(C) = 2.250$, la funció aconsegueix el mínim en A , és a dir, han de fabricar 125 unitats de qualitat 1 i cap unitat de qualitat 2 per minimitzar el cost i que sigui de 1.875 €.

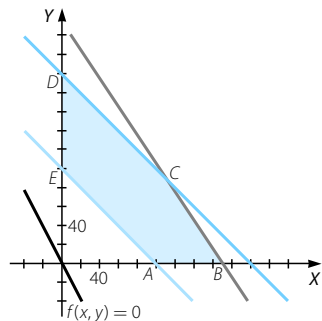


- b) Maximitzar $f(x, y) = 100x + 50y$

$$\text{Subjecte a } \left. \begin{array}{l} 100 \leq x + y \leq 200 \\ 0 \leq x \\ 0 \leq y \\ 15x + 10y \leq 2.550 \end{array} \right\}$$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(100, 0)$, $B(170, 0)$, $C(110, 90)$, $D(0, 200)$ i $E(0, 100)$.

Com que $f(A) = 1.000$, $f(B) = 17.000$, $f(C) = 15.500$, $f(D) = 10.000$ i $f(E) = 5.000$, el màxim s'aconsegueix en B , és a dir, cal fabricar 170 objectes de qualitat 1 i cap objecte de qualitat 2 perquè el benefici sigui màxim, de 17.000 €.



Programació lineal

- 032 Un distribuïdor d'oli d'oliva compra la matèria primera en dues almàsseres, A i B. Les almàsseres A i B venen l'oli a 2.000 i 3.000 € per tona, respectivament. Cada almàssera li ven un mínim de 2 tones i un màxim de 7 i, per atendre la demanda, el distribuïdor ha de comprar en total un mínim de 6 tones. El distribuïdor ha de comprar a l'almàssera A com a màxim el doble d'oli que a l'almàssera B.



Quina quantitat d'oli ha de comprar el distribuïdor a cada una de les almàsseres per obtenir el cost mínim? Determina aquest cost mínim.

(Activitat de Selectivitat)

$x \rightarrow$ quantitat d'oli que compra a l'almàssera A
 $y \rightarrow$ quantitat d'oli que compra a l'almàssera B

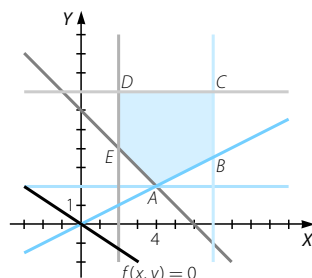
	Almàssera A	Almàssera B
Preu per tona (€)	2.000	3.000

$\rightarrow f(x, y) = 2.000x + 3.000y$
 $\rightarrow$ Funció objectiu

Minimitzar $f(x, y) = 2.000x + 3.000y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} x + y \geq 6 \\ x \leq 2y \\ 2 \leq x \leq 7 \\ 2 \leq y \leq 7 \end{array} \right\}$

La regió factible està acotada amb vèrtexs A(4, 2); B(7, 7); C(7, 7); D(2, 7) i E(2, 4).



Com que $f(A) = 14.000$, $f(B) = 24.500$, $f(C) = 35.000$, $f(D) = 25.000$ i $f(E) = 16.000$, el mínim s'aconsegueix en A. Així doncs, ha de comprar 4 tones d'oli a l'almàssera B, amb un cost de 14.000 €.

033

Cada instal·lació d'una televisió analògica necessita 10 m de cable i cada instal·lació de televisió digital en necessita 20 m. Cada televisió analògica necessita 20 minuts d'instal·lació, i cada televisió digital, 30 minuts. Disposem d'un màxim de 400 m de cable al dia. Hem de treballar almenys 300 minuts al dia. Diàriament podem instal·lar un màxim de 20 televisors analògics i hem d'instal·lar, almenys, 6 televisors digitals. Per cada televisió analògica instal·lat obtenim uns ingressos de 10 €, i 15 € per cada televisió digital.

Mitjançant tècniques de programació lineal, representa la regió factible, calcula el nombre de televisors analògics i digitals que permeten obtenir ingressos diaris més grans i l'ingrés màxim diari que es pot aconseguir.

(Activitat de Selectivitat)

$x \rightarrow$ nre. de televisors analògics $y \rightarrow$ nre. de televisors digitals

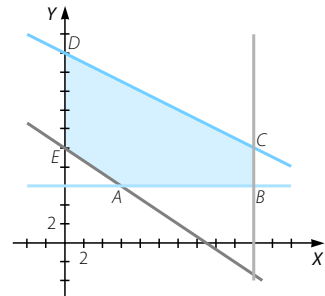
	Televisor analògic	Televisor digital	Total disponible	
Cable (m)	10	20	400	$\rightarrow 10x + 20y \leq 400$
Temps (min)	20	30	300	$\rightarrow 20x + 30y \geq 300$
Ingressos (€)	10	15		$\rightarrow f(x, y) = 10x + 15y$ $\rightarrow$ Funció objectiu

Maximitzar $f(x, y) = 10x + 15y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} 10x + 20y \leq 400 \\ 20x + 30y \geq 300 \\ 0 \leq x \leq 20 \\ y \geq 6 \end{array} \right\}$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(6, 6)$, $B(20, 6)$, $C(20, 10)$, $D(0, 20)$ i $E(0, 10)$.

Com que $f(A) = 150$, $f(B) = 290$, $f(C) = 350$, $f(D) = 300$ i $f(E) = 150$, el màxim s'aconsegueix en C , és a dir, cal instal·lar 20 televisors analògics i 10 televisors digitals per maximitzar els ingressos, que són de 350 €.



034

Una empresa fabrica dos tipus de peces, A i B. Cada peça ha de passar per tres departaments amb limitacions de temps. Les hores necessàries per a cada peça i els seus beneficis són:

	Dep. 1	Dep. 2	Dep. 3	Benefici
Peça A	2	5	2	11 €
Peça B	6	2	2	7 €
Hores disponibles	66	50	26	

Calcula la producció que maximitza el benefici.

- Planteja el problema.
- Resolució gràfica.
- Analitza gràficament què passa si el benefici de B es redueix en 4 €.

(Activitat de Selectivitat)

Programació lineal

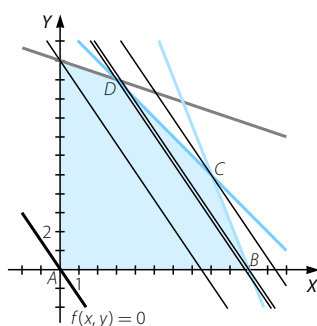
- a) $x \rightarrow$ nre. de peces A fabricades
 $y \rightarrow$ nre. de peces B fabricades

	Peça A	Peça B	Hores disponibles	
Dep. 1	2	6	66	$\rightarrow 2x + 6y \leq 66$
Dep. 2	5	2	50	$\rightarrow 5x + 2y \leq 50$
Dep. 3	2	2	26	$\rightarrow 2x + 2y \leq 26$
Benefici (€)	11	7	$\rightarrow f(x, y) = 11x + 7y$ $\rightarrow$ Funció objectiu	

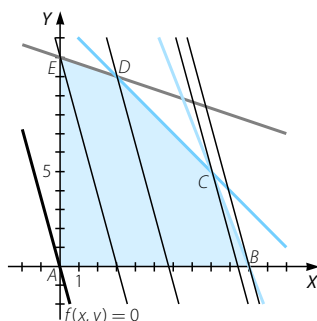
Maximitzar $f(x, y) = 11x + 7y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} 2x + 6y \leq 66 \\ 5x + 2y \leq 50 \\ 2x + 2y \leq 26 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$

- b) La regió factible està acotada amb vèrtexs $A(0, 0)$, $B(10, 0)$, $C(8, 5)$, $D(3, 10)$ i $E(0, 11)$. Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin per cadascun dels vèrtexs, observem que el màxim s'aconsegueix en C. Així doncs, per maximitzar el benefici han de fabricar 8 peces A i 5 peces B. El benefici màxim és de 123 €.



- c) Les restriccions són les mateixes, i la funció objectiu és: $f(x, y) = 11x + 3y$. Si tracem paral·leles a aquesta funció que passin pels vèrtexs, comprovem que el màxim s'aconsegueix en B. Així doncs, per maximitzar el benefici han de fabricar 10 peces A i cap peça B. El benefici màxim és de 110 €.



- 035 Per dotar de mobiliari urbà una zona de la ciutat, es volen col·locar almenys 20 peces entre fanals i jardineres. Hi ha 40 fanals i 12 jardineres disponibles. Es pretén que el nombre de jardineres col·locades no sigui superior a una tercera part del de fanals col·locats, però de manera que almenys un 20 % de les peces que es col·loquin siguin jardineres.

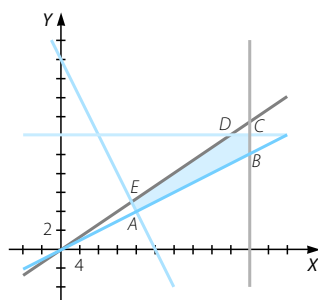
- a) Quines combinacions de peces de cada tipus es poden col·locar?
Planteja el problema i representa gràficament el conjunt de solucions.
- b) Quina combinació fa que la diferència entre el nombre de fanals i de jardineres col·locades sigui més gran? És la combinació en què es col·loquen més peces de mobiliari?

(Activitat de Selectivitat)

- a) $x \rightarrow$ nre. de fanals $y \rightarrow$ nre. de jardineres

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 40 \\ 0 \leq y \leq 12 \\ x + y \geq 20 \\ x \leq \frac{y}{3} \\ 0,20(x + y) \leq y \end{array} \right\} \text{ Les restriccions són: }$$

Gràficament és la regió del pla que té com a vèrtexs $A(16, 4)$; $B(40, 10)$; $C(40, 12)$; $D(36, 12)$ i $E(15, 5)$.



- b) Hem de maximitzar la funció $f(x, y) = |x - y|$ subjecte a les restriccions anteriors. Com que la regió està acotada, podem substituir els vèrtexs. I com que $f(A) = 12$, $f(B) = 30$, $f(C) = 28$, $f(D) = 24$ i $f(E) = 10$, el màxim s'aconsegueix en B , és a dir, perquè la diferència sigui més gran cal col·locar 40 fanals i 10 jardineres.
- No és la combinació en la qual s'instal·len més peces de mobiliari; això s'aconsegueix col·locant 40 fanals i 12 jardineres.

- 036 Una companyia de telefonia mòbil vol celebrar una jornada de «Consum raonable» i ofereix als clients l'oferta següent: 15 cèntims d'euro per cada missatge SMS i 25 cèntims d'euro per cada minut de conversa, inclòs el cost d'establiment de trucada. Imposa les condicions:

- El nombre de trucades d'un minut no pot ser més gran que el nombre de missatges augmentat en 3 ni més petit que el nombre de missatges disminuït en 3.
- Si se sumen el quintuple del nombre de missatges amb el nombre de trucades no pot obtenir-se més de 27.

- a) Dibuixa la regió factible.
- b) Determina el nombre de missatges i de trucades perquè el benefici sigui màxim.
- c) Quin és el benefici màxim?



(Activitat de Selectivitat)

Programació lineal

$x \rightarrow$ nre. de missatges SMS $y \rightarrow$ nre. de minuts de conversa telefònica

	Missatge SMS	Minut de conversa
Preu (cèntims)	15	25

$\rightarrow f(x, y) = 15x + 25y \rightarrow$ Funció objectiu

- a) Les restriccions són:
- $$\left. \begin{array}{l} x - 3 \leq y \leq x + 3 \\ 5x + y \leq 27 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

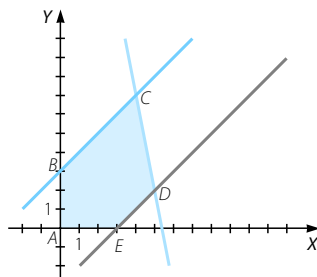
La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(0, 0)$; $B(0, 3)$; $C(4, 7)$; $D(5, 2)$ i $E(3, 0)$.

- b) Es tracta de maximitzar $f(x, y) = 15x + 25y$ subjecte a les restriccions següents:

Com que $f(A) = 0$; $f(B) = 75$; $f(C) = 235$;

$f(D) = 125$ i $f(E) = 45$, el màxim s'aconsegueix en C ; és a dir, per maximitzar el benefici cal enviar 4 missatges SMS i mantenir 7 minuts de conversa telefònica.

- c) El benefici màxim és de 235 cèntims.



- 037 Un fabricant de cotxes llença una oferta especial en dos models i ofereix el model A a un preu de 15.000 € i el model B a un preu de 20.000 €. L'oferta està limitada per les existències, que són 20 cotxes del model A i 10 del model B, i vol vendre, almenys, tantes unitats del model A com del model B.

D'altra banda, per cobrir les despeses d'aquesta campanya, els ingressos obtinguts han de ser, almenys, de 60.000 €.

- a) Planteja el problema i representa'n gràficament el conjunt de solucions.
b) Quants cotxes haurà de vendre de cada model per maximitzar els ingressos? Quin n'és l'import?

(Activitat de Selectivitat)

$x \rightarrow$ nre. de cotxes venuts del model A

$y \rightarrow$ nre. de cotxes venuts del model B

	Model A	Model B
Total de cotxes disponibles	20	10
Preu (€)	15.000	20.000

$\rightarrow x \leq 20$; $y \leq 10$

$\rightarrow f(x, y) = 15.000x + 20.000y$
 $\rightarrow$ Funció objectiu

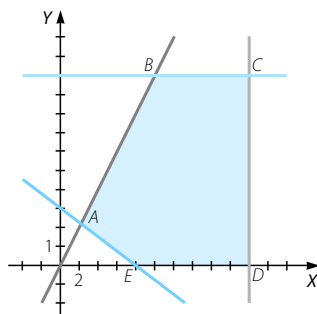
- a) Les restriccions són:

$$\left. \begin{array}{l} 15.000x + 20.000y \geq 60.000 \\ 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 10 \\ x \geq y \end{array} \right\}$$

La regió factible està acotada i té

com a vèrtexs $A\left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right)$; $B(10, 10)$;

$C(20, 10)$; $D(20, 0)$ i $E(4, 0)$.



b) Es tracta de maximitzar $f(x, y) = 15.000x + 20.000y$ subjecte a les restriccions anteriors.

Com que $f(A) = 60.000$, $f(B) = 350.000$, $f(C) = 500.000$, $f(D) = 300.000$ i $f(E) = 60.000$, el màxim s'aconsegueix en C; així doncs, ha de vendre 20 cotxes del model A i 10 cotxes del model B per maximitzar els ingressos. L'import és de 500.000 €.

038 Una companyia aèria té dos models d'avió (A i B) per cobrir tres trajectes diferents (T_1 , T_2 i T_3). El model A pot fer mensualment 10 vegades el trajecte T_1 , 30 vegades el T_2 i 50 vegades el T_3 . El model B pot fer mensualment 20 vegades cada un dels trajectes. La companyia s'ha compromès a efectuar almenys 80 vegades el trajecte T_1 , 160 vegades el T_2 i 200 vegades el T_3 .

Si el cost del combustible dels dos models és de 200.000 € mensuals, quant de temps ha de volar cada un d'aquests models perquè es compleixin els compromisos adquirits amb el cost mínim?



$x \rightarrow$ nre. de mesos d'activitat de l'avió A

$y \rightarrow$ nre. de mesos d'activitat de l'avió B

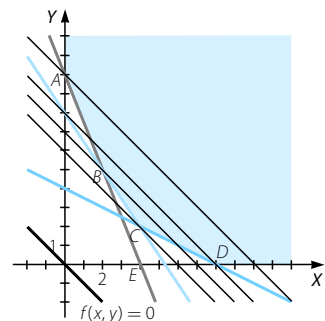
	Avió A	Avió B	Total	
Trajecte T_1	10	20	80	$\rightarrow 10x + 20y \geq 80$
Trajecte T_2	30	20	160	$\rightarrow 30x + 20y \geq 160$
Trajecte T_3	50	20	200	$\rightarrow 50x + 20y \geq 200$
Cost del combustible (€)	200.000	200.000		$\rightarrow f(x, y) = 200.000x + 200.000y$ $\rightarrow$ Funció objectiu

Minimitzar $f(x, y) = 200.000x + 200.000y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} 10x + 20y \geq 80 \\ 30x + 20y \geq 160 \\ 50x + 20y \geq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$

La regió factible no està acotada i té com a vèrtexs A(0, 10), B(2, 5), C(4, 2) i D(8, 0).

Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin pels vèrtexs, comprovem que el mínim s'aconsegueix en el vèrtex C; així doncs, per minimitzar costos cal que l'avió del model A voli 4 mesos i el del model B voli 2 mesos. El cost del combustible pujarà a 1.200.000 €



Programació lineal

039

Una empresa d'autobusos de diversos tipus i capacitats disposa, en un dia determinat, d'un màxim de 7 conductors i de 6 conductores. Rep l'encàrrec de transportar els 528 alumnes d'un centre docent a una excursió d'un dia de durada. Si un conductor porta un autobús de 44 places, aleshores les conductores han de portar obligatòriament els de 66 places. En canvi, si una conductora porta un autobús de 24 places, aleshores els conductors han de portar obligatòriament els de 72 places. La quantitat que cobra l'empresa és de 500 € al dia per conductor, independentment de si és home o dona.

- Representa la regió factible.
- Determina el nombre de conductors i el nombre de conductores perquè el benefici empresarial sigui màxim.
- Calcula aquest benefici màxim.

(Activitat de Selectivitat)

$x \rightarrow$ nre. de conductors $y \rightarrow$ nre. de conductores

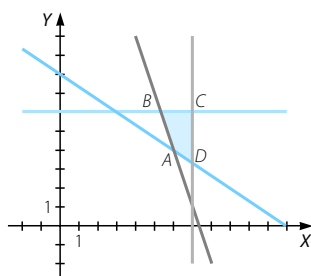
	Conductors	Conductores
Diners que cobren (€)	500	500

$\rightarrow f(x, y) = 500x + 500y \rightarrow$ Funció objectiu

Maximitzar $f(x, y) = 500x + 500y$

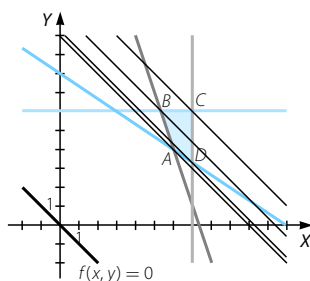
Subjecte a $\left. \begin{array}{l} 44x + 66y \geq 528 \\ 72x + 24y \geq 528 \\ 0 \leq x \leq 7 \\ 0 \leq y \leq 6 \end{array} \right\}$

- La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(6, 4)$; $B\left(\frac{16}{3}, 6\right)$; $C(7, 6)$ i $D\left(7, \frac{10}{3}\right)$.



- Es tracta de maximitzar $f(x, y) = 500x + 500y$ subjecte a les restriccions anteriors. Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin pels vèrtexs, comprovem que el màxim s'aconsegueix en el vèrtex C; així doncs, perquè el benefici empresarial sigui màxim necessiten 7 conductors i 6 conductores.

- El benefici màxim és de 6.500 €.



- 040 Un camioner transporta dos tipus de mercaderies, X i Y , i guanya 60 i 50 € per tona, respectivament. Ha de transportar, almenys, 8 tones de X i, com a molt, el doble de quantitat que de Y . A quant puja el seu guany total màxim si té un camió que pot transportar fins a 30 tones?

(Activitat de Selectivitat)



$x \rightarrow$ tones de la mercaderia X

$y \rightarrow$ tones de la mercaderia Y

	Mercaderia X	Mercaderia Y
Guany (€)	60	50

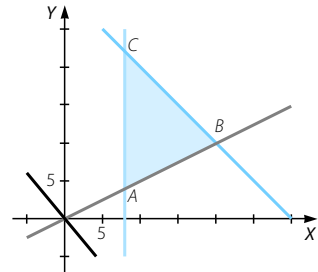
$\rightarrow f(x, y) = 60x + 50y \rightarrow$ Funció objectiu

Maximitzar $f(x, y) = 60x + 50y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} x \geq 8 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 30 \end{array} \right\}$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(8, 4)$, $B(20, 10)$ i $C(8, 22)$.

Com que $f(A) = 680$, $f(B) = 1.700$ i $f(C) = 1.850$, el màxim de la funció s'aconsegueix en B ; així doncs, per aconseguir els guany total màxim de 1.700 € han de transportar 20 tones de la mercaderia X i 10 tones de la mercaderia Y .



- 041 Un horticultor vol barrejar fertilitzants que proporcionin un mínim de 15 unitats de potassa, 20 unitats de nitrats i 24 unitats de fosfats. Cada unitat de la marca 1 proporciona 3 unitats de potassa, 1 de nitrats i 3 de fosfats, i costa 120 €. Cada unitat de la marca 2 proporciona 1 unitat de potassa, 5 de nitrats i 2 de fosfats, i té un cost de 60 €. Quina és la combinació de fertilitzants amb un cost menor que satisfà les especificacions desitjades?

- Planteja el problema.
- Resolució gràfica.
- Analitza gràficament què passa si el preu de la marca 2 augmenta en 20 €.

(Activitat de Selectivitat)

Programació lineal

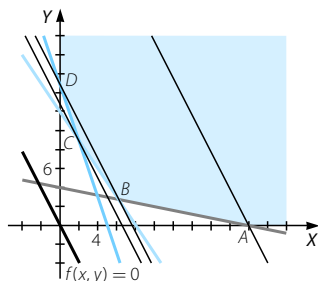
- a) $x \rightarrow$ unitats de la marca A
 $y \rightarrow$ unitats de la marca B

	Marca 1	Marca 2	Total	
Potassa	3	1	15	$\rightarrow 3x + y \geq 15$
Nitrats	1	5	20	$\rightarrow x + 5y \geq 20$
Fosfats	3	2	24	$\rightarrow 3x + 2y \geq 24$
Cost (€)	120	60		$\rightarrow f(x, y) = 120x + 60y$ $\rightarrow$ Funció objectiu

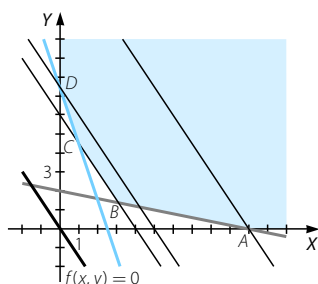
Minimitzar $f(x, y) = 120x + 60y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} 3x + y \geq 15 \\ x + 5y \geq 20 \\ 3x + 2y \geq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$

- b) La regió factible no està acotada, i té com a vèrtexs $A(20, 0)$; $B\left(\frac{80}{13}, \frac{36}{13}\right)$; $C(2, 9)$ i $D(0, 15)$. Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin pels vèrtexs, obtenim que el mínim s'aconsegueix en C. Així doncs, perquè el cost sigui el mínim possible cal agafar 2 unitats de la marca 1 i 9 unitats de la marca 2. El cost puja a 780 €.



- c) Si augmentem el preu de la marca 2 de 20 €, obtindríem la funció objectiu següent: $f(x, y) = 120x + 80y$, amb la qual cosa, si seguim el mateix procediment que a l'apartat b) comprovem que el mínim s'aconsegueix en tots els punts del segment BC. Com que estem parlant d'unitats de cadascuna de les marques, els valors han de ser enters; així doncs, els punts valen (6,3), (4,6) i (2,9), en els quals el cost puja a 960 €.



042

Mario's Pizza és productor de pizzas congelades de dos tipus, A i B. Obté un benefici d'1 € per cada pizza A que produeix i d'1,50 € per cada pizza tipus B. Cada pizza inclou una combinació de pasta de farina i de barreja de farcit, com s'indica en el quadre següent:



	Pasta de farina	Barreja de farcit	Benefici
Pizza A	1/2 kg	1/8 kg	1 €
Pizza B	1/2 kg	1/4 kg	1,50 €

Un dia qualsevol, disposa d'un màxim de 75 kg de pasta de farina i de 25 kg de barreja de farcit i, segons les comandes anteriors, ha de vendre diàriament almenys 50 pizzas de tipus A i, almenys, 25 pizzas de tipus B.

- Formula el sistema d'inequacions, representa gràficament la regió factible i calcula'n els vèrtexs.
- Quantes pizzas A i B haurà de fabricar diàriament per maximitzar els beneficis? Calcula aquests beneficis.

(Activitat de Selectivitat)

$x \rightarrow$ nre. de pizzas del tipus A

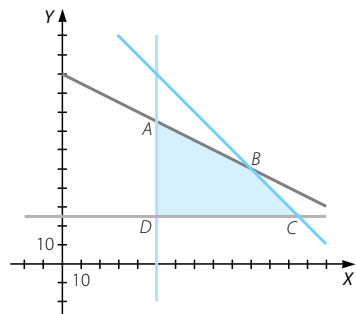
$y \rightarrow$ nre. de pizzas del tipus B

	Pizza A	Pizza B	Total disponible	
Pasta de farina	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	75	$\rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}y \leq 75$
Barreja de farcit	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	25	$\rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y \leq 25$
Beneficis (€)	1	1,5		$\rightarrow f(x, y) = x + 1,5y$ $\rightarrow$ Funció objectiu

- a) Les inequacions són:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}y \leq 75 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y \leq 25 \\ x \geq 50 \\ y \geq 25 \end{array} \right\}$$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs A(50, 75); B(100, 50); C(125, 25) i D(50, 25).



Programació lineal

b) Es tracta de maximitzar $f(x,y) = x + 1,5y$ subjecte a les restriccions anteriors.

Com que $f(A) = 162,5$, $f(B) = 175$, $f(C) = 162,5$ i $f(D) = 87,5$, el màxim s'aconsegueix en el vèrtex B ; així doncs, ha d'elaborar diàriament 100 pizzes del tipus A i 50 pizzes del tipus B perquè el benefici sigui màxim. Aquest benefici és de 175 €.

043 Per seguir una dieta per aprimar-se, es recomana un preparat dietètic que barreja dos productes A i B amb les condicions següents:

- La quantitat de producte B no ha de superar la quantitat de producte A .
- La quantitat de barreja ingerida no ha de superar els 200 grams.
- La quantitat de producte A no ha de superar els 150 grams.

Si, en cada gram, el producte A conté 0,4 g de vitamines i el producte B conté 0,3 g de vitamines:

a) Representa la regió factible.

b) Quants grams de cada producte s'ha d'incloure en la barreja per maximitzar-ne el contingut vitamínic?

(Activitat de Selectivitat)

$x \rightarrow$ grams del producte A

$y \rightarrow$ grams del producte B

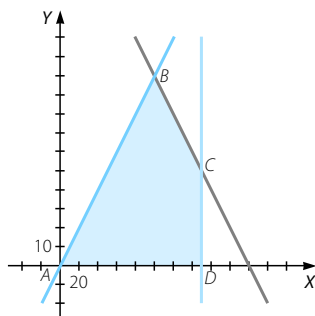
	Producte A	Producte B
Vitamines (g)	11	7

$\rightarrow f(x,y) = 0,4x + 0,3y \rightarrow$ Funció objectiu

a) Les restriccions són:

$$\left. \begin{array}{l} y \leq x \\ x + y \leq 200 \\ 0 \leq x \leq 150 \\ 0 \leq y \end{array} \right\}$$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(0, 0)$; $B(100, 100)$; $C(150, 50)$ i $D(150, 0)$.



b) Es tracta de maximitzar $f(x,y) = 0,4x + 0,3y$ subjecte a les restriccions anteriors.

Com que $f(A) = 0$, $f(B) = 70$, $f(C) = 75$ i $f(D) = 60$, el màxim s'aconsegueix en el vèrtex C . Així doncs, per maximitzar el contingut vitamínic han de prendre 150 grams del producte A i 50 grams del producte B .

- 044 En una refineria es produeixen dos tipus de fertilitzants a partir de quatre compostos: nitrogen, àcid fosfòric, potassi soluble i guano. A la taula següent s'expressa la composició per bidó d'aquests dos fertilitzants:

	Nitrogen	Àcid fosfòric	Potassi	Guano
Fertilitzant 1	20 litres	30 litres	30 litres	20 litres
Fertilitzant 2	10 litres	10 litres	60 litres	20 litres

L'empresa disposa de 900 litres de nitrogen i de 1.400 litres de guano, i les quantitats dels altres dos components no estan limitades, encara que a causa del gran estoc existent d'aquests dos productes cal utilitzar almenys 600 litres d'àcid fosfòric i 1.800 litres de potassi. Cada bidó del fertilitzant 1 suposa un benefici de 6 pessetes, i de 5 pessetes cada bidó de l'altre fertilitzant. Troba quina quantitat de fertilitzant de cada classe cal produir per obtenir un benefici màxim.

(Activitat de Selectivitat)

Plantegem el problema:

$x \rightarrow$ nre. de bidons de fertilitzant 1

$y \rightarrow$ nre. de bidons de fertilitzant 2

Condicions del problema:

$$\text{Nitrogen} \rightarrow (r_1): 20x + 10y \leq 900$$

$$\text{Guano} \rightarrow (r_2): 20x + 20y \leq 1.400$$

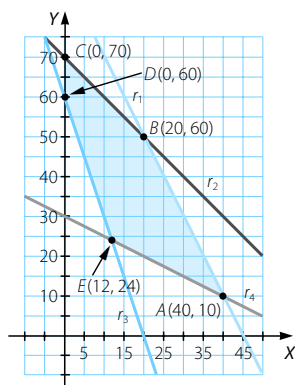
$$\text{Àcid fosfòric} \rightarrow (r_3): 30x + 10y \geq 600$$

$$\text{Potassi} \rightarrow (r_4): 30x + 60y \geq 1.800$$

$$\text{A més de les dues trivials: } (r_5): y \geq 0 \quad (r_6): x \geq 0$$

$$\text{Funció objectiu} \rightarrow F(x, y) = 5x + 6y$$

Dibuixem la regió factible i en calculem els vèrtexs:



Punts de tall:

$$r_1 \cap r_4 = A(40, 10) \quad r_1 \cap r_2 = B(20, 50) \quad r_2 \cap r_6 = C(0, 70)$$

$$r_3 \cap r_6 = D(0, 60) \quad r_3 \cap r_4 = E(12, 24)$$

Programació lineal

Substituïm aquests valors en la funció objectiu:

$$f(x, y) = 5x + 6y \rightarrow \begin{cases} A: f(40, 10) = 260 \text{ pts.} \\ B: f(20, 50) = 400 \text{ pts.} \\ C: f(0, 70) = 420 \text{ pts.} \\ D: f(0, 60) = 360 \text{ pts.} \\ E: f(12, 24) = 206 \text{ pts.} \end{cases}$$

El màxim benefici s'obté produint 70 bidons del fertilitzant 2.

045

En un taller de confecció es disposa de 80 metres quadrats de tela de cotó i de 120 metres quadrats de tela de llana. Es fan dos tipus de vestits, A i B. Per fer un vestit del tipus A es necessita 1 metre quadrat de cotó i 3 metres quadrats de llana; en canvi, per a un vestit del tipus B calen 2 metres quadrats de cada tipus de tela.

- Quants vestits de cada tipus s'han de fer per obtenir un benefici total màxim si per cada vestit (sigui del tipus que sigui) es guanyen 30 euros?
- Quina seria la conclusió a la pregunta anterior si per cada vestit del tipus A es guanyen 30 euros i, en canvi, per cada un del tipus B només es guanyen 20 euros?

(Activitat de Selectivitat)

Plantegem el problema:

$x \rightarrow$ nre. de vestits de tipus A $y \rightarrow$ nre. de vestits de tipus B

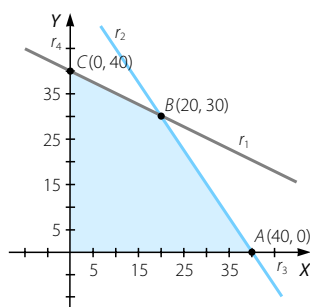
Condicions del problema:

Cotó $\rightarrow r_1: x + 2y \leq 80$

Llana $\rightarrow r_2: 3x + 2y \leq 120$

A més de les dues trivials: $r_3: y \geq 0$ $r_4: x \geq 0$

Dibuixem la regió factible i en calculem els vèrtexs:



Punts de tall:

$r_2 \cap r_3 = A(40, 0)$ $r_1 \cap r_2 = B(20, 30)$ $r_1 \cap r_4 = C(0, 40)$ $r_3 \cap r_4 = D(0, 0)$

Comprovem en cada cas el benefici:

a) Funció objectiu: $F(x, y) = 30x + 30y$

Substituïm aquests valors en la funció objectiu:

$$f(x, y) = 30x + 30y \rightarrow \begin{cases} A: f(40, 0) = 1.200 \text{ €} \\ B: f(20, 30) = 1.500 \text{ €} \\ C: f(0, 40) = 1.200 \text{ €} \\ D: f(0, 0) = 0 \text{ €} \end{cases}$$

El benefici màxim s'obté fent 20 vestits A i 30 de B.

b) Funció objectiu: $F(x, y) = 30x + 20y$

Substituïm aquests valors en la funció objectiu:

$$f(x, y) = 30x + 20y \rightarrow \begin{cases} A: f(40, 0) = 1.200 \text{ €} \\ B: f(20, 30) = 1.200 \text{ €} \\ C: f(0, 40) = 800 \text{ €} \\ D: f(0, 0) = \text{€} \end{cases}$$

El benefici màxim s'obté en qualsevol punt del segment AB . Hem de buscar els punts de coordenades enteres de la recta $x + 2y = 80$ entre els valors

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 40 \end{cases} \text{ i } \begin{cases} x = 20 \\ y = 30 \end{cases}. \text{ Com que } y = \frac{80 - x}{2}, \text{ els valors } x \text{ han de ser parells.}$$

La solució són els 11 parells de valors següents:

(0, 40) (2, 39) (4, 38) (6, 37)
(8, 36) (10, 35) (12, 34) (14, 33)
(16, 32) (18, 31) (20, 30)

- 046 Un pastisser té 150 kg de farina, 22 kg de sucre i 26 kg de mantega per fer dos tipus de pastissos. Es necessiten 3 kg de farina, 1 de sucre i 1 de mantega per fer una dotzena de pastissos del tipus A, mentre que les quantitats per una dotzena del tipus B són, respectivament, 6 kg, 0,5 kg i 1 kg. Si el benefici que s'obté per la venda d'una dotzena de pastissos del tipus A és 20 i per una dotzena del tipus B és 30, troba el nombre de dotzenes de pastissos de cada tipus que ha de produir per maximitzar el seu benefici.

(Activitat de Selectivitat)

Plantegem el problema:

$x \rightarrow$ nre. de dotzenes de pastissos de tipus A

$y \rightarrow$ nre. de dotzenes de pastissos de tipus B

Condicions del problema:

Per fer 1 dotzena de pastissos dels dos tipus necessitem:

1 dotzena de pastissos	Farina (kg)	Sucre (kg)	Mantega (kg)
Tipus A	3	1	1
Tipus B	6	0,5	1

Per tant, per fer x dotzenes de tipus A i y dotzenes de tipus B, tindrem:

dotzenes de pastissos	Farina (kg)	Sucre (kg)	Mantega (kg)
x de tipus A	$3x$	x	x
y de tipus B	$6y$	$0,5y$	y

Les condicions són:

$$\text{Farina} \rightarrow r_1: 3x + 6y \leq 150$$

$$\text{Sucre} \rightarrow r_2: x + 0,5y \leq 22$$

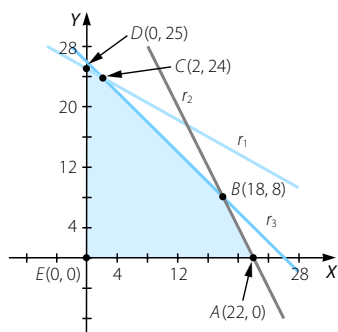
$$\text{Mantega} \rightarrow r_3: x + y \leq 26$$

A més de les dues trivials: $r_4: y \geq 0$ $r_5: x \geq 0$

Funció objectiu $\rightarrow f(x, y) = 20x + 30y$

Programació lineal

Dibuixem la regió factible i en calculem els vèrtexs:



Punts de tall:

$$\begin{aligned} r_2 \cap r_4 &= A(22, 0) & r_2 \cap r_3 &= B(18, 8) & r_1 \cap r_3 &= C(2, 24) \\ r_1 \cap r_5 &= D(0, 25) & r_4 \cap r_5 &= E(0, 0) \end{aligned}$$

Substituïm aquests valors en la funció objectiu:

$$f(x, y) = 20x + 30y \rightarrow \begin{cases} A: f(22, 0) = 440 \\ B: f(18, 8) = 600 \\ C: f(2, 24) = 760 \\ D: f(0, 25) = 750 \\ E: f(0, 0) = 0 \end{cases}$$

El màxim benefici s'obté amb 2 dotzenes de pastissos de tipus A i 24 de tipus B, i aquest benefici serà de 760.

047 En una prova es proposen 10 qüestions de 5 punts i 8 qüestions de 10 punts i es dona un temps de 100 minuts. Només es valoren els encerts; els errors o respostes en blanc no resten puntuació.

L'Anna, que està capacitada per contestar correctament totes les qüestions, necessita 4 minuts de mitjana per respondre a cada qüestió de 5 punts i 10 minuts per respondre a cada qüestió de 10 punts.

Quina estratègia ha de seguir l'Anna (és a dir, quantes preguntes de cada tipus ha de contestar) per obtenir la millor puntuació possible en les seves condicions?

(Activitat de Selectivitat)

Plantegem el problema:

$x \rightarrow$ nre. de qüestions de 5 punts (A)

$y \rightarrow$ nre. de qüestions de 10 punts (B)

Condicions del problema:

Qüestions A (de 5 punts) $\rightarrow (r_1): x \leq 10$

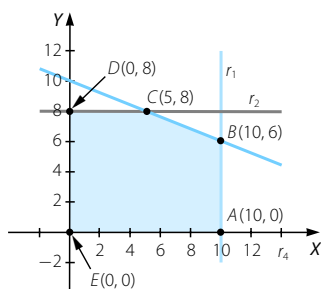
Qüestions B (de 10 punts) $\rightarrow (r_2): y \leq 8$

Temps $\rightarrow (r_3): 4x + 10y \leq 100$

A més de les dues trivials $\rightarrow (r_4): y \geq 0 \quad (r_5): x \geq 0$

Funció objectiu $\rightarrow F(x, y) = 5x + 10y$

Dibuixem la regió factible i en calculem els vèrtexs:



Punts de tall:

$$r_1 \cap r_4 = A(10, 0) \quad r_1 \cap r_3 = B(10, 6) \quad r_2 \cap r_3 = C(5, 8) \quad r_2 \cap r_5 = D(0, 8)$$

Substituïm aquests valors en la funció objectiu:

$$f(x, y) = 5x + 10y \rightarrow \begin{cases} A: f(10, 0) = 50 \text{ punts} \\ B: f(10, 6) = 110 \text{ punts} \\ C: f(5, 8) = 105 \text{ punts} \\ D: f(0, 8) = 80 \text{ punts} \\ E: f(0, 0) = 0 \text{ punts} \end{cases}$$

La millor estratègia és contestar 10 preguntes de 5 punts i 6 preguntes de 10 punts. I la puntuació que s'obtindrà serà de 110 punts.

048

Un entusiasta de la salut vol tenir un mínim de 36 unitats de vitamina A al dia, 28 unitats de vitamina C i 32 unitats de vitamina D. Cada pastilla de la marca 1 costa 0,03 € i proporciona 2 unitats de vitamina A, 2 de C i 8 de D. Cada pastilla de la marca 2 costa 0,04 € i proporciona 3 unitats de vitamina A, 2 de C i 2 de D. Quantes pastilles de cada marca haurà de comprar per a cada dia si vol cobrir les necessitats bàsiques amb el menor cost possible?

(Activitat de Selectivitat)

Plantegem el problema amb una taula que contingui les dades del problema:

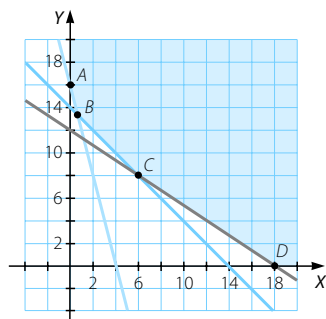
	Quantitat (pastilles)	Vitamina A	Vitamina B	Vitamina D	Cost (€)
Marca 1	x	$2x$	$2x$	$8x$	$0,03x$
Marca 2	y	$3y$	$2y$	$2y$	$0,04y$
Condicions	$x \geq 0, y \geq 0$	$2x + 3y \geq 36$	$2x + 2y \geq 28$	$8x + 2y \geq 32$	$0,03x + 0,04y$

Hem de minimitzar la funció cost $C(x, y) = 0,03x + 0,04y$ a la regió definida per les restriccions següents:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad x \geq 0 \\ (2) \quad y \geq 0 \\ (3) \quad 2x + 3y \geq 36 \\ (4) \quad 2x + 2y \geq 28 \\ (5) \quad 8x + 2y \geq 32 \end{array} \right\}$$

Programació lineal

La regió factible és:



Els punts de tal de les diferents rectes que defineixen la regió són:

$$r_1 \cap r_5 = A(0, 16) \quad r_4 \cap r_5 = B\left(\frac{2}{3}, \frac{40}{3}\right) \quad r_3 \cap r_4 = C(6, 8) \quad r_2 \cap r_3 = D(18, 0)$$

Per obtenir el mínim, calculem el valor de la funció cost en cada vèrtex ja que sabem que s'obté en un vèrtex o en un costat:

$$C(A) = 0,64 \quad C(B) = 0,5533 \quad C(C) = 0,5 \quad C(D) = 0,54$$

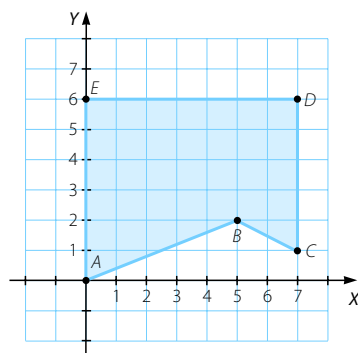
El cost mínim s'obté en el punt C, o sigui s'obté prenent 6 pastilles de la marca 1 i 8 pastilles de la marca 2, i el cost és 0,5 €/dia.

- 049 Decideix si el polígon de vèrtexs consecutius $A(0, 0)$, $B(5, 2)$, $C(7, 1)$, $D(7, 6)$ i $E(0, 6)$ és la regió factible d'un problema de programació lineal. Justifica la resposta.

(Activitat de Selectivitat)

Dibuixem la gràfica de la regió factible:

Com podem comprovar, és un polígon no convex, per la qual cosa no pot ser la regió factible d'un problema de programació lineal.



- 050 Un curs de segon de batxillerat d'un institut té un grup que està format per 20 noies i 10 nois, que volen organitzar un viatge de fi de batxillerat. A fi de recollir diners, troben una feina de fer enquestes. L'empresa contracta equips de joves per fer enquestes durant les tardes lliures que poden ser de dos tipus:

A: parelles d'un noi i una noia.

B: equips de tres noies i un noi.

Paguen a 40 € la tarda els equips A i a 90 € la tarda els equips B.

Com els convé distribuir-se per obtenir la major quantitat possible de diners?

Quina quantitat de diners obtindran per tarda treballada?

(Activitat de Selectivitat)

Programació lineal

Elaborem una taula amb les dades del problema:

	Teixit color (m)	Teixit blanc (m)	Hores de feina
Vestit A	2	1	4
Vestit B	2,50	0,5	3
Màxim	250	100	380

a) Restriccions del problema:

$$\text{Teixit color} \rightarrow (r_1): 2x + 2,5y \leq 250$$

$$\text{Teixit blanc} \rightarrow (r_2): x + 0,5y \leq 100$$

$$\text{Hores de treball} \rightarrow (r_3): 4x + 3y \leq 380$$

$$\text{A més de les dues trivials} \rightarrow (r_4): y \geq 0 \quad (r_5): x \geq 0$$

b) Representació gràfica

de la regió factible:

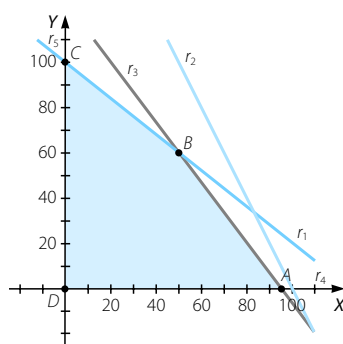
Els punts de tall són els següents:

$$r_3 \cap r_4 = A(95, 0)$$

$$r_1 \cap r_3 = B(50, 60)$$

$$r_1 \cap r_5 = C(0, 100)$$

$$r_4 \cap r_5 = D(0, 0)$$



c) El benefici que s'obté és $f(x, y) = 5x + 4y$ i el seu màxim estarà en un vèrtex. Calculem el valor d'aquest benefici en cadascun dels vèrtexs:

$$f(x, y) = 5x + 4y \rightarrow \begin{cases} A: f(95, 0) = 475 \text{ €} \\ B: f(50, 60) = 490 \text{ €} \\ C: f(0, 100) = 400 \text{ €} \\ D: f(0, 0) = 0 \text{ €} \end{cases}$$

El benefici màxim s'obté fabricant 50 vestits de tipus A i 60 de tipus B, i aquest benefici serà de 490 €.

d) Sobrants: En el cas que hem obtingut gastaran:

$$\text{— teixit de color: } 2 \cdot 50 + 2,5 \cdot 60 = 250 \text{ m} \rightarrow \text{no en sobra gens.}$$

$$\text{— teixit blanc: } 1 \cdot 50 + 0,5 \cdot 60 = 80 \text{ m} \rightarrow \text{sobran 20 m de teixit blanc}$$

052

En una empresa es fabriquen dos tipus de peces que nomenarem A i B. Per fabricar una peça de tipus A es necessiten 2 quilos d'un metall i per fer-ne una de tipus B, 4 quilos del mateix metall. L'empresa disposa com a màxim de 100 quilos de metall i no pot fabricar més de 40 peces de tipus A ni més de 20 de tipus B.

a) Dóna un sistema d'inequacions que representi les restriccions en la fabricació que té l'empresa.

b) Determina gràficament els punts del pla que verifiquen aquest sistema.

c) D'entre les solucions obtingudes, quins són els possibles valors de peces de cada tipus (han de ser enters) si es volen exhaurir els 100 quilos de metall? Explica detalladament què fas per trobar-los.

(Activitat de Selectivitat)

Plantegem el problema:

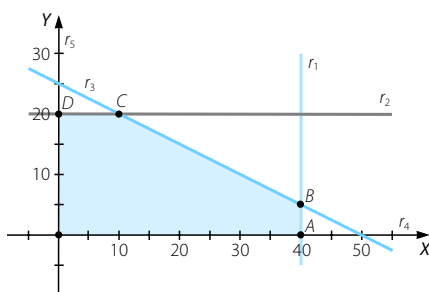
$x \rightarrow$ nre. de peces de tipus A

$y \rightarrow$ nre. de peces de tipus B

a) Restriccions:

$$\left. \begin{array}{l} (r_1) \quad x \leq 40 \\ (r_2) \quad y \leq 20 \\ (r_3) \quad 2x + 4y \leq 100 \\ (r_4) \quad x \geq 0 \\ (r_5) \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

b) Gràfica de la regió factible:



c) Possibles solucions:

Si volem exhaurir els 100 quilos de metall, el nombre de peces serà un punt de coordenades enters que estarà en el segment BC, en què B(40, 5) i C(10, 20).

Aquests valors han de complir que $2x + 4y = 100 \rightarrow y = \frac{100 - 2x}{4}$; per tant, x ha de ser múltiple de 2. Solucions:

(10, 20) (12, 19) (14, 18) (16, 17)
 (18, 16) (20, 15) (22, 14) (24, 13)
 (26, 12) (28, 11) (30, 10) (32, 9)
 (34, 8) (36, 7) (38, 6) (40, 5)

053

Una marca comercial utilitza tres ingredients A i B i C en l'elaboració de tres tipus de pizzes P1, P2 i P3. La pizza P1 s'elabora amb 1 unitat de A, 2 de B i 2 de C; la P2 s'elabora amb 2 unitats de A, 1 de B i 1 de C, i la P3 s'elabora amb 2 unitats de A, 1 de B i 2 de C.

El preu de venda al públic és de 4,80 € per a P1, 4,10 € per a P2 i 4,90 € per a P3. Sabent que el marge comercial (benefici) és d'1,60 € en cadascuna, troba quant costa cada unitat de A i B i C a la marca comercial esmentada.

(Activitat de Selectivitat)

Anomenem x, y i z els costos de les unitats dels ingredients A, B i C.

Plantegem el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 2z = 4,80 - 1,60 \\ 2x + y + z = 4,10 - 1,60 \\ 2x + y + 2z = 4,90 - 1,60 \end{array} \right\}$$

Programació lineal

Resolem per Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3,2 \\ 2 & 1 & 1 & 2,5 \\ 2 & 1 & 2 & 3,3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2F_1 - F_2 \rightarrow F_2 \\ 2F_1 - F_3 \rightarrow F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3,2 \\ 0 & 3 & 3 & 3,9 \\ 0 & 3 & 2 & 3,1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_3 \rightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3,2 \\ 0 & 3 & 3 & 3,9 \\ 0 & 0 & 1 & 0,8 \end{array} \right)$$

Que dona aquest sistema equivalent i la solució corresponent:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3,20 \\ 3y + 3z = 3,9 \\ z = 0,80 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0,6 \text{ €} \\ y = 0,5 \text{ €} \\ z = 0,8 \text{ €} \end{cases}$$

054

Un taller pot produir per dia com a màxim 12 articles del tipus A i 20 del tipus B. Cada dia el servei tècnic pot controlar un mínim de 20 articles i un màxim de 25, independentment del tipus.

- Siguin x i y el nombre d'articles produïts per dia dels tipus A i B, respectivament. Expressa les condicions anteriors mitjançant un sistema d'inequacions en x i y .
- Representa la regió del pla determinada per aquest sistema.
- Sabem que el benefici de produir els articles de tipus A és el doble del que s'obté amb els articles de tipus B. Troba quants articles de cada tipus ha de produir el taller per obtenir el benefici màxim.

(Activitat de Selectivitat)

- Condicions del problema:

$$\begin{cases} (r_1) & x \geq 0 \\ (r_2) & x \leq 12 \\ (r_3) & y \geq 0 \\ (r_4) & y \leq 20 \\ (r_5) & x + y \geq 20 \\ (r_6) & x + y \leq 25 \end{cases}$$

- Representació gràfica de la regió factible:

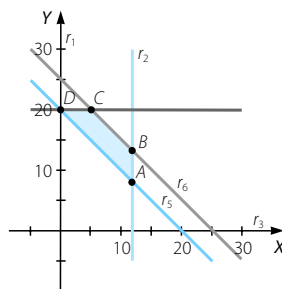
Els punts de tall són:

$$r_2 \cap r_5 = A(12, 8)$$

$$r_2 \cap r_6 = B(12, 13)$$

$$r_4 \cap r_6 = C(5, 20)$$

$$r_1 \cap r_4 = D(0, 20)$$



- Benefici màxim:

El benefici està determinat per la funció objectiu: $B(x, y) = k(2x + y)$.

Calculem el valor d'aquest benefici en cadascun dels vèrtexs:

$$B(x, y) = K(2x + y) \rightarrow \begin{cases} A: B(12, 8) = 32k \\ B: B(12, 13) = 37k \\ C: B(5, 20) = 30k \\ D: B(0, 20) = 20k \end{cases}$$

El benefici màxim s'obté produint 12 articles de tipus A i 13 productes de tipus B, i aquest benefici serà de 37 k.

- 055 Els alumnes d'un institut disposen de 300 samarretes, 400 llapis i 600 bolígrafs per finançar-se un viatge. Tenen la intenció de vendre'ls en dos tipus de lots: el lot A consta d'1 samarreta, 3 llapis i 2 bolígrafs i el venen per 9 €. El lot B consta d'1 samarreta, 2 llapis i 4 bolígrafs i el venen per 11 €. Calcula quants lots de cada tipus han de vendre per treure'n el benefici màxim i aquest benefici màxim.

(Activitat de Selectivitat)

Plantegem el problema:

$x \rightarrow$ nre. de lots de tipus A

$y \rightarrow$ nre. de lots de tipus B

Condicions del problema:

Per fer 1 lot de cada tipus es necessita:

	Samarretes	Llapis	Bolis
Tipus A	1	3	2
Tipus B	1	2	4

Per tant, per fer x lots de tipus A i y lots de tipus B, tindrem:

Lots	Samarretes	Llapis	Bolis
Tipus A (x)	x	$3x$	$2x$
Tipus B (y)	y	$2y$	$4y$

Les condicions són:

$$\left. \begin{array}{l} (r_1) \quad x \geq 0 \\ (r_2) \quad y \geq 0 \\ (r_3) \quad x + y \leq 300 \\ (r_4) \quad 3x + 2y \leq 400 \\ (r_5) \quad 2x + 4y \leq 600 \end{array} \right\}$$

Gràfica de la regió factible:

Els punts de tall són:

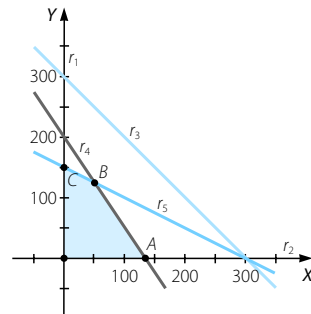
$$r_2 \cap r_3 = A(300, 0)$$

$$r_4 \cap r_5 = B(50, 125)$$

$$r_1 \cap r_5 = C(0, 150)$$

$$r_1 \cap r_2 = D(0, 150)$$

El benefici està determinat per la funció objectiu següent: $B(x, y) = 9x + 11y$.



Calculem el valor d'aquest benefici en cadascun dels vèrtexs:

$$B(x, y) = 9x + 11y \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A: B(300, 0) = 2.700 \text{ €} \\ B: B(50, 125) = 1.825 \text{ €} \\ C: B(0, 150) = 1.650 \text{ €} \\ D: B(0, 0) = 0 \text{ €} \end{array} \right.$$

El benefici màxim s'obté venent 50 lots de tipus A i 125 lots de tipus B, i aquest benefici serà de 1.825 €.

Programació lineal

056

En un jardí municipal es volen plantar un mínim de 1.200 geranis, 3.200 clavells i 3.000 margarides. Una empresa A ofereix un lot que conté 30 geranis, 40 clavells i 30 margarides per 15 €. Una altra empresa B ofereix un lot de 10 geranis, 40 clavells i 50 margarides per 12 €. L'Ajuntament compra x lots a l'empresa A i y lots a l'empresa B.

- Determina les inequacions que representen les restriccions a les quals estan sotmesos els valors de x i de y per tal que compleixin les condicions de la plantació.
- Representa gràficament la regió del pla que satisfà les inequacions.
- Troba el nombre de lots de cada tipus que fan que la despesa sigui mínima i calcula aquesta despesa mínima.
- Troba quants geranis, clavells i margarides adquireix l'Ajuntament amb la compra de preu mínim i quantes plantes i de quin tipus haurà adquirit per sobre del mínim que vol plantar.

(Activitat de Selectivitat)

Dades del problema:

$x \rightarrow$ nre. de lots de l'empresa A

$y \rightarrow$ nre. de lots de l'empresa B

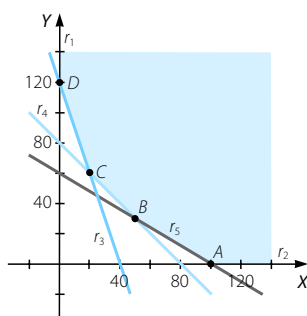
El total de flors que necessitem per plantar en funció dels lots és el següent:

Lots	Geranis	Clavells	Margarides
Empresa A (x)	$30x$	$40x$	$30x$
Empresa B (y)	$10y$	$40y$	$50y$

- a) Restriccions del problema:

$$\left. \begin{array}{l} (r_1) \quad x \geq 0 \\ (r_2) \quad y \geq 0 \\ (r_3) \quad 30x + 10y \geq 1.200 \\ (r_4) \quad 40x + 40y \geq 3.200 \\ (r_5) \quad 30x + 50y \geq 3.000 \end{array} \right\}$$

- b) Representació gràfica de la regió factible:



Els punts de tall són:

$$r_2 \cap r_5 = A(100, 0) \quad r_4 \cap r_5 = B(50, 30) \quad r_3 \cap r_4 = C(20, 60) \quad r_1 \cap r_3 = D(0, 120)$$

c) Despesa mínima.

La despesa està determinada per la funció objectiu següent:

$$D(x, y) = 15x + 12y.$$

Calculem el valor d'aquesta despesa en cadascun dels vèrtexs:

$$D(x, y) = 15x + 12y \rightarrow \begin{cases} A: B(100, 0) = 1.500 \text{ €} \\ B: B(50, 30) = 1.110 \text{ €} \\ C: B(20, 60) = 1.020 \text{ €} \\ D: B(0, 120) = 1.440 \text{ €} \end{cases}$$

Per tant, la despesa mínima s'obtindrà comprant 20 lots a l'empresa A i 60 lots a l'empresa B, i aquesta despesa és de 1.020 €.

d) Amb aquesta compra, la quantitat de flors en cada cas és:

$$\text{Geranis: } 30 \cdot 20 + 10 \cdot 60 = 1.200$$

$$\text{Clavells: } 40 \cdot 20 + 40 \cdot 60 = 3.200$$

$$\text{Margarides: } 30 \cdot 20 + 50 \cdot 60 = 3.600$$

Sobren 600 margarides.

057

Un taller de confecció fa jaquetes i pantalons per a criatures. Per a fer una jaqueta es necessiten 1 m de roba i 2 botons, i per a fer uns pantalons calen 2 m de roba, 1 botó i 1 cremallera. El taller disposa de 500 m de roba, 400 botons i 225 cremalleres. El benefici que s'obté per la venda d'una jaqueta és de 20 € i per la d'uns pantalons és de 30 €. Suposant que es ven tot el que es fabrica:

- Calcula el nombre de jaquetes i de pantalons que s'han de fer per tal d'obtenir un benefici màxim. Determina també aquest benefici màxim.
- Si el material sobrant es ven a 1 € el metre de roba, a 0,20 € cada cremallera i a 0,01 € cada botó, calcula quant es pot obtenir de la venda del que ha sobrat.

(Activitat de Selectivitat)

Plantegem el problema:

$x \rightarrow$ nre. de jaquetes

$y \rightarrow$ nre. de pantalons

Condicions del problema:

Per fer aquestes quantitats, necessitem:

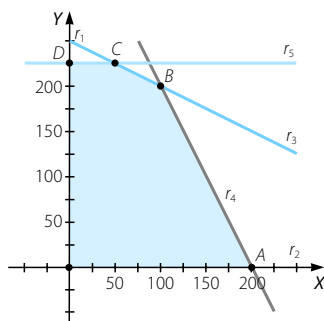
	Roba	Botons	Cremalleres
Jaquetes (x)	x	$2x$	0
Pantalons (y)	$2y$	y	y

a) Les condicions del problema són:

$$\left. \begin{array}{l} (r_1) \quad x \geq 0 \\ (r_2) \quad y \geq 0 \\ (r_3) \quad 30x + 10y \geq 1.200 \\ (r_4) \quad 40x + 40y \geq 3.200 \\ (r_5) \quad 30x + 50y \geq 3.000 \end{array} \right\}$$

Programació lineal

La gràfica de la regió factible és:



Els punts de tall són:

$$\begin{aligned} r_2 \cap r_4 &= A(200, 0) & r_3 \cap r_4 &= B(100, 200) & r_3 \cap r_5 &= C(50, 225) \\ r_1 \cap r_5 &= D(0, 225) & r_1 \cap r_2 &= D(0, 0) \end{aligned}$$

El benefici està determinat per la funció objectiu següent:

$$B(x, y) = 20x + 30y.$$

Calculem el valor d'aquest benefici en cadascun dels vèrtexs:

$$B(x, y) = 20x + 30y \rightarrow \begin{cases} A: B(20, 0) = 4.000 \text{ €} \\ B: B(100, 200) = 8.000 \text{ €} \\ C: B(50, 225) = 7.750 \text{ €} \\ D: B(0, 225) = 6.750 \text{ €} \\ E: B(0, 0) = 0 \text{ €} \end{cases}$$

El benefici màxim s'obté fent 100 jaquetes i 200 pantalons, i és de 8.000 €.

b) Sobrants.

El material que sobra és el següent:

$$\text{-- Roba: } 1 \cdot 100 + 2 \cdot 200 = 500$$

$$\text{-- Botons: } 2 \cdot 100 + 1 \cdot 200 = 400$$

$$\text{-- Cremalleres: } 0 \cdot 100 + 1 \cdot 200 = 200$$

Per tant, sobren $225 - 200 = 25$ cremalleres, a 0,2 €, dóna un benefici extra de 5 €.

058 En un taller fabriquen dos tipus de bosses. Per fer una bossa del primer model es necessiten 0,9 m² de cuir i 8 hores de feina. Per al segon model necessiten 1,2 m² de cuir i 4 hores de feina. Per a fer aquests dos tipus de bosses el taller disposa de 60 m² de cuir i pot dedicar-hi un màxim de 400 hores de feina.

a) Expressa, mitjançant un sistema d'inequacions, les restriccions a les quals està sotmesa la producció d'aquests dos models de bosses.

b) Representa la regió solució d'aquest sistema i troba'n els vèrtexs.

(Activitat de Selectivitat)

Plantegem el problema:

$x \rightarrow$ nre. de bosses model 1

$y \rightarrow$ nre. de bosses model 2

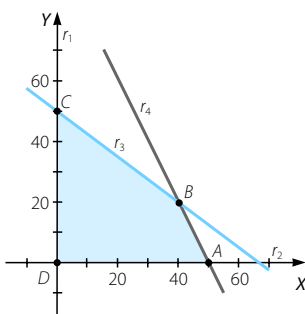
a) Condicions del problema:

Nre. bosses	Cuir (m ²)	Feina (hores)
Model 1 (x)	$0,9x$	$8x$
Model 2 (y)	$1,2y$	$4y$

Restriccions:

$$\left. \begin{array}{l} (r_1) \quad x \geq 0 \\ (r_2) \quad y \geq 0 \\ (r_3) \quad 0,9x + 1,2y \leq 60 \\ (r_4) \quad 8x + 4y \leq 400 \end{array} \right\}$$

b) Gràfica de la regió factible:



Els punts de tall són els següents:

$$\begin{aligned} r_2 \cap r_4 &= A(50, 0) & r_3 \cap r_4 &= B(40, 20) & r_1 \cap r_3 &= C(0, 50) \\ r_1 \cap r_2 &= D(0, 0) \end{aligned}$$

059

Una empresa de mobles fabrica dos models d'armaris, A i B. Per al model A calen 5 h 30 min de feina i 2 m de fusta. Per al model B calen 4 h de feina i 3 m de fusta. L'empresa no pot fabricar més de 430 armaris per setmana, disposa de 2.800 h de feina i de 1.200 m de fusta. Els armaris de tipus A i B proporcionen, respectivament, 250 € i 310 € de benefici cadascun. Determina el nombre d'armaris de cada tipus que s'han de fabricar per obtenir el benefici màxim.

(Activitat de Selectivitat)

Plantegem el problema:

$x \rightarrow$ nre. d'armaris del model A $y \rightarrow$ nre. d'armaris del model B

Per fabricar aquests armaris, necessitem:

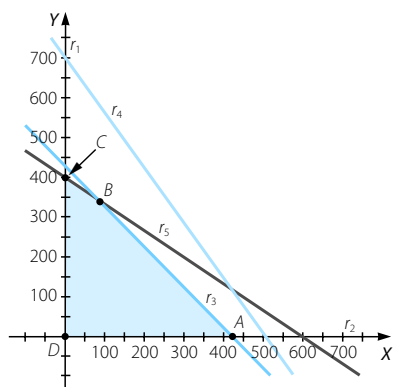
	Feina (hores)	Fusta (m ²)
Model A (x)	$5,5x$	$2x$
Model B (y)	$4y$	$3y$

Les condicions del problema són:

$$\left. \begin{array}{l} (r_1) \quad x \geq 0 \\ (r_2) \quad y \geq 0 \\ (r_3) \quad x + y \leq 430 \\ (r_4) \quad 5,5x + 4y \leq 2.800 \\ (r_5) \quad 2x + 3y \leq 1.200 \end{array} \right\}$$

Programació lineal

La gràfica de la regió factible és:



Els punts de tall són:

$$\begin{aligned} r_2 \cap r_3 &= A(430, 0) & r_3 \cap r_5 &= B(90, 340) & r_1 \cap r_5 &= C(0, 400) \\ r_1 \cap r_2 &= D(0, 0) \end{aligned}$$

El benefici està determinat per la funció objectiu següent:

$$B(x, y) = 250x + 310y.$$

Calculem el valor d'aquest benefici en cadascun dels vèrtexs:

$$B(x, y) = 250x + 310y \rightarrow \begin{cases} A: B(430, 0) = 107.500 \text{ €} \\ B: B(90, 340) = 127.900 \text{ €} \\ C: B(0, 400) = 124.000 \text{ €} \\ D: B(0, 0) = 0 \text{ €} \end{cases}$$

El benefici màxim s'obindrà fabricant 90 armaris del model A i 340 armaris del model B, i aquest benefici serà de 127.900 €.

060 Un estudiant dedica part del seu temps a repartir propaganda publicitària. L'empresa A li paga 4 cèntims per cada imprès repartit, i l'empresa B, amb fullatons més grans, li paga 7 cèntims per imprès. L'estudiant porta dues bosses: una per a impresos A, on n'hi caben 150, i una altra per a impresos B, on n'hi caben 90. Ha calculat que cada dia és capaç de repartir 200 impresos com a màxim. L'estudiant es pregunta: quants impresos hauré de repartir de cada classe perquè el benefici diari sigui màxim?

Plantegem el problema:

$x \rightarrow$ nre. d'impresos de l'empresa A

$y \rightarrow$ nre. d'impresos de l'empresa B

Condicions del problema:

$$\left. \begin{aligned} (r_1) \quad & x \geq 0 \\ (r_2) \quad & y \geq 0 \\ (r_3) \quad & x \leq 150 \\ (r_4) \quad & y \leq 90 \\ (r_5) \quad & x + y \leq 200 \end{aligned} \right\}$$

La gràfica de la regió factible és:

Els punts de tall són:

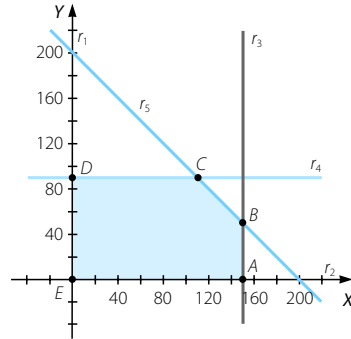
$$r_2 \cap r_3 = A(150, 0)$$

$$r_3 \cap r_5 = B(150, 50)$$

$$r_4 \cap r_5 = C(110, 90)$$

$$r_1 \cap r_4 = D(0, 90)$$

$$r_1 \cap r_2 = E(0, 0)$$



El benefici (en euros) està determinat per la funció objectiu següent:

$B(x, y) = \frac{1}{100}(4x + 7y)$. Calculem el valor d'aquest benefici en cadascun dels vèrtexs:

$$B(x, y) = \frac{1}{100}(4x + 7y) \rightarrow \begin{cases} A: B(150, 0) = 6 \text{ €} \\ B: B(150, 50) = 9,5 \text{ €} \\ C: B(110, 90) = 10,9 \text{ €} \\ D: B(0, 90) = 6,3 \text{ €} \end{cases}$$

El benefici màxim s'obtindrà repartint 110 impresos de l'empresa A i 90 impresos de l'empresa B, i aquest benefici serà de 10,9 €.

PREPARA LA SELECTIVATAT

(Activitats de Selectivitat)

- 1 Dos compostos medicinals tenen dos principis actius A i B. Per cada píndola, el primer compost té 2 unitats de A i 6 de B, mentre que el segon compost té 4 unitats de A i 4 unitats de B. Durant un període de temps, un pacient ha de rebre un mínim de 16 unitats del tipus A i un mínim de 24 unitats del tipus B. Si el cost de cada píndola del primer compost és de 0,50 € i el cost de cada píndola del segon compost és de 0,90 €:

- Representa la regió factible.
- Calcula el nombre òptim de píndoles de cada compost que ha de rebre el pacient per minimitzar els costos.

a) $x \rightarrow$ nre. d'unitats del primer compost

$y \rightarrow$ nre. d'unitats del segon compost

	Compost 1	Compost 2	Nre. d'unitats
Principi A	2	4	16
Principi B	6	4	24
Cost (€)	0,50	0,90	

$$\rightarrow 2x + 4y \geq 16$$

$$\rightarrow 6x + 4y \geq 24$$

$$\rightarrow f(x, y) = 0,50x + 0,90y$$

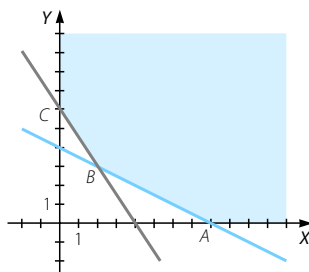
$\rightarrow$ Funció objectiu

Programació lineal

La regió factible està determinada per:

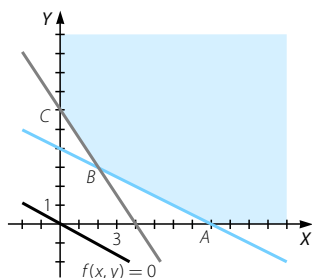
$$\left. \begin{array}{l} 2x + 4y \geq 16 \\ 6x + 4y \geq 24 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Es tracta d'una regió factible no acotada amb vèrtexs $A(8, 0)$; $B(2, 3)$ i $C(0, 6)$.



- b) Es tracta de minimitzar la funció $f(x, y) = 0,50x + 0,90y$ subjecte a les restriccions anteriors.

Gràficament, si tracem rectes paral·leles a la funció objectiu que passin pels vèrtexs, comprovem que el mínim s'aconsegueix en el vèrtex B ; així doncs, el pacient ha de prendre 2 píndols del primer compost i 3 píndols del segon per minimitzar costos, que pugen a 3,70 €.



- 2 Una empresa fabrica dos tipus de televisors (T_{21} i T_{14}) de 21 i 14 polzades, a un cost per televisior de 100 i 50 €, respectivament. Sabem que el nombre de televisors T_{21} fabricats diàriament no supera en 4 unitats als T_{14} , i que entre tots dos no superen diàriament els 30 televisors. També sabem que el procés productiu no permet fabricar diàriament menys de 2 televisors T_{21} ni menys de 5 televisors T_{14} .

- Formula el sistema d'inequacions associat a l'enunciat.
- Dibuixa la regió factible i calcula'n els vèrtexs.
- Calcula quants televisors T_{21} i T_{14} maximitzen el cost de producció diària i quants la minimitzen.

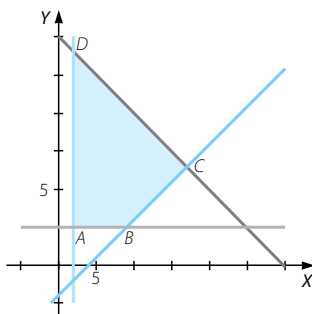
- $x \rightarrow$ nre. d'unitats de T_{21}
 $y \rightarrow$ nre. d'unitats de T_{14}

$$\left. \begin{array}{l} x \leq y + 4 \\ x + y \leq 30 \\ x \geq 2 \\ y \geq 5 \end{array} \right\}$$

- La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(2, 5)$, $B(9, 5)$, $C(17, 13)$ i $D(2, 28)$.

- c) Es tracta de maximitzar i minimitzar la funció $f(x, y) = 100x + 50y$ subjecte a les restriccions de l'apartat a).

Com que $f(A) = 450$, $f(B) = 1.150$, $f(C) = 2.350$ i $f(D) = 1.600$, el màxim s'aconsegueix en C, i el mínim, en A. La conclusió és que per maximitzar el cost de producció cal fabricar 17 televisors de 21 polzades i 13 televisors de 14 polzades, i per minimitzar el cost de producció han de fabricar 2 televisors de 21 polzades i 5 televisors de 14 polzades.



- 3 Una aerolínia vol optimitzar el nombre de files de classe preferent i de classe turista en un avió. La longitud útil de l'avió per instal·lar les files de seients és de 104 m, i es necessiten 2 m per instal·lar una fila de classe preferent i 1,5 m per a les de classe turista. L'aerolínia ha d'instal·lar almenys 3 files de classe preferent i que les files de classe turista siguin com a mínim el triple que les de classe preferent. Els beneficis per fila de classe turista són de 152 € i de 206 € per a la classe preferent. Quantes files de classe preferent i quantes de classe turista han d'instal·lar per obtenir el benefici màxim? Indica aquest benefici.

$x \rightarrow$ nre. de files de classe preferent $y \rightarrow$ nre. de files de classe turista

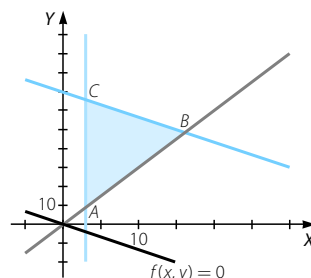
	Preferent	Turista	Total	
Longitud (m)	2	1,5	104	$\rightarrow 2x + 1,5y \leq 104$
Beneficis (€)	206	152		$\rightarrow f(x, y) = 206x + 152y$ $\rightarrow$ Funció objectiu

Maximitzar $f(x, y) = 206x + 152y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} 2x + 1,5y \leq 104 \\ x \geq 3 \\ y \geq 3x \end{array} \right\}$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs A(3, 9); B(16, 48) i C(3; 65,3).

Com que $f(A) = 1.986$, $f(B) = 10.592$ i $f(C) = 10.548,6$, el màxim s'aconsegueix en el vèrtex B; així doncs, han d'instal·lar 16 files de classe preferent i 48 files de classe turista per obtenir el benefici màxim, que és de 10.592 €



Programació lineal

- 4 Una empresa fabrica dos productes P1 i P2 que es venen a 50 € i 44 € la unitat, respectivament. Per elaborar-los lloga dues màquines, M1 i M2, a un preu de 5 € per hora i 6 € per hora, respectivament. Les hores de funcionament de cada màquina que calen per a la fabricació d'una unitat de cada producte i la disponibilitat màxima setmanal de cada màquina estan expressades en la taula següent:

	Producte P1	Producte P2	Disponibilitat
M1	2 hores	4 hores	80 hores
M2	4 hores	2 hores	100 hores

El cost del material utilitzat en la fabricació d'una unitat del producte P1 és de 10 € i en una unitat del producte P2 és de 8 €. Es vol saber quantes unitats de cada producte s'han de fabricar per maximitzar el benefici.

- Planteja el problema.
- Troba'n la solució gràficament.
- Analitza gràficament què passa si el preu de P2 es redueix en 2 €.

- $x \rightarrow$ nre. d'unitats del producte P1
- $y \rightarrow$ nre. d'unitats del producte P2

	Producte P1	Producte P2	Disponibilitat	Preu per hora	
M1	2	4	80	5	$\rightarrow 2x + 4y \leq 80$
M2	4	2	100	6	$\rightarrow 4x + 2y \leq 100$
Cost de material per unitat	10	8			
Preu de venda per unitat	50	44			
Cost de material + mà d'obra	44	40			
Benefici unitat	6	4			

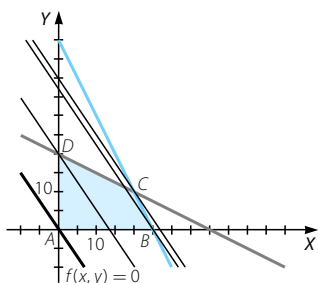
Despeses del producte P1 $\rightarrow 10$ € de producte + 2 hores de M1 $\cdot 5$ €/hora + 4 hores de M2 $\cdot 6$ €/hora = $10 + 10 + 24 = 44$ €

Despeses del producte P2 $\rightarrow 8$ € de producte + 4 hores de M1 $\cdot 5$ €/hora + 2 hores de M2 $\cdot 6$ €/hora = $8 + 20 + 12 = 40$ €

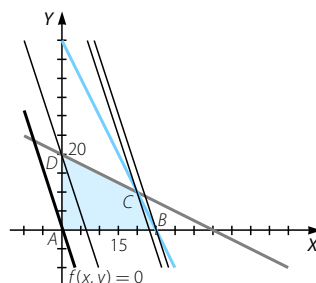
Maximitzar $f(x, y) = 6x + 4y$

Subjecte a $\left. \begin{array}{l} 2x + 4y \leq 80 \\ 4x + 2y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$

- Obtenim una regió factible acotada amb vèrtexs A(0, 0), B(25, 0), C(20, 10) i D(0, 20). Si tracem paral·leles a la funció objectiu que passin pels vèrtexs, comprovem que el màxim s'aconsegueix en C. Això vol dir que han de fabricar 20 unitats del producte P1 i 10 unitats del producte P2 per maximitzar el benefici, que és de 160 €.



- c) Si reduïm de 2 € el preu del producte P2, obtenim 42 €, en lloc de 44 €. Com que el preu de cost continua sent de 40 €, el guany per unitat és de 2 € i, per tant, la funció objectiu és $f(x, y) = 6x + 2y$. Si tracem paral·leles a aquesta funció que passin per tots els vèrtexs, comprovem que el màxim s'aconsegueix en el vèrtex B, és a dir, per maximitzar el benefici han de fabricar 25 unitats del producte P1 i cap unitat del producte P2. El valor és de 150 €.



- 5 La candidatura d'un grup polític per a les eleccions municipals ha de complir els requisits següents: el nombre total de components de la candidatura ha d'estar comprès entre 6 i 18 i el nombre d'homes (x) no ha d'excedir del doble del nombre de dones (y).

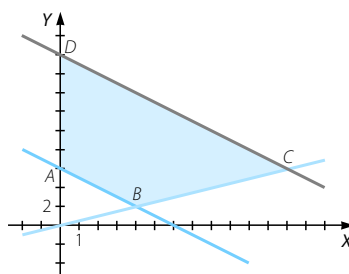
- a) Representa el recinte associat a aquestes restriccions i calcula'n els vèrtexs.
b) Quin és el nombre més gran d'homes que pot tenir una candidatura que compleixi les condicions?

- a) $x \rightarrow$ nombre d'homes
 $y \rightarrow$ nombre de dones

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6 \leq x + y \leq 18 \\ x \leq 2y \end{array} \right\}$$

La regió factible està acotada i té com a vèrtexs $A(0, 6)$; $B(4, 2)$; $C(12, 6)$ i $D(0, 18)$.

- b) Es tracta de maximitzar la funció, que és la que ens dona el nombre d'homes. Substituïm els vèrtexs i obtenim $f(A) = 0$, $f(B) = 4$, $f(C) = 12$ i $f(D) = 0$; així doncs, 12 homes és el nombre màxim que pot tenir una candidatura que compleixi les condicions de l'enunciat.



LITERATURA I MATEMÀTIQUES

El nombre de Déu

—És magnífica, pare, no hi ha cap catedral igual en tot el món. [...]

—Sí, és un edifici extraordinari, però ja fa alguns anys que diverses ciutats estan construint catedrals amb les quals aspiren a superar Chartres. Les de París, Reims i Amiens són més grans, i a Anglaterra comencen a edificar alguns temples de mida desmesurada. Però estan equivocats; l'important, el que fa realment bella una catedral no és la mida, ni tan sols la lluminositat dels vitralls, ni la qualitat de les escultures. La bellesa, fill, és en la proporció. Una catedral ha de ser com el cos humà, sens dubte la millor obra de Déu: harmònic en les proporcions, elegant en les mesures i d'aspecte aïrós però serè.

»El teu oncle et va ensenyar el nombre secret de la proporció, i ho va fer massa aviat. En aquest nombre es guarda tot el misteri de la bellesa d'aquest nou estil, en el nombre de Déu.

—La unitat per la unitat més dos terços —digué l'Enrique.

—Així és. Aquestes proporcions expressen les mesures del rectangle perfecte, i a partir d'ell s'estableixen totes les mesures, totes les relacions i proporcions d'una catedral. [...] Sense les proporcions geomètriques del nombre de Déu no podríem construir aquestes catedrals, almenys no tan belles. [...]

»Déu ha anat deixant senyals perquè els homes trobéssim, finalment, la clau d'aquest nombre. Aquest nombre ha estat sempre en les proporcions de les obres de la Bíblia. En el llibre del Gènesi, Déu ordenà a Noè que construís l'arca segons unes mesures que va donar-li en colzes. L'arca on Noè embarcà una parella de cada espècie d'animals tenia cinquanta colzes d'ample per trenta d'alt, i tres-cents de llarg. Fixa't en les proporcions: la raó entre l'amplada i l'altura és el nombre de Déu. I la longitud és deu vegades l'altura, i la seva relació amb l'amplada és per tant la dècima part del nombre diví.

»Però això no és tot, fill. En el llibre de l'Èxode, Déu manà a Moisès, quan va pujar per segona vegada al mont Sinai per cercar les taules de la Llei, que fabriqués una arca de fusta d'acàcia i la folrés d'or. [...] I igual que en cas de l'arca de la salvació, també va donar-li unes mesures: l'Arca de l'Aliança hauria de tenir dos colzes i mig de llarg per un i mig d'ample i un i mig d'alt. Fixa-t'hi, una altra vegada el nombre de Déu.

JOSÉ LUIS CORRAL [text adaptat]

El nombre de Déu

José Luis Corral

La novel·la es desenvolupa durant l'edat mitjana, al segle XIII. A l'argument s'entrellacen diverses històries relacionades amb l'amor, amb la lluita pel poder i, sobretot, amb la construcció de tres catedrals: la de Chartres, la de Burgos i la de Lleó.

Al paràgraf seleccionat, el mestre Juan de Rouen explica al seu fill Enrique els principis bíblics en els quals ha fonamentat les proporcions de la catedral de Chartres, que acaba de construir.

—Tan sols falta que també tinguéss aquestes proporcions el temple de Salomó

—va suposar l'Enrique.

—No. Ja ho he comprovat. El temple de Salomó tenia seixanta colzes de llarg, trenta d'alt i vint d'ample. No són les proporcions àuries, perquè si agafem aquesta amplada hauria d'haver fet trenta-tres colzes d'alt i seixanta-sis i mig de llarg.

—I doncs?

—No ho sé; al llibre Primer dels Reis es diu que el rei Salomó va decidir pel seu compte erigir un temple a Jerusalem en honor de Déu. A diferència de les dues arques, les mides de les quals el Senyor va indicar amb precisió, Salomó va edificar el temple segons el seu criteri. I ho va fer amb les mides més simples; humanes, podríem dir.

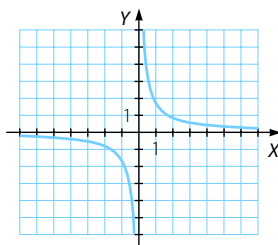
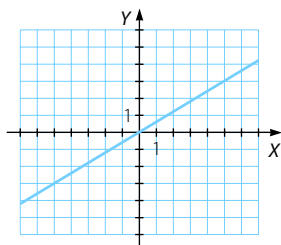
Va fer servir la mida de l'amplada del temple com a referència: així, per a la longitud, la va multiplicar per tres, i pel que fa a l'altura, va sumar l'amplada més la seva meitat; senzill, és a dir, humana.

Aquesta novel·la és interessant per la visió que dona d'aquella època en paral·lel amb les històries humanes que desenvolupa.

Escriu les expressions algebraiques que corresponen a les funcions de proporcionalitat directa i inversa amb la constant de proporcionalitat que descriu el text. Representa-les gràficament. Quines diferències hi ha entre les dues gràfiques?

La constant de proporcionalitat és: $1 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$

Així doncs, les funcions de proporcionalitat són: $f(x) = \frac{5}{3}x$ i $g(x) = \frac{5}{3x}$

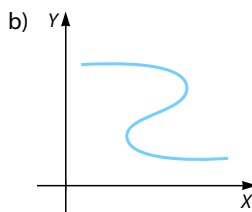
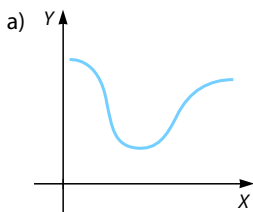


La funció de proporcionalitat directa és una recta que passa per l'origen de coordenades, és una funció contínua i creixent. La funció de proporcionalitat inversa és una hipèrbola formada per dues branques, no és contínua en $x = 0$ i és decreixent en el seu domini.

Límits i continuïtat de funcions

ABANS DE COMENÇAR... RECORDA

001 Justifica si les gràfiques següents corresponen a funcions.



- a) La gràfica correspon a una funció, perquè a cada valor de x correspon un únic valor de y .
- b) La gràfica no correspon a una funció, perquè hi ha valors de x als quals correspon més d'un valor de y .

002 Factoritza aquest polinomi:

$$P(x) = 7x^5 + 14x^4 - 35x^3 - 42x^2$$

$$P(x) = 7x^2(x-2)(x+1)(x+3)$$

003 Determina la factorització d'aquests polinomis:

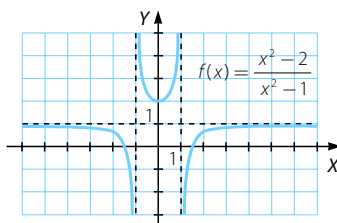
a) $x^2 + 2x + 1$ c) $x^4 - 2x^3 + x^2$

b) $x^2 - 4$ d) $9x^3 - 25x$

- a) $(x+1)^2$
b) $(x-2)(x+2)$
c) $x^2(x-1)^2$
d) $x(3x-5)(3x+5)$

ACTIVITATS

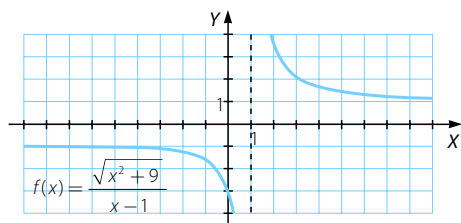
001 Observa la gràfica i calcula els límits de la funció en l'infinit.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1} = 1$$

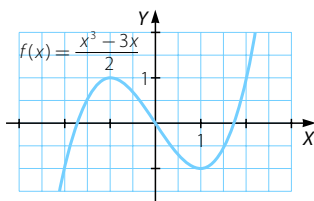
002 Determina si els límits en l'infinit d'aquesta funció són finits.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x - 1} = 1$$

003 Observa la gràfica i calcula els límits de la funció en l'infinit.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x}{2} = +\infty$$

004 Busca funcions els límits dels quals siguin els següents:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ no existeix.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ no existeix.

Resposta oberta. Per exemple:

a) $f(x) = x^2 - x + 1$

c) $f(x) = x^2 + x - 4$

e) $f(x) = \cos x$

b) $f(x) = x - x^2$

d) $f(x) = x^3 - x$

f) $f(x) = 1 - \sin 2x$

005 Determina el valor de les expressions següents:

a) $2 + (+\infty)$

c) $2 \cdot (+\infty) + (+\infty)$

b) $2 + (-\infty)$

d) $2 \cdot (-\infty) \cdot (+\infty)$

a) $+\infty$

b) $-\infty$

c) $+\infty$

d) $-\infty$

006 Troba el valor d'aquestes expressions:

a) $2^{+\infty} + (+\infty) \cdot (+\infty)$

c) $(+\infty)^2 + (+\infty)$

b) $2^{-\infty} + (-\infty) \cdot (-\infty)$

d) $(-\infty)^2 \cdot (+\infty)$

a) $+\infty$

b) $+\infty$

c) $+\infty$

d) $+\infty$

Límits i continuïtat de funcions

007 Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)]$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{g(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot g(x)]$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{f(x)}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{g(x)} = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{f(x)} = -1$

008 Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -5$, troba:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + g(x)]$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{g(x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)]$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)^{g(x)}$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{g(x)}$ no existeix.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)^{g(x)} = 0$

009 Troba els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^7$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^7}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^7$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^7}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^7} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^7 = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^7} = 0$

010 Calcula aquests límits:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 7^x$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{7})^x$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 7^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 7^x$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{7})^x$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 7^{\frac{1}{x}}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 7^x = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{7})^x = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 7^x = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 7^{\frac{1}{x}} = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{7})^x = +\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 7^{\frac{1}{x}} = 1$

011 Troba els límits en l'infinit de cada una d'aquestes funcions.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x-1} \right)^3$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x+1)x^4}{(x^2-6)(2x-1)^3}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{x-1} \right)^3 = 8$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x+1)x^4}{(x^2-6)(2x-1)^3} = \frac{3}{8}$

012 Completa $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\boxed{}}{2x^3 - x + 12}$, escrivint al numerador una funció de manera que el resultat sigui:

a) $+\infty$

b) 4

c) 0

Resposta oberta. Per exemple:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 5}{2x^3 - x + 12} = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{2x^3 - x + 12} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^3 - 3}{2x^3 - x + 12} = 4$

013 Resol els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{2x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 12x + 9}{\sqrt[3]{x^5 + 5x - 2}}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{2x + 1} = \frac{1}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}} = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x^2 + 3}} = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 12x + 9}{\sqrt[3]{x^5 + 5x - 2}} = +\infty$

014 Calcula aquests límits:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + x}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{6 + x}}{2x + 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x + \sqrt{3x - 2}}{2x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 2x}{6x - 3}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + x}{x} = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{6 + x}}{2x + 4} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x + \sqrt{3x - 2}}{2x} = \frac{7}{2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 2x}{6x - 3} = \frac{1}{2}$

Límits i continuïtat de funcions

015 Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - \frac{1 + 2x^2}{2x - 1} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{1 + 4x})$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 3x} - 3x)$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - \frac{1 + 2x^2}{2x - 1} \right) \rightarrow \infty - \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x} - \frac{1 + 2x^2}{2x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 1)(2x - 1) - (1 + 2x^2)x}{x(2x - 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 3x + 1}{2x^2 - x} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x) \rightarrow \infty - \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - x^2}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = -1 \end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{1 + 4x}) \rightarrow \infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{1 + 4x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 1 - 4x}{2x + \sqrt{1 + 4x}} = +\infty$$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 3x} - 3x) \rightarrow \infty - \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 3x} - 3x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 + 3x - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 3x} + 3x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{9x^2 + 3x} + 3x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

016 Substitueix a, b, c i d per nombres de manera que:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax} - x) = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + bx - 3} - 2x) = -\frac{1}{4}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 7} - cx) = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{dx^2 + x - 5} - 2x) = +\infty$

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + ax - x^2}{\sqrt{x^2 + ax} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{\sqrt{x^2 + ax} + x} = \\ &= \frac{a}{2} = 1 \rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + bx - 3} - 2x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + bx - 3 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + bx - 3} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{bx - 3}{\sqrt{4x^2 + bx - 3} + 2x} = \frac{b}{4} = -\frac{1}{4} \rightarrow b = -1 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 7} - cx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 + 7 - c^2x^2}{\sqrt{9x^2 + 7} + cx} = 0 \rightarrow c = 3$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{dx^2 + x - 5} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{dx^2 + x - 5 - 4x^2}{\sqrt{dx^2 + x - 5} + 2x} = +\infty \rightarrow d > 4$$

017 Calcula els límits següents:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x-1}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{6x+2}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x+3}\right)^{3x+1}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x-1} \rightarrow 1^\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x-1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} \cdot (2x-1)\right]} = e^2$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{6x+2} \rightarrow 1^\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x}\right)^{6x+2} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(-\frac{3}{x}\right) \cdot (6x+2)\right]} = e^{-18} = \frac{1}{e^{18}}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2} \rightarrow 1^\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{4x-1}{4x}\right)^{3x+2} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 - \frac{4x-1}{4x}\right) \cdot (3x+2)\right]} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+2}{4x}} = e^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{e^3}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x+3}\right)^{3x+1} \rightarrow 1^\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x}{x+3}\right)^{3x+1} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{x}{x+3} - 1\right) \cdot (3x+1)\right]} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3(3x+1)}{x+3}} = e^{-9} = \frac{1}{e^9}$$

Límits i continuïtat de funcions

018 Troba aquests límits:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2x}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1} \right)^{x+6}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x^2 + 3x - 2} \right)^{x^2 - 3x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x-1} \rightarrow 1^\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} \right)^{x-1} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{x^2 + 1}{x^2} - 1 \right) \cdot (x-1) \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x^2} \cdot (x-1) \right]} = e^0 = 1$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1} \right)^{x+6} \rightarrow 1^\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1} \right)^{x+6} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 1} - 1 \right) \cdot (x+6) \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - 5x + 6}{x^2 + 1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{1}{2x}} = 1^0 = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x^2 + 3x - 2} \right)^{x^2 - 3x} = 0$

019 Observa la gràfica i calcula:

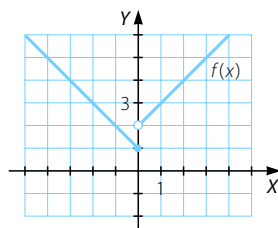
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

en què $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$



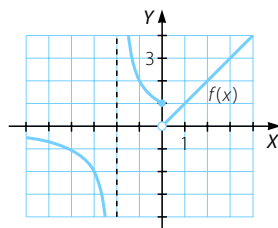
020 Observa la gràfica i troba:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$



$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

- 021 Calcula el límit de la funció $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$ en $x = 3$ i $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{6}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow -2} f(x).$$

- 022 Determina el límit de la funció $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ en $x = \frac{\pi}{2}$ i $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

- 023 Resol els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{3x + 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 3x}$

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{3x + 3} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{3(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 2x}{x^2 - 3x} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(x + 1)}{x(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x + 1)}{x - 3} = -\frac{2}{3}$$

- 024 Calcula aquests límits:

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x - 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 18}{\sqrt{x^2 - 9}}$

a) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x - 5} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{(5+x)(5-x)}}{-(5-x)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{5+x}}{-\sqrt{5-x}} = \frac{5}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) \text{ no existeix} \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 5} f(x).$$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 18}{\sqrt{x^2 - 9}} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x^2 - 9)}{\sqrt{x^2 - 9}} = \lim_{x \rightarrow 3} (2\sqrt{x^2 - 9}) = 0$$

Límits i continuïtat de funcions

025 Determina si la funció $f(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$ és contínua en $x = -2$ i $x = 2$.

$$f(-2) = \frac{1}{0} \rightarrow \text{No existeix } f(-2) \rightarrow \text{La funció no és contínua en } x = -2.$$

$$f(2) = \frac{5}{0} \rightarrow \text{No existeix } f(2) \rightarrow \text{La funció no és contínua en } x = 2.$$

026 Digues si la funció $f(x) = |x-3|$ és contínua en $x = -3$ i $x = 0$.

$$f(-3) = |-6| = 6 \rightarrow \text{Existeix } f(-3).$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} |x-3| = |-6| = 6 \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow -3} f(x).$$

$$f(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} f(x) \rightarrow \text{La funció és contínua en } x = -3.$$

027 Determina si aquesta funció és contínua:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2-3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

- Si $x < -1 \rightarrow f(x) = x+1 \rightarrow f(x)$ és contínua en $(-\infty, -1)$.
- Si $x > -1 \rightarrow f(x) = x^2-3 \rightarrow f(x)$ és contínua en $(-1, +\infty)$.
- Si $x = -1 \rightarrow f(-1) = -1+1 = 0 \rightarrow \text{Existeix } f(-1).$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x+1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2-3) = -2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

La funció no és contínua en $x = -1$, té una discontinuïtat de alt finit en aquest punt; així doncs, $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

028 Calcula a perquè aquesta funció sigui contínua en tot $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 + a & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

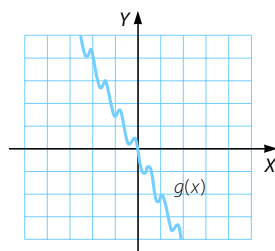
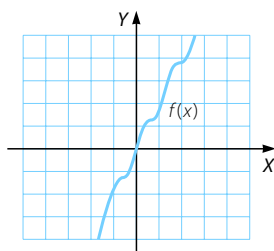
- Si $x < -2 \rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x} \rightarrow f(x)$ és contínua en $(-\infty, -2)$.
- Si $x > -2 \rightarrow f(x) = -x^2 + a \rightarrow f(x)$ és contínua en $(-2, +\infty)$.
- Si $x = -2 \rightarrow f(x) = \frac{-2+1}{-2} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{Existeix } f(-2).$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+1}{x} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (-x^2 + a) = -4 + a$$

$f(x)$ és contínua en $x = -2$ si:

$$f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \rightarrow \frac{1}{2} = -4 + a \rightarrow a = \frac{9}{2}$$

029 Observa les gràfiques d'aquestes funcions i calcula:



a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

030 Resol els límits de funcions següents:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4}$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4^{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^x$

l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^{x^2}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^x = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4^{x^2} = +\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4^{x^2} = +\infty$

Límits i continuïtat de funcions

031 Troba els límits de funcions.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{3x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{3x^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^6}{3x^2 + 2x - 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^6}{3x^2 + 2x - 1}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^4}{-x^4 + 2x^2 - 5}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^4}{-x^4 + 2x^2 - 5}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 - 3x^2 - 5}$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 - 3x^2 - 5}$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16}{x - 2}$

l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16}{x - 2}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 3} = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 3} = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{3x^2} = \frac{1}{3}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{3x^2} = \frac{1}{3}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^6}{3x^2 + 2x - 1} = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^6}{3x^2 + 2x - 1} = -\infty$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^4}{-x^4 + 2x^2 - 5} = 1$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^4}{-x^4 + 2x^2 - 5} = 1$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 - 3x^2 - 5} = 0$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 - 3x^2 - 5} = 0$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16}{x - 2} = 0$

l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16}{x - 2} = 0$

032 Determina el límit d'aquestes funcions:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x + 6)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - x + x^2 - x^3)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{x - 4}{2} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{x-1}$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^{x^2}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{\frac{2}{3x-1}}$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3)(2x - 3)$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 2}{x}$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 1) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x + 1} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x + 6) = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - x + x^2 - x^3) = +\infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{x - 4}{2} \right) = -\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{x-1} = +\infty$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^{x^2} = 0$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3^{3x-1}} = 3^0 = 1$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3)(2x - 3) = +\infty$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 2}{x} = +\infty$$

033 Calcula els següents límits de funcions:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 8x^2 - x + 8)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{2x^3 + 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x - 2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 8x + 16}{35}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x - 2}{3x^3 - 7x + 1}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 2x + 3x^2 - x^3}{2x^2 - 5x - 4}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 8x^2 - x + 8) = -\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{2x^3 + 1} = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x - 2} = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 8x + 16}{35} = +\infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x - 2}{3x^3 - 7x + 1} = 0$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 2x + 3x^2 - x^3}{2x^2 - 5x - 4} = -\infty$$

034 Determina els límits d'aquestes funcions:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - 1}{5x} \cdot \frac{6x}{x^3 + 1} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 5}{1 - 2x} : \frac{5x^3}{x^2 + 12} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{5x} + \frac{6x - x^2}{3x} \right)$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - 1}{5x} \cdot \frac{6x}{x^3 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{24x^3 - 6x}{5x^4 + 5x} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 5}{1 - 2x} : \frac{5x^3}{x^2 + 12} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 17x^2 + 60}{5x^3 - 10x^4} = -\frac{1}{10}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{5x} + \frac{6x - x^2}{3x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 30x + 9}{15x} = +\infty$$

Límits i continuïtat de funcions

035 Troba els següents límits de funcions:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 12x)$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((x^2 + 1)^2 + 4x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}}$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 4^x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 4x)$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 4x})$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^3 - \frac{3}{x^2} \right)$

k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{1-x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2)$

l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3^{-x})$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3)^x$

m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 4x})$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 5x^2 - 3)$

n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{1-x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 12x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 4x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^3 - \frac{3}{x^2} \right) = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2) = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3)^x = +\infty$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 5x^2 - 3) = -\infty$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((x^2 + 1)^2 + 4x) = +\infty$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 4^x) = -\infty$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 4x}) = -\infty$

k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{1-x} \rightarrow 1^\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^{1-x} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{x} - 1 \right) (1-x) \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-2x}{x}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3^{-x}) = +\infty$

m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 4x}) \rightarrow -\infty + \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 - 4x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 + 4x}{x - \sqrt{x^2 - 4x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x - \sqrt{x^2 - 4x}} = 2$$

n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{1-x} \rightarrow 1^\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{1-x} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 - \frac{2}{x} - 1 \right) (1-x) \right]} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2+2x}{x}} = e^2$$

- 036 Calcula el límit següent:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{5}{x-2} - \frac{2x+6}{x^2-2x} \right)$$

(Activitat de Selectivitat)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{5}{x-2} - \frac{2x+6}{x^2-2x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x-2x-6}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-6}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{x(x-2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

- 037 Els beneficis, en milions d'euros, generats pel funcionament d'una indústria vénen donats en funció del temps, en anys, per:

$$b(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Què ocorre quan passen molts anys?

(Activitat de Selectivitat)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t}{1+t^2} = 0 \rightarrow \text{Quan passen molts anys, els beneficis es redueixen a zero.}$$

- 038 El nombre d'individus, en milions, d'una població ve donat per la funció:

$$f(t) = \frac{18+t^2}{(t+3)^2}$$

en què t és el temps mitjà en anys des de $t = 0$. Calcula la població inicial i la mida de la població a llarg termini, quan el temps tendeix a ∞ .*(Activitat de Selectivitat)*

$$\text{La població inicial és: } f(0) = \frac{18+0^2}{(0+3)^2} = 2 \text{ milions d'individus}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{18+t^2}{(t+3)^2} = 1 \rightarrow \text{A llarg termini, la població tendeix a ser d'1 milió d'individus.}$$

- 039 El nombre de flexions per minut que és capaç de fer una persona que comença el seu entrenament en un gimnàs ve donat per la funció:

$$f(x) = \frac{36x+8}{x+2}$$

En què x = «dies d'entrenament» i $f(x)$ = «nombre de flexions».

Cap a quin valor s'aproxima el nombre de flexions quan creix el nombre de dies d'entrenament?

(Activitat de Selectivitat)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{36x+8}{x+2} = 36 \text{ flexions}$$

Límits i continuïtat de funcions

040

L'estudi de la rendibilitat d'una empresa revela que una inversió de x milions d'euros produeix un guany de $f(x)$ milions d'euros, amb:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{50} + \frac{8x}{25} - \frac{8}{5} & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{5}{2x} & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

Raona què passa amb la rendibilitat si la inversió s'incrementa indefinidament.

(Activitat de Selectivitat)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{2x} = 0 \rightarrow \text{Si la inversió s'incrementa indefinidament, la rendibilitat es redueix a zero.}$$

041

La temperatura (en °C) d'un objecte ve donada per la funció:

$$f(t) = 10 \cdot \frac{2t^2 + 3t + 4}{t^2 + 2t + 5}$$

En què t és el temps en hores. Calcula la temperatura inicial, la temperatura cinc hores més tard i la temperatura que pot assolir l'objecte si es deixa passar molt temps.

(Activitat de Selectivitat)

$$\text{La temperatura inicial era: } f(0) = 10 \cdot \frac{2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 + 4}{0^2 + 2 \cdot 0 + 5} = 8 \text{ °C}$$

$$\text{Cinc hores més tard: } f(5) = 10 \cdot \frac{2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 4}{5^2 + 2 \cdot 5 + 5} = 17,25 \text{ °C}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} 10 \cdot \frac{2t^2 + 3t + 4}{t^2 + 2t + 5} = 20 \rightarrow \text{Si es deixa passar molt de temps, la temperatura tendeix a ser de 20 °C.}$$

042

Una empresa de transport estima que els seus guanys, en milers d'euros, durant els propers anys seguiran la fórmula:

$$g(t) = \frac{64.000 + 5.000t}{5t + 5}$$

en què la variable $t = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ representa el temps en anys mesurat a partir del present. Els guanys s'estabilitzen quan t creix? Cap a quin valor? Raona la resposta.

(Activitat de Selectivitat)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{64.000 + 5.000t}{5t + 5} = 1.000 \rightarrow \text{A mesura que passa el temps, els guanys s'estabilitzen, i tendeixen a ser d'1 milió d'euros.}$$

- 043 Els guanys d'una empresa, en milions d'euros, s'ajusten a la funció:

$$f(x) = \frac{50x - 100}{2x + 5}$$

en què x representa els anys de vida de l'empresa, quan $x \geq 0$.

A mesura que transcorre el temps, estan limitats els beneficis?

En cas afirmatiu, quin n'és el límit?

(Activitat de Selectivitat)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50x - 100}{2x + 5} = 25 \rightarrow \text{Els beneficis estan limitats, perquè amb el decurs del temps tendeixen a estabilitzar-se en 25 milions d'euros.}$$

- 044 Expressa aquestes funcions com a funcions definides a trossos i calcula'n els límits quan x tendeix a $-\infty$ i $+\infty$.

a) $f(x) = |x + 2| - |x - 2|$ b) $f(x) = \left| \frac{2x + 3}{x - 2} \right|$

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -x - 2 - (-x + 2) & \text{si } x < -2 \\ x + 2 - (-x + 2) & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ x + 2 - (x - 2) & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < -2 \\ 2x & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-4) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 = 4$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{2x + 3}{x - 2} & \text{si } x < -\frac{3}{2} \\ -\frac{2x + 3}{x - 2} & \text{si } -\frac{3}{2} \leq x < 2 \\ \frac{2x + 3}{x - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{x - 2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{x - 2} = 2$$

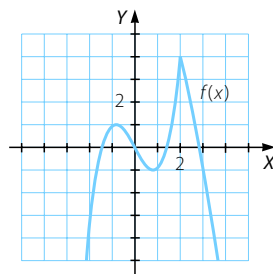
- 045 La figura següent és la gràfica de la funció $f(x)$.

Calcula el valor d'aquests límits.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$



a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -0,9$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

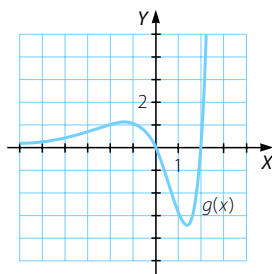
b) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -1$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Límits i continuïtat de funcions

046 Aquesta gràfica correspon a la funció $g(x)$.



Troba el valor dels límits:

- | | | |
|---|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$ | c) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ | e) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ | d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ | f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ |
| a) $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = 0,7$ | c) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ | e) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -2,9$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$ | d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ | f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ |

047 Si $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$, calcula aquests límits:

- | | | |
|---|--|--------------------------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ | b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ | c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ |
| a) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{9}{10}$ | b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\frac{3}{2}$ | c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ |

048 Donada $f(x) = 2^x$, determina:

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ | b) $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$ | c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ |
| a) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2^3 = 8$ | b) $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = 2^{-5} = \frac{1}{32}$ | c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2^0 = 1$ |

049 Si tenim la funció $f(x) = \frac{6x - 12}{x^2 - 3x - 4}$, quins seran els seus límits quan x tendeixi a 0, -1, 1 i 4?

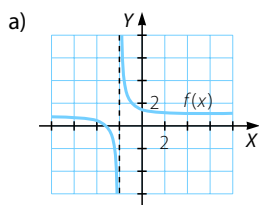
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - 12}{x^2 - 3x - 4} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{6x - 12}{x^2 - 3x - 4} = \frac{-18}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 12}{x^2 - 3x - 4} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{6x - 12}{x^2 - 3x - 4} = \frac{12}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 4} f(x).$$

050 Observa les gràfiques i determina els límits següents:

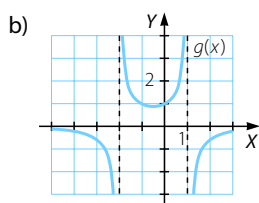


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = +\infty$$

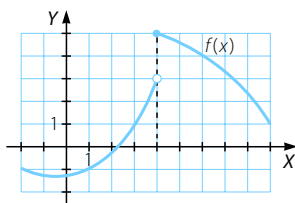
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

051 Observa la gràfica de la funció $f(x)$.



Troba el valor dels límits:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3$

c) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 5$

Límits i continuïtat de funcions

052 Calcula aquests límits:

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - 3}{(x + 1)^2}$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x - 3}{(x + 1)^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = -1$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - 3}{(x + 1)^2} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x - 3}{(x + 1)^2} = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x - 2)^2(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - 8x + 12} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} = +\infty$

053 Determina els límits i, en cas que siguin infinit, determina els límits laterals:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 3x - 2}$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 3x - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$

$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)(2x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 1}{2x + 1} = \frac{3}{5}$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 3x - 2} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + x^2 - 8x - 12} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x + 2)(x + 3)}{(x - 3)(x + 2)^2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x(x + 3)}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{-2}{0} = \infty$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + x^2 - 8x - 12} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x(x + 3)}{(x - 3)(x + 2)} = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + x^2 - 8x - 12} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x(x + 3)}{(x - 3)(x + 2)} = +\infty$

$\rightarrow$ No existeix $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$

$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + x^2 - 8x - 12} = 0$

054 Amb la funció $f(x) = \frac{x^3 + 11x^2 + 31x + 21}{x^3 + 7x^2}$, troba:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -7} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 11x^2 + 31x + 21}{x^3 + 7x^2} = \frac{240}{90} = \frac{8}{3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^3 + 11x^2 + 31x + 21}{x^3 + 7x^2} = \lim_{x \rightarrow -7} \frac{(x+1)(x+3)(x+7)}{x^2(x+7)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow -7} \frac{(x+1)(x+3)}{x^2} = \frac{24}{49}$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 11x^2 + 31x + 21}{x^3 + 7x^2} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 11x^2 + 31x + 21}{x^3 + 7x^2} = \frac{21}{0} = \infty \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 11x^2 + 31x + 21}{x^3 + 7x^2} = 1$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 11x^2 + 31x + 21}{x^3 + 7x^2} = 1$

055 Si $f(x) = \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21}$, calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -7} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = \frac{108}{60} = \frac{9}{5}$

b) $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = \lim_{x \rightarrow -7} \frac{x(x+3)^2}{(x+3)(x+7)} = \lim_{x \rightarrow -7} \frac{x(x+3)}{x+7} = \frac{28}{0} = \infty$
 $\rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -7^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -7^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow -7} f(x).$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(x+3)}{x+7} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = 0$

Límits i continuïtat de funcions

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = +\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x^2 + 10x + 21} = -\infty$$

056 Donada $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 3 \\ \frac{3}{x+5} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$, calcula els límits:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} g(x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} g(x)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -5} g(x)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 6} g(x)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$$

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 1) = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -5} g(x) = \lim_{x \rightarrow -5} (x^2 - 1) = 24$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 1) = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3}{x+5} = \frac{3}{8}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \frac{3}{8} \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 3} g(x).$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 6} g(x) = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{3}{x+5} = \frac{3}{11}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+5} = 0$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1) = +\infty$$

057 Considera: $h(x) = \begin{cases} \frac{4}{x-2} & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 4x + 4 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ 2^{x+1} + 9 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Calcula els límits:

$$a) \lim_{x \rightarrow -5} h(x)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 5} h(x)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 3} h(x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} h(x)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -2} h(x)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$$

$$a) \lim_{x \rightarrow -5} h(x) = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{4}{x-2} = -\frac{4}{7}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4x + 4) = 16$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 5} h(x) = \lim_{x \rightarrow 5} (2^{x+1} + 9) = 73$$

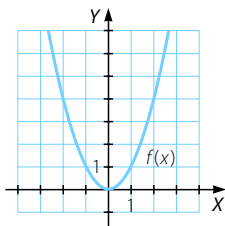
$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4}{x-2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 + 4x + 4) = 0 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) \\ \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow -2} h(x). \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 + 4x + 4) = 25 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (2^{x+1} + 9) = 25 \end{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) \\ \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 25 \end{array} \right.$$

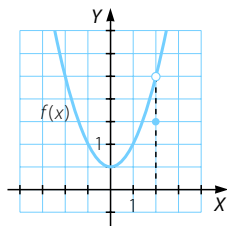
$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^{x+1} + 9) = +\infty$$

058 Decideix si les funcions següents són contínues en els punts que s'indiquen. Si no ho són, determina'n el tipus de discontinuïtat.

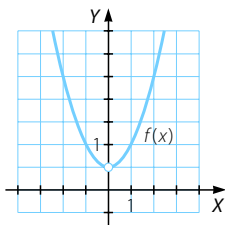
a) En $x = 0$ i $x = 2$.



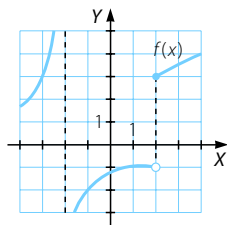
d) En $x = -1$ i $x = 2$.



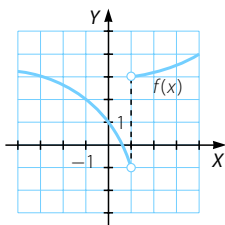
b) En $x = 0$ i $x = 2$.



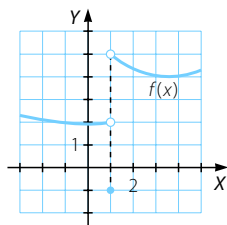
e) En $x = -2$ i $x = 2$.



c) En $x = 1$.



f) En $x = 1$.



- a) • $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow$ La funció és contínua en $x = 0$.
 • $f(2) = 4 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow$ La funció és contínua en $x = 2$.

Límits i continuïtat de funcions

- b) • No existeix $f(0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0,5 \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,5.$$

La funció no és contínua en $x = 0$, té una discontinuïtat evitable.

- $f(2) = 2,5 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow$ La funció és contínua en $x = 2$.

- c) No existeix $f(1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

La funció no és contínua en $x = 1$, té una discontinuïtat de salt finit.

- d) • $f(-1) = 1 = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \rightarrow$ La funció és contínua en $x = -1$.

- $f(2) = 1,5$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2,5 \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2,5.$$

$f(2) \neq \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow$ La funció no és contínua en $x = 2$,
té una discontinuïtat evitable.

- e) • No existeix $f(-2)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow -2} f(x).$$

La funció no és contínua en $x = 0$ i $x = -2$, té una discontinuïtat de salt infinit.

- $f(2) = 3$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

La funció no és contínua en $x = 2$, té una discontinuïtat de salt finit.

- f) $f(1) = -1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 5 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

La funció no és contínua en $x = 1$, té una discontinuïtat de salt finit.

059 Estudia la continuïtat en $x = -1$ i $x = 2$ de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 4x - 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ x + 11 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Classifica'n els tipus de discontinuïtats.

- $f(-1) = -4$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -5 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -4 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

La funció no és contínua en $x = -1$, té una discontinuïtat de salt finit.

- $f(2) = 11$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 11 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 13 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

La funció no és contínua en $x = 2$, té una discontinuïtat de salt finit.

060 Estudia la continuïtat de la funció en els punts $x = 0$ i $x = 3$.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{4}{x-4} & \text{si } x < 0 \\ x-1 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- No existeix $g(0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -1$$

La funció no és contínua en $x = 0$, té una discontinuïtat evitable.

- $g(3) = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 3} g(x).$$

La funció no és contínua en $x = 3$, té una discontinuïtat de salt infinit.

061 Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Estudia'n la continuïtat en els punts $x = 0$ i $x = 1$.

(Activitat de Selectivitat)

- $f(0) = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

$f(0) = 2 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow$ La funció és contínua en $x = 0$.

Límits i continuïtat de funcions

- $f(1) = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$f(1) = 2 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \text{La funció és contínua en } x = 1.$$

062 Considera la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \frac{x-1}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Estudia la continuïtat de f en $x = 0$ i $x = 1$.

(Activitat de Selectivitat)

- $f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow$ La funció és contínua en $x = 0$.

- $f(1) = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

$$f(1) = 1 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \text{La funció és contínua en } x = 1.$$

063 Digues si la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{4} - 8 & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{x^3} & \text{si } 4 < x \end{cases}$ és contínua en $x = 4$.

(Activitat de Selectivitat)

$$f(4) = 8$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 8 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 4} f(x).$$

$$f(4) = 8 = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \rightarrow \text{La funció és contínua en } x = 4.$$

064 Completa la definició de la funció perquè sigui contínua en $x = 2$.

$$p(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ \boxed{} & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La funció és contínua si: $\lim_{x \rightarrow 2} p(x) = p(2)$

Existeix $\lim_{x \rightarrow 2} p(x)$ si $\lim_{x \rightarrow 2^-} p(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} p(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} p(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} p(x) = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} p(x) = -1$$

$$\text{Aleshores, la funció és contínua si: } p(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ -1 & \text{si } x = 2 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

065 Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{si } x \neq 5 \\ 0 & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

demostra que no és contínua en $x = 5$.

Existeix alguna funció contínua que coincideixi amb $f(x)$ per a tots els valors $x \neq 5$?

En cas afirmatiu, dona'n l'expressió.

(Activitat de Selectivitat)

$$f(5) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x - 5)(x + 5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) = 10$$

$$f(5) \neq \lim_{x \rightarrow 5} f(x) \rightarrow \text{La funció és contínua en } x = 5.$$

Existeix una funció contínua que coincideix amb $f(x)$ en $\mathbb{R} - \{5\}$, i té com a expressió:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{si } x \neq 5 \\ 10 & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

066 Donada la funció:

$$F(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Per a quins valors de a la funció $F(x)$ és contínua en $x = 1$?

(Activitat de Selectivitat)

La funció és contínua en $x = 1$ si: $\lim_{x \rightarrow 1} F(x) = F(1)$

$$F(1) = 2$$

Existeix $\lim_{x \rightarrow 1} F(x)$ si $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = 3 - a \end{array} \right\} \rightarrow 2 = 3 - a \rightarrow a = 1$$

Límits i continuïtat de funcions

067 Considera la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x < 2 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Calcula els valors del paràmetre a per als quals $f(x)$ és contínua en $x = 2$.

(Activitat de Selectivitat)

La funció és contínua en $x = 2$ si: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$f(2) = 1$$

Existeix $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 + 2a \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow 4 + 2a = 1 \rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

068 Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & \text{si } x \leq -2 \\ a & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad (a \in \mathbb{R})$$

a) Calcula el valor de a perquè f sigui contínua en $x = -2$.

b) Estudia la continuïtat de f quan $a = 2$.

(Activitat de Selectivitat)

a) La funció és contínua en $x = -2$ si: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$

$$f(-2) = 4a - 2$$

Existeix $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 4a - 2 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = a \end{array} \right\} \rightarrow 4a - 2 = a \rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\text{b) Si } a = 2: f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2 & \text{si } x \leq -2 \\ 2 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\bullet f(-2) = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow -2} f(x).$$

La funció no és contínua en $x = -2$, té una discontinuïtat de salt finit.

$$\bullet f(2) = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

$f(2) = 2 = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow$ La funció no és contínua en $x = 2$.

069

Donada la funció: $f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x \leq -1 \\ k & \text{si } -1 < x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Troba el valor de k perquè la gràfica sigui contínua per a $x = -1$.

(Activitat de Selectivitat)

La funció és contínua en $x = 1$ si: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$

$$f(-1) = 1$$

Existeix $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = k \end{array} \right\} \rightarrow k = 1$$

070

Considera la funció: $f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + b & \text{si } x \leq 2 \\ a(x-3)^2 + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Troba a i b perquè la funció sigui contínua en $x = 2$.

(Activitat de Selectivitat)

La funció és contínua en $x = 2$ si: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$f(2) = -1 + b$$

Existeix $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = a + 3 \end{array} \right\} \rightarrow -1 + b = a + 3 \rightarrow a = b - 4$$

071

Considera la funció definida a trossos mitjançant l'expressió següent:

$$f(x) = \begin{cases} 3(x+2) & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Estudia'n la continuïtat per a tot valor de x en el qual la funció està definida.

$f(x)$ està formada per funcions polinòmiques; per tant, sabem que $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{-1, 3\}$.

• $f(-1) = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$

Així doncs, $f(x)$ no és contínua en $x = -1$, té una discontinuïtat de salt finit.

• $f(3) = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 8 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

Així doncs, $f(x)$ no és contínua en $x = 3$, té una discontinuïtat de salt finit.

Límits i continuïtat de funcions

072 Segui la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Estudia'n la continuïtat.

(Activitat de Selectivitat)

$f(x)$ està formada per funcions polinòmiques; per tant, sabem que $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$f(1) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

$$f(1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \text{La funció és contínua en } x = 1.$$

Per tant, $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

073 Considera la funció:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Estudia'n la continuïtat.

(Activitat de Selectivitat)

$f(x)$ està formada per funcions polinòmiques; per tant, sabem que $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$f(0) = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

$$f(0) = 2 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \text{La funció és contínua en } x = 0.$$

Per tant, $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

074 Considera la funció definida per:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 & \text{si } x \leq 1 \\ -2x^2 + 8x - 6 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Estudia la continuïtat de f .

(Activitat de Selectivitat)

$f(x)$ està formada per funcions polinòmiques; per tant, sabem que $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$f(1) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

$$f(1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \text{La funció és contínua en } x = 1.$$

Per tant, $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

075 Considera la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudia'n la continuïtat.

$f(x)$ està formada per funcions polinòmiques; per tant, sabem que $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$f(0) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

$$f(0) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \text{La funció és contínua en } x = 0.$$

Per tant, $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

076 Segui la funció:

$$f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si } x \leq 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Estudia'n la continuïtat.

(Activitat de Selectivitat)

$f(x)$ està formada per funcions polinòmiques; per tant, sabem que $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{3\}$.

$$f(3) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

$$f(3) = 0 = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \rightarrow \text{La funció és contínua en } x = 3.$$

Per tant, $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

077 Considera la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudia'n la continuïtat.

(Activitat de Selectivitat)

$f(x)$ està formada per funcions polinòmiques; així doncs, sabem que $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$f(0) = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

$$f(0) = 2 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow \text{La funció és contínua en } x = 0.$$

Per tant, $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

Límits i continuïtat de funcions

078 Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x^2 - 12x + 9 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Estudia'n la continuïtat.

$f(x)$ està formada per funcions polinòmiques; així doncs, sabem que $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{1, 3\}$.

- $f(1) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

$$f(1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \text{La funció és contínua en } x = 1.$$

- $f(3) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

$$f(3) = 0 = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \rightarrow \text{La funció és contínua en } x = 3.$$

Per tant, $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

079 Segui la funció:

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 6x + 10 & \text{si } 2 < x < 5 \\ 4x - 15 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$$

Estudia'n la continuïtat.

(Activitat de Selectivitat)

$f(x)$ està formada per funcions polinòmiques; així doncs, sabem que $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{2, 5\}$.

- $f(2) = 5$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

Per tant, la funció no és contínua en $x = 2$, té una discontinuïtat de salt finit.

- $f(5) = 5$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 5 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 5} f(x).$$

$$f(5) = 5 = \lim_{x \rightarrow 5} f(x) \rightarrow \text{La funció és contínua en } x = 5.$$

Per tant, $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

080 Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} 16 - x^2 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ x^2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Estudia la continuïtat de f .

(Activitat de Selectivitat)

$f(x)$ està formada per funcions polinòmiques; així doncs, sabem que $f(x)$ és contínua en $(-2, 2) \cup (2, 3)$.

$$f(2) = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 12 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

Per tant, la funció no és contínua en $x = 2$, té una discontinuïtat de salt finit.

081 Estudia la continuïtat en l'interval $[0, 4]$ de la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

(Activitat de Selectivitat)

$f(x)$ està formada per funcions polinòmiques; així doncs, sabem que $f(x)$ és contínua en $(0, 1) \cup (1, 4)$.

$$f(1) = 5$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 5 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

$$f(1) = 5 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow \text{La funció és contínua en } x = 1.$$

Per tant, $f(x)$ és contínua en $(0, 4)$.

082 On es troben les discontinuïtats d'aquestes funcions? De quin tipus són?

a) $y = \frac{5}{x-2}$

d) $y = \frac{6x}{x^2 - 2x + 3}$

b) $y = \frac{3x-6}{x^2 - 2x + 1}$

e) $y = \frac{2x+2}{x^2 - 2x - 3}$

c) $y = \frac{x^2 - x}{2x^2 + 4x - 6}$

f) $y = \frac{2x^2 + 4x + 6}{x^2 - x}$

a) No existeix $f(2)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

La funció té en $x = 2$ una discontinuïtat de salt infinit.

Límits i continuïtat de funcions

b) $x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

La funció té en $x = 1$ una discontinuïtat de salt infinit.

c) $2x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$

- No existeix $f(-3)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow -3} f(x).$$

- No existeix $f(1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{2(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2(x+3)} = \frac{1}{8}$$

La funció és contínua en $\mathbb{R} - \{-3, 1\}$, té una discontinuïtat evitable en $x = -3$ i una discontinuïtat evitable en $x = 1$.

d) $x^2 - 2x + 3 \neq 0$ per a qualsevol valor de x , no hi ha punts de discontinuïtat.

e) $x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$

- No existeix $f(-1)$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x-3} = -\frac{1}{2}$$

- No existeix $f(3)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

La funció és contínua en $\mathbb{R} - \{-1, 3\}$, té una discontinuïtat evitable en $x = -1$ i una discontinuïtat de salt infinit en $x = 3$.

f) $x^2 - x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

- No existeix $f(0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

- No existeix $f(1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$$

La funció és contínua en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, té discontinuïtats de salt infinit en $x = 0$ i en $x = 1$.

083 Estudia la continuïtat d'aquesta funció:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ \frac{8}{3-x} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Especifica els tipus de discontinuïtat que presenti.

- $f(x) = 1 + x^2$ és una funció polinòmica; per tant, $f(x)$ és contínua en $(-\infty, -1)$.

- $f(-1) = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = -1.$$

- $f(x) = \frac{8}{3-x}$ està definida en $\mathbb{R} - \{3\}$; per tant, $f(x)$ és contínua en $(-1, 3) \cup (3, +\infty)$.

- No existeix $f(3)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

La funció no és contínua en $x = 3$, té una discontinuïtat de salt infinit.

084 Donada la funció:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{4}{x+3} & \text{si } x < -2 \\ x^2 + 2x + 4 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ \frac{3}{x+7} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Hi existeix alguna discontinuïtat evitable? Com es podria evitar?

- $h(x) = \frac{4}{x+3}$ està definida en $\mathbb{R} - \{-3\}$; per tant, $h(x)$ és contínua en $(-\infty, -3) \cup (-3, -2)$.

No existeix $h(-3)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} h(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} h(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow -3} h(x).$$

Així doncs, la funció no és contínua en $x = -3$, té una discontinuïtat de salt infinit.

Límits i continuïtat de funcions

- Estudiem què passa en el punt $x = -2$:

$$h(-2) = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} h(x) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} h(x) = h(-2) \rightarrow h(x) \text{ és contínua en } x = -2.$$

- $h(x) = x^2 + 2x + 4$ és una funció polinòmica; així doncs, $h(x)$ és contínua en $(-2, 1)$.
- $h(x) = \frac{3}{x+7}$ està definida en $\mathbb{R} - \{-7\}$; per tant, $h(x)$ és contínua en $(1, +\infty)$.
- Estudiem què passa en el punt $x = 1$:

No existeix $h(1)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = 7 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \frac{3}{8} \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 1} h(x).$$

Així doncs, la funció no és contínua en $x = 1$, té una discontinuïtat de salt finit.

085 Segui la funció:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x^2}{2} & \text{si } x \leq 4 \\ 2x - 8 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

Estudia la continuïtat d'aquesta funció.

(Activitat de Selectivitat)

$f(x)$ està formada per funcions polinòmiques; així doncs, sabem que $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{4\}$.

$$f(4) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 4} f(x).$$

$$f(4) = 0 = \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \rightarrow \text{La funció és contínua en } x = 4.$$

Per tant, $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

086 Segui la funció:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{x}{4} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Estudia'n la continuïtat.

(Activitat de Selectivitat)

$f(x) = (x + 1)^2 \rightarrow$ Funció polinòmica $\rightarrow f(x)$ és contínua en $(-\infty, 0)$.

$f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow$ Definida en $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow f(x)$ és contínua en $(0, 2)$.

$f(x) = \frac{x}{4} \rightarrow$ Funció polinòmica $\rightarrow f(x)$ és contínua en $(2, +\infty)$.

- Estudem el punt $x = 0$:

$$f(0) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

Així doncs, la funció no és contínua en $x = 0$, té una discontinuïtat de salt infinit.

- Estudem el punt $x = 2$:

$$f(2) = \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2} = f(2) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = 2.$$

Així doncs, la funció no és contínua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

087 Expressa aquestes funcions com a funcions definides a trossos i estudia'n la continuïtat.

a) $y = |x|$

d) $y = |x^2 - 1|$

g) $y = \left| \frac{1}{x} \right|$

b) $y = |x + 5|$

e) $y = |x^2 - x - 6|$

h) $y = \left| \frac{1}{x - 2} \right|$

c) $y = |3 - 2x|$

f) $y = |6 - x^2|$

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

- $f(0) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = 0.$$

- La funció està formada per funcions polinòmiques; així doncs, sabem que $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

Límits i continuïtat de funcions

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x \geq -5 \\ -x - 5 & \text{si } x < -5 \end{cases}$$

$$\bullet f(-5) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -5^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -5^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -5} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = f(-5) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = -5.$$

- La funció està formada per funcions polinòmiques; així doncs, $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{si } x \leq \frac{3}{2} \\ 2x - 3 & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\bullet f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = f\left(\frac{3}{2}\right) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = \frac{3}{2}.$$

- La funció està formada per funcions polinòmiques; així doncs, $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\bullet f(-1) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = -1.$$

$$\bullet f(1) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = 1.$$

- La funció està formada per funcions polinòmiques; així doncs, $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

$$\text{e) } x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 6 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 + x + 6 & \text{si } -2 < x \leq 3 \\ x^2 - x - 6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\bullet f(-2) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = -2.$$

$$\bullet f(3) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = 3.$$

- La funció està formada per funcions polinòmiques; així doncs, $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

$$\text{f) } 6 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{6}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6 & \text{si } x \leq -\sqrt{6} \\ 6 - x^2 & \text{si } -\sqrt{6} < x \leq \sqrt{6} \\ x^2 - 6 & \text{si } x > \sqrt{6} \end{cases}$$

$$\bullet f(-\sqrt{6}) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{6})^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{6})^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\sqrt{6}} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{6}} f(x) = f(-\sqrt{6}) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = -\sqrt{6}.$$

$$\bullet f(\sqrt{6}) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (\sqrt{6})^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow (\sqrt{6})^+} f(x) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \sqrt{6}} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{6}} f(x) = f(\sqrt{6}) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = \sqrt{6}.$$

- La funció està formada per funcions polinòmiques; així doncs, $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

Límits i continuïtat de funcions

$$g) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- No existeix $f(0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

Per tant, la funció no és contínua en $x = 0$, té una discontinuïtat de salt infinit.

- La funció és contínua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$h) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ -\frac{1}{x-2} & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

- No existeix $f(2)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

Per tant, la funció no és contínua en $x = 2$, té una discontinuïtat de salt infinit.

- La funció és contínua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

088 Calcula la constant k perquè la funció següent sigui contínua en tots els punts:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 3 \\ x + k & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

(Activitat de Selectivitat)

La funció està formada per funcions polinòmiques; així doncs, sabem que és contínua en $\mathbb{R} - \{3\}$. Estudiem la continuïtat en el punt $x = 3$.

La funció és contínua en $x = 3$ si: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

$$f(3) = 3 + k$$

Existeix $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 9 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 + k \end{array} \right\} \rightarrow 9 = 3 + k \rightarrow k = 6$$

089 Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x & \text{si } x < 2 \\ 2x + k & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Calcula la constant k perquè la funció sigui contínua en tots els punts.

La funció està formada per funcions polinòmiques; així doncs, sabem que és contínua en $\mathbb{R} - \{2\}$. Estudiem la continuïtat en el punt $x = 2$.

La funció és contínua en $x = 2$ si: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$f(2) = 4 + k$$

Existeix $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + k \end{array} \right\} \rightarrow -1 = 4 + k \rightarrow k = -5$$

090 Calcula la constant k perquè la funció següent sigui contínua en tots els punts.

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } x < 3 \\ \frac{x+3}{2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

(Activitat de Selectivitat)

La funció està formada per funcions polinòmiques; així doncs, sabem que és contínua en $\mathbb{R} - \{3\}$. Estudiem la continuïtat en el punt $x = 3$.

La funció és contínua en $x = 3$ si: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

$$f(3) = 3$$

Existeix $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = k \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 \end{array} \right\} \rightarrow k = 3$$

091 Calcula a , b , c i d perquè la funció $f(x)$ sigui contínua:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } x < 2 \\ 3x - a & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ b & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ -x + c & \text{si } 5 \leq x < 7 \\ d & \text{si } 7 \leq x \end{cases}$$

(Activitat de Selectivitat)

Límits i continuïtat de funcions

La funció està formada per funcions polinòmiques; així doncs, sabem que és contínua en els intervals en els quals estan definides. Estudiem els punts en què canvia l'expressió algebraica.

- La funció és contínua en $x = 2$ si: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$f(2) = 6 - a$$

$$\text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ si } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x).$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 6 - a \end{array} \right\} \rightarrow 1 = 6 - a \rightarrow a = 5$$

- Si $a = 5$, la funció és contínua en $x = 3$ si: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

$$f(3) = b$$

$$\text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ si } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x).$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = b \end{array} \right\} \rightarrow b = 4$$

- Si $a = 5$ i $b = 4$, la funció és contínua en $x = 5$ si: $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$

$$f(5) = -5 + c$$

$$\text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 5} f(x) \text{ si } \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x).$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = -5 + c \end{array} \right\} \rightarrow 4 = -5 + c \rightarrow c = 9$$

- Si $a = 5$, $b = 4$ i $c = 9$, la funció és contínua en $x = 7$ si: $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = f(7)$

$$f(7) = d$$

$$\text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 7} f(x) \text{ si } \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 7^+} f(x).$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = d \end{array} \right\} \rightarrow d = 2$$

092 Considera la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x} & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + a & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ \frac{x+2}{x} & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Troba els valors de a per als quals f és contínua.

(Activitat de Selectivitat)

$$f(x) = \frac{x-2}{x} \rightarrow \text{Definida en } \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } (-\infty, -1).$$

$f(x) = -x^2 + a \rightarrow$ Funció polinòmica $\rightarrow f(x)$ és contínua en $(-1, 1)$.

$f(x) = \frac{x+2}{x} \rightarrow$ Definida en $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow f(x)$ és contínua en $(1, +\infty)$.

Estudiem els punts en els quals canvia l'expressió algebraica.

La funció és contínua en $x = -1$ si: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$

$$f(-1) = -1 + a$$

Existeix $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1 + a \end{array} \right\} \rightarrow 3 = -1 + a \rightarrow a = 4$$

Si $a = 4$: $f(1) = 3 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \rightarrow f(x)$ també és contínua en $x = 1$.

093 Calcula els valors de $a, b \in \mathbb{R}$ perquè la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ bx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

sigui contínua en qualsevol punt.

(Activitat de Selectivitat)

$f(x) = x + a \rightarrow$ Funció polinòmica $\rightarrow f(x)$ és contínua en $(-\infty, 0)$.

$f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \rightarrow$ Definida en $(-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow f(x)$ és contínua en $(0, 1)$.

$f(x) = bx \rightarrow$ Funció polinòmica $\rightarrow f(x)$ és contínua en $(1, +\infty)$.

Estudiem els punts en els quals canvia l'expressió algebraica.

- La funció és contínua en $x = 0$ si: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

$$f(0) = a$$

Existeix $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = a$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x) - (1-x)}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{1}{3} \rightarrow a = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- La funció és contínua en $x = 1$ si: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$f(1) = b$$

Existeix $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = b \end{array} \right\} \rightarrow b = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Límits i continuïtat de funcions

- 094 Els beneficis, en milers d'euros, per la venda d'un article en funció de les despeses en publicitat, en milers d'euros, vénen donats per la funció:

$$B(x) = \begin{cases} 5x + 15 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -(x - 3)^2 + 30 & \text{si } 3 < x \leq 8 \end{cases}$$

en què x representa la quantitat, en milers d'euros, que es gasta en publicitat, i $B(x)$ els beneficis, en milers d'euros, que l'empresa productora rep per la venda de l'article.

És contínua, aquesta funció? Què passa si la despesa de publicitat és superior a 8.000 €?

La funció està formada per funcions polinòmiques; així doncs, és contínua en els intervals en els quals estan definides. Estudiem el punt en què canvia l'expressió algebraica.

La funció és contínua en $x = 3$ si: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

$$f(3) = 30$$

Existeix $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 30 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 30 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \rightarrow \text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 30 = f(3) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = 3.$$

Per tant, la funció és contínua en $(0, 8)$.

La funció no està definida per a valors reals més grans que 8, és a dir, no es poden determinar els beneficis a partir de 8.000 €.

- 095 Segons una determinada teoria mèdica, el perill d'un virus es mesura en funció del temps que porta en l'organisme mitjançant l'expressió següent, en què $P(t)$ és per a un temps de t minuts:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \\ \frac{50t - 62,5}{0,5t + 5} & \text{si } t > 5 \end{cases}$$

Estudia la continuïtat de la intensitat com a funció del temps.

$P(t) = t^2 \rightarrow$ Funció polinòmica $\rightarrow P(t)$ és contínua en $(0, 5)$.

$P(t) = \frac{50t - 62,5}{0,5t + 5} \rightarrow$ Definida en $\mathbb{R} - \{-10\} \rightarrow P(t)$ és contínua en $(5, +\infty)$.

$$f(5) = 25$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 5^-} P(t) = 25 \\ \lim_{t \rightarrow 5^+} P(t) = 25 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{t \rightarrow 5} P(t) = 25$$

$$\lim_{t \rightarrow 5} P(t) = P(5) \rightarrow P(t) \text{ és contínua en } t = 5.$$

Per tant, la funció és contínua en $(0, +\infty)$.

- 096 Un inversor empra la funció següent per reinvertir a la Borsa part del capital que obté mensualment. $R(x)$ representa la quantitat reinvertida quan el capital obtingut és x (tant la quantitat com el capital, en euros):

$$R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 600 \\ 40 + \frac{400 + 56x}{1.640 + 0,1x} & \text{si } x \geq 600 \end{cases}$$

La quantitat reinvertida és una funció contínua del capital obtingut?

(Activitat de Selectivitat)

$R(x) = 0 \rightarrow$ Funció constant $\rightarrow R(x)$ és contínua en $(0, 600)$.

$R(x) = 40 + \frac{400 + 56x}{1.640 + 0,1x} \rightarrow$ Està definida en $\mathbb{R} - \{-16.400\}$
 $\rightarrow R(x)$ és contínua en $(600, +\infty)$.

$$R(600) = 60$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 600^-} R(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 600^+} R(x) = 60 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 600} R(x).$$

Per tant, la funció no és contínua en $x = 600$, té una discontinuïtat de salt finit.

- 097 Un article es ven segons aquesta regla:

A 10,50 € el kilo, si $0 \leq x < 10$

A 7,50 € el kilo, si $10 \leq x < 20$

A 5,50 € el kilo, si $20 \leq x$

Escriu la funció que representa el preu de venda amb $x =$ «pes en kilos» i estudia'n la continuïtat.

$$f(x) = \begin{cases} 10,50x & \text{si } 0 \leq x < 10 \\ 7,50x & \text{si } 10 \leq x < 20 \\ 5,50x & \text{si } 20 \leq x \end{cases}$$

La funció està formada per funcions polinòmiques; així doncs, sabem que és contínua en els intervals en els quals estan definides.

Estudiem els punts en què canvia l'expressió algebraica.

- La funció és contínua en $x = 10$ si: $\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = f(10)$

$$f(10) = 75$$

$$\text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 10} f(x) \text{ si } \lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x).$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = 105 \\ \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = 75 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 10} f(x).$$

Per tant, la funció no és contínua en $x = 10$, té una discontinuïtat de salt finit.

Límits i continuïtat de funcions

- La funció és contínua en $x = 10$ si: $\lim_{x \rightarrow 10} f(x) = f(10)$
 $f(20) = 110$

Existeix $\lim_{x \rightarrow 20} f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow 20^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 20^+} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 20^-} f(x) = 150 \\ \lim_{x \rightarrow 20^+} f(x) = 110 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 20} f(x).$$

Per tant, la funció no és contínua en $x = 20$, té una discontinuïtat de salt finit.

098

Cada mes, una empresa decideix la despesa en publicitat en base als beneficis que espera obtenir durant aquest mes. Per fer-ho, utilitza la funció següent, on D és la despesa en publicitat, en centenars d'euros, i x són els beneficis esperats, en milers d'euros:

$$G(x) = \begin{cases} 6 + 2x - \frac{x^2}{6} & \text{si } 0 \leq x \leq 9 \\ 3 + \frac{75x + 5.400}{10x^2} & \text{si } x > 9 \end{cases}$$

La despesa en publicitat és una funció contínua del benefici?

(Activitat de Selectivitat)

$$G(x) = 6 + 2x - \frac{x^2}{6} \rightarrow \text{Funció polinòmica} \rightarrow G(x) \text{ és contínua en } (0, 9).$$

$$G(x) = 3 + \frac{75x + 5.400}{10x^2} \rightarrow \text{Definida en } \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow G(x) \text{ és contínua en } (9, +\infty).$$

Estudiem el punt en el qual canvia l'expressió algebraica.

La funció és contínua en $x = 9$ si: $\lim_{x \rightarrow 9} G(x) = G(9)$

$$G(9) = 10,5$$

Existeix $\lim_{x \rightarrow 9} G(x)$ si $\lim_{x \rightarrow 9^-} G(x) = \lim_{x \rightarrow 9^+} G(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 9^-} G(x) = 10,5 \\ \lim_{x \rightarrow 9^+} G(x) = 10,5 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 9} G(x) = 10,5$$

$$\lim_{x \rightarrow 9} G(x) = G(9) \rightarrow G(x) \text{ és contínua en } x = 9.$$

Per tant, la funció és contínua en $(0, +\infty)$.

099

El pes que una planxa d'un material determinat és capaç de suportar depèn de l'edat de la planxa segons la funció següent (el pes P en tones; t representa l'edat en anys de la planxa):

$$P(t) = \begin{cases} 50 - t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ 56 - \frac{20t}{t+1} & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

El pes és una funció contínua de l'edat?

A mesura que passi el temps, la planxa aguantarà cada vegada menys pes?

(Activitat de Selectivitat)

Les funcions són contínues en els intervals en els quals estan definides:

- En $(0, 3)$ la funció és una funció polinòmica; així doncs, és contínua.
- En $(3, +\infty)$ podria presentar una discontinuïtat en els punts en els quals s'anul·li el denominador:

$$t + 1 = 0 \rightarrow t = -1$$

Com que $-1 \notin (3, +\infty)$, la funció és contínua en $(3, +\infty)$.

Per tant, $P(t)$ és contínua si és contínua en $t = 3$, és a dir, si: $\lim_{t \rightarrow 3} P(t) = P(3)$

$$P(3) = 41$$

Existeix $\lim_{t \rightarrow 3} P(t)$ si $\lim_{t \rightarrow 3^-} P(t) = \lim_{t \rightarrow 3^+} P(t)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 3^-} P(t) = 41 \\ \lim_{t \rightarrow 3^+} P(t) = 41 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{t \rightarrow 3} P(t) = 41$$

$\lim_{t \rightarrow 3} P(t) = P(3) \rightarrow P(t)$ és contínua en $t = 3$.

Així doncs, la funció és contínua en $(0, +\infty)$.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(56 - \frac{20t}{t+1} \right) = 56 - 20 = 36$$

Per tant, a mesura que passi el temps la planxa aguantarà un pes de 36 tones.

100

El preu, en euros, de x litres d'oli comprats en una almàssera ve donat per la funció:

$$P(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \leq x \leq 20 \\ \sqrt{ax^2 + 2.000} & \text{si } x > 20 \end{cases}$$

- Determina el valor de la constant a perquè la funció $P(x)$ sigui contínua.
- Si compressin moltíssims litres d'oli, quant sortiria aproximadament el preu de cada litre?

(Activitat de Selectivitat)

- Com que les funcions són contínues en els intervals en els quals estan definides, $f(x)$ és contínua si és contínua en $x = 20$, és a dir, si: $\lim_{x \rightarrow 20} P(x) = P(20)$
 $P(20) = 60$

Existeix $\lim_{x \rightarrow 20} P(x)$ si $\lim_{x \rightarrow 20^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow 20^+} P(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 20^-} P(x) = 60 \\ \lim_{x \rightarrow 20^+} P(x) = \sqrt{400a + 2.000} \end{array} \right\} \rightarrow 60 = \sqrt{400a + 2.000}$$

$$\rightarrow 400a + 2.000 = 3.600 \rightarrow a = 4$$

- El preu de cada litre seria: $\frac{P(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2 + 2.000}}{x} = \sqrt{a} \text{ €/litre}$$

Límits i continuïtat de funcions

PREPARA LA SELECTIVITAT

(Activitats de Selectivitat)

- 1 Sigui x , en euros, el preu de venda del litre d'oli d'oliva verge extra. Considera:

$$f(x) = 2 - \frac{4}{x+1} \text{ amb } x \geq 0$$

la funció que representa el balanç econòmic quinzenal, en milers d'euros, d'una empresa agrícola. Estan limitats els guanys quinzenals d'aquesta empresa? I les pèrdues?

Com més alt sigui el preu de l'oli, x , més grans seran els guanys:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{4}{x+1} \right) = 2$$

Els guanys quinzenals més grans de l'empresa poden ser de 2.000 €.

Les pèrdues es produiran quan el preu del litre d'oli, x , sigui molt baix, és a dir, quan tendeixi a 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - \frac{4}{x+1} \right) = 2 - 4 = -2$$

Les pèrdues quinzenals més grans de l'empresa poden ser de 2.000 €.

- 2 Considera la funció:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x \leq 0 \\ -1 + 2x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -x^2 + 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Estudia'n la continuïtat en els punts $x = 0$ i $x = 1$.

- $f(0) = 0$

Existeix $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

Així doncs, la funció no és contínua en $x = 0$, té una discontinuïtat de salt infinit.

- $f(1) = 1$

Existeix $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \rightarrow f(x)$ és contínua en $x = 1$.

3 Sigui la funció:

$$f(t) = \begin{cases} -t^3 + 5t^2 & \text{si } 0 \leq t < 3 \\ -t^2 + 12t - 9 & \text{si } 3 \leq t \leq 5 \\ 2t + 16 & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

Estudia la continuïtat de f en $t = 3$ i $t = 5$.

• $f(3) = 18$

Existeix $\lim_{t \rightarrow 3} f(t)$ si $\lim_{t \rightarrow 3^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 3^+} f(t)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 3^-} f(t) = 18 \\ \lim_{t \rightarrow 3^+} f(t) = 18 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{t \rightarrow 3} f(t) = 18$$

$\lim_{t \rightarrow 3} f(t) = f(3) \rightarrow f(t)$ és contínua en $t = 3$.

• $f(5) = 26$

Existeix $\lim_{t \rightarrow 5} f(t)$ si $\lim_{t \rightarrow 5^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} f(t)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 5^-} f(t) = 26 \\ \lim_{t \rightarrow 5^+} f(t) = 26 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{t \rightarrow 5} f(t) = 26$$

$\lim_{t \rightarrow 5} f(t) = f(5) \rightarrow f(t)$ és contínua en $t = 5$.

4 Sigui la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Analitza'n la continuïtat.

La funció està formada per funcions polinòmiques; així doncs, sabem que és contínua en els intervals en els quals estan definides.

Estudiem el punt en què canvia l'expressió algebraica.

La funció és contínua en $x = 1$ si: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$f(1) = 1$$

Existeix $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \rightarrow f(x)$ és contínua en $x = 1$.

Per tant, la funció és contínua en $\mathbb{R}$.

Límits i continuïtat de funcions

- 5 Un determinat article es ven a un preu o a un altre segons la quantitat que se'n compra, d'acord amb les dades següents:

A 10 € el kilo, si $0 \leq x < 5$

A 9 € el kilo, si $5 \leq x < 10$

A 7 € el kilo, si $10 \leq x < 20$

A 5 € el kilo, si $20 \leq x$

En què x representa el pes en kilos de la quantitat comprada.

- a) Escriu la funció que representa el preu de l'article.
b) Estudia'n la continuïtat.

$$a) f(x) = \begin{cases} 10x & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ 9x & \text{si } 5 \leq x < 10 \\ 7x & \text{si } 10 \leq x < 20 \\ 5x & \text{si } 20 \leq x \end{cases}$$

- b) La funció està formada per funcions polinòmiques; així doncs, sabem que és contínua en els intervals en els quals estan definides.

• $f(5) = 45$

$$\text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 5} f(x) \text{ si } \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x).$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 50 \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 45 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 5} f(x).$$

Per tant, la funció no és contínua en $x = 5$, té una discontinuïtat de salt finit.

• $f(10) = 70$

$$\text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 10} f(x) \text{ si } \lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = 90 \\ \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = 70 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 10} f(x).$$

Per tant, la funció no és contínua en $x = 10$, té una discontinuïtat de salt finit.

• $f(20) = 100$

$$\text{Existeix } \lim_{x \rightarrow 20} f(x) \text{ si } \lim_{x \rightarrow 20^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 20^+} f(x).$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 20^-} f(x) = 140 \\ \lim_{x \rightarrow 20^+} f(x) = 100 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 20} f(x).$$

Per tant, la funció no és contínua en $x = 20$, té una discontinuïtat de salt finit.

- 6 Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6}$ i classifica les discontinuïtats que hi trobis. És possible tornar a definir la funció per evitar alguna discontinuïtat?

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

- No existeix $f(2)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x - 1)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 3} = 7$$

$\rightarrow$ Existeix $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Así, $x = 2$ és un punt de discontinuïtat evitable.

- No existeix $f(3)$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{14}{0} = \infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 3} f(x).$$

Per tant, $x = 3$ és un punt de discontinuïtat de salt infinit.

Així doncs, la funció és contínua en $\mathbb{R} - \{2, 3\}$.

Com que la primera discontinuïtat és evitable, podem definir la funció de la manera següent perquè sigui contínua en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6} & \text{si } x \neq 2 \\ 7 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

LITERATURA I MATEMÀTIQUES

Accidental

El signe d'igual [va dir en Magnus a l'Ambre] el va inventar Leibniz. Però, com saps que és veritat?, va dir l'Ambre.

Bé, va dir en Magnus. Suposem que ho vaig llegir en un llibre, perquè no recordo exactament ni quan ni com ho vaig aprendre, però suposem que ho vaig llegir en un llibre, la qual cosa ho fa presumiblement cert.

Per què ho fa cert el fet d'estar en un llibre?, va dir l'Ambre.

Perquè si estava en un llibre era presumiblement un llibre de text, va dir en Magnus. I els llibres de text acostumen a estar escrits per persones que han estudiat el tema durant molt de temps i amb prou profunditat per ensenyar-lo a gent que en sap molt menys. I a més, els llibres són editats per uns editors que comproven els fets abans de publicar-los. I suposant que no ho hagués après en un llibre, sinó que m'ho ensenyés un professor, s'hi podria aplicar el mateix criteri.

Però, vols dir que els professors són editats per editors que comproven els fets abans que els ensenyin? [...]

Ja saps a què em refereixo, va dir. Au vinga. Deixa'm tranquil.

Només estic dient que què passaria si no fos Leibniz, va dir l'Ambre.

Només estic dient això: i si va ser un altre?

Però va ser Leibniz, va dir en Magnus.

Però, i si no va ser ell?, va dir l'Ambre. Però va ser ell, va dir en Magnus. [...]

No estic enamorada de tu, va dir-li l'Ambre. Així que no te n'oblidis. Senzillament, els homes de la teva edat són apropiats per naturalesa per a les dones de la meua edat: es tracta d'eleva- n os a la potència màxima. Tu ets l'exponent variable.

Ho havia sentit bé? S'ho havia inventat ell, en sentir potència, això de l'exponent variable? Era una broma típica de l'Ambre? Navegant per Internet en un dels ordinadors nous de casa, un dels molts dies d'expulsió, i preguntant a en Jeeves, en Ask.com, el primer que li passava pel cap, com qui va matar en Kennedy, on era Osama Bin Laden i com va morir Plató, [...] i quan va inventar Leibniz el signe d'igual, en Magnus va descobrir que, després de tot, no havia estat Leibniz, sinó possiblement un gal·lès anomenat Robert Recorde qui l'havia inventat cap al 1550. L'única dada relativa a Robert Recorde que apareixia a la pàgina era que havia mort a la presó per deutes.

Accidental

Ali Smith

Un noi de disset anys, en Magnus, passa les vacances d'estiu amb la seva família en una ciutat de la costa anglesa. Té remordiments per haver col·laborat en un «joc» que va fer que una companya de l'institut se suïcidés.

Era feliç, generosa, molt estimada. Els seus amics se l'estimaven. Torna a posar el cap sota l'edredó. Era intel·ligent. Pertanyia a l'Associació de Gemmologia. A l'Associació de Gemmologia polien pedres i en feien coses, com ara joies o botons de puny. Segur que guardava les coses que feia al tocador de la seva habitació. [...] Ella no sabia qui era ell. Ni ell mateix no ho sabia tampoc. Té sort, ella. De ser morta. No pot sentir res. Ell tampoc sent res. Però no és mort. Després la notícia va córrer per tot l'institut. Una noia de Deans s'havia suïcidat a la cambra de bany de casa seva. Sa mare o son germà l'havien trobat. Va sentir el rumor a classe de matemàtiques. En Charlie vol ampliar la part del darrere de casa seva i vol construir una extensió de 18 metres quadrats de sòl. Vol fer servir com menys totxos millor, de manera que necessita saber quin és el perímetre més petit que pot utilitzar. Dóna l'expressió de l'àrea en termes de x , y . El càlcul és la matemàtica dels límits, en especial pel que fa referència als tipus de canvi. Gairebé hi va haver una guerra per qui el va descobrir, si Leibniz o Newton. Leibniz va inventar el signe $=$. Les matemàtiques = trobar allò simple en allò complex, allò finit en allò infinit. S'asseu a la moqueta, s'agafa els peus. [...] No hi haurà universitat. Ja no és probable que hi vagi. La universitat li fa riure. El càlcul li fa riure. Tot plegat és una broma.

Durant aquell estiu també coneix una dona jove, l'Ambre, amb la qual viu una aventura que tindrà conseqüències greus. Al paràgraf seleccionat es descriu una de les trobades amb ella.

Hi ha més referències a les matemàtiques a la novel·la, però aquests dos paràgrafs ja permeten plantejar algunes qüestions relacionades amb el càlcul infinitesimal i el seu origen.

La funció $f(x) = e^x$ és una funció amb *exponent variable*.

Si saps que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a)}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{a+x} - e^a}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^a(e^x - 1)}{x} = e^a \cdot 1 = e^a$$

Derivada d'una funció

ABANS DE COMENÇAR... RECORDA

001 Estudia la continuïtat d'aquestes funcions:

a) $f(x) = -\frac{x}{x^2 - 1}$

c) $h(x) = \ln 3x$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 + 7}$

d) $i(x) = x^3 - 2x + 1$

a) $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

c) $h(x)$ és contínua en $(0, +\infty)$.

b) $g(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

d) $i(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

002 Donades les funcions $f(x) = 3x^2 + x$ i $g(x) = -x + 5$, calcula el valor de les funcions compostes que s'indiquen.

a) $(g \circ f)(2)$

c) $(g \circ f)(x)$

e) $(f \circ f)(x)$

g) $(f \circ f)(1)$

b) $(f \circ g)(-3)$

d) $(f \circ g)(x)$

f) $(g \circ g)(x)$

h) $(g \circ g)(1)$

a) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(14) = -9$

b) $(f \circ g)(-3) = f(g(-3)) = f(8) = 200$

c) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 + x) = -(3x^2 + x) + 5 = -3x^2 - x + 5$

d) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(-x + 5) = 3(-x + 5)^2 + (-x + 5) = 3x^2 - 31x + 80$

e) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(3x^2 + x) = 3(3x^2 + x) + (3x^2 + x) = 12x^2 + 4x$

f) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(-x + 5) = -(-x + 5) + 5 = x$

g) $(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(4) = 52$

h) $(g \circ g)(1) = g(g(1)) = g(4) = 1$

ACTIVITATS

001 Troba la taxa de variació mitjana d'aquestes funcions: $f(x) = x^2 + 1$ $g(x) = x^3 + 7$ en els intervals $[0, 1]$ i $[-2, -1]$.

a) $TVM([0, 1]) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{2 - 1}{1} = 1$

$$TVM([-2, -1]) = \frac{f(-1) - f(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{2 - 5}{1} = -3$$

b) $TVM([0, 1]) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = \frac{8 - 7}{1} = 1$

$$TVM([-2, -1]) = \frac{g(-1) - g(-2)}{-1 - (-2)} = \frac{6 - (-1)}{1} = 7$$

002 L'espai, en metres, que recorre un mòbil en funció del temps, en segons, està determinat per la fórmula $e = \frac{1}{3}t^2 + t$. Troba'n la velocitat mitjana en $[1, 5]$.

$$TVM([1, 5]) = \frac{e(5) - e(1)}{5 - 1} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 25 + 5 - \frac{1}{3} \cdot 1 - 1}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ m/s}$$

003 Calcula la derivada d'aquestes funcions en $x = 2$.

a) $f(x) = 7x + 1$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$a) f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7(2+h) + 1 - 15}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7h}{h} = 7$$

$$b) f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{4}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - (4 + 4h + h^2)}{4h(2+h)^2} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h - h^2}{4h(2+h)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4 - h}{4(2+h)^2} = -\frac{1}{4}$$

004 Troba la derivada de les funcions en els punts $x = 1$ i $x = 2$.

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = \sqrt{x}$

$$a) f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (3 + 3h + h^2) = 3$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 6h^2 + h^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 6h + h^2) = 12$$

$$b) f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+h} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

005 Calcula les derivades laterals de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'(2^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(2+h) + 3 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(2^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2(2+h) + 1 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h}{h} = 2$$

Les derivades laterals no són iguals $\rightarrow f(x)$ no és derivable en $x = 2$.

Derivada d'una funció

006 Troba les derivades laterals de les funcions següents en el punt d'abscissa $x = 0$.

a) $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

b) $f(x) = \sqrt[4]{x}$

$$a) f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = +\infty$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^{\frac{1}{3}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = -\infty$$

Les derivades laterals no són iguals $\rightarrow f(x)$ no és derivable en $x = 0$.

$$b) f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[4]{h^3}} = +\infty$$

$f'(0^-)$ no existeix, perquè h és un nombre negatiu i la funció no està definida per a nombres negatius $\rightarrow f(x)$ no és derivable en $x = 0$.

007 Estudia la continuïtat i la derivabilitat d'aquesta funció en el punt $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 1) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3 = f(2) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = 2.$$

$$f'(2^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(2+h)^2 - 1 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (4 + h) = 4$$

$$f'(2^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(2+h) + 1 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Les derivades laterals existeixen, però són diferents; així doncs, $f(x)$ no és derivable en $x = 2$.

008 Determina si la funció $f(x) = |x + 2|$ és contínua i derivable en els punts següents.

a) $x = 0$

b) $x = -2$

c) $x = 3$

d) $x = -5$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 2) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 2) = 2 = f(0) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = 0.$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(0+h) + 2 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(0+h) + 2 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Les derivades laterals existeixen i són iguals; així doncs, $f(x)$ és derivable en $x = 0$.

$$b) \lim_{x \rightarrow -2^+} (x + 2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (-x - 2) = 0 = f(-2) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = -2.$$

$$f'(-2^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(-2+h) + 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(-2^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(-2+h) - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Les derivades laterals existeixen, però no són iguals; així doncs, $f(x)$ no és derivable en $x = -2$.

$$c) \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 2) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 2) = 5 = f(3) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = 3.$$

$$f'(3^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(3+h) + 2 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(3^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(3+h) + 2 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Les derivades laterals existeixen i són iguals; així doncs, $f(x)$ és derivable en $x = 3$.

$$d) \lim_{x \rightarrow -5^+} (-x - 2) = \lim_{x \rightarrow -5^-} (-x - 2) = 3 = f(-5) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = -5.$$

$$f'(-5^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(-5+h) - f(-5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-(-5+h) - 2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'(-5^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-5+h) - f(-5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(-5+h) - 2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Les derivades laterals existeixen i són iguals; així doncs, $f(x)$ és derivable en $x = -5$.

009 Troba la funció derivada de $f(x) = 3x^2 + 1$ aplicant la definició.
A partir del resultat, calcula la derivada de $f(x)$ en aquests punts:

a) $x = 1$

b) $x = 2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 + 1 - (3x^2 - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6hx + 3h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h) = 6x \end{aligned}$$

$$a) f'(1) = 6$$

$$b) f'(2) = 12$$

010 Fes servir la definició per calcular la funció derivada
de la funció $f(x) = x^3 + x^2$. Després, calcula les derivades successives.
Existeixen totes fins a la derivada n -èsima?

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 + (x+h)^2 - (x^3 + x^2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3 + 2hx + h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3hx + h^2 + 2x + h) = 3x^2 + 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 + 2(x+h) - (3x^2 + 2x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6hx + 3h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h + 2) = 6x + 2 \end{aligned}$$

$$f'''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x+h) + 2 - (6x + 2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h}{h} = 6$$

$$f^{(IV)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'''(x+h) - f'''(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 - 6}{h} = 0$$

A partir de la derivada quarta totes les funcions derivades són iguals a 0.

Derivada d'una funció

- 011 Calcula la derivada d'aquestes funcions i comprova que es compleix que el resultat és igual a la suma de les derivades de les funcions que les formen:

a) $f(x) = x - x^2$

b) $f(x) = x^3 + 2x$

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - (x+h)^2 - (x - x^2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 2hx - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (1 - 2x - h) = 1 - 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \\ &= 1 - \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 1 - 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 + 2(x+h) - (x^3 + 2x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3hx + h^2 + 2) = 3x^2 + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3hx + h^2) + 2 = 3x^2 + 2 \end{aligned}$$

- 012 Troba les derivades de $f(x) = 6x^2$ i $g(x) = -x$. Quina és la derivada del seu producte?

I de $\frac{f(x)}{g(x)}$?

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(x+h)^2 - 6x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12hx + 6h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (12x + 6h) = 12x \end{aligned}$$

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 12x(-x) + 6x^2(-1) = -18x^2$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{12x(-x) - 6x^2(-1)}{(-x)^2} = -6$$

- 013 Fes servir les definicions de composició de funcions i de derivada per comprovar que es compleix la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} [(g \circ f)(x)]' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x+h) - (g \circ f)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{f(x+h) - f(x)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g'(f(x)) \cdot f'(x) \end{aligned}$$

- 014 Troba la derivada de la funció $k(x) = \sqrt{2x+5}$ per mitjà de la definició de derivada, i comprova que el resultat és el mateix que si apliques la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} k'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(x+h)+5} - \sqrt{2x+5}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2(x+h)+5} - \sqrt{2x+5})(\sqrt{2(x+h)+5} + \sqrt{2x+5})}{h(\sqrt{2(x+h)+5} + \sqrt{2x+5})} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x+2h+5-2x-5}{h(\sqrt{2(x+h)+5} + \sqrt{2x+5})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2(x+h)+5} + \sqrt{2x+5}} = \\ &= \frac{2}{2\sqrt{2x+5}} = \frac{1}{\sqrt{2x+5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } f(x) = 2x+5 \rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)+5 - (2x+5)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } g(x) = \sqrt{x} \rightarrow g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Com que $k(x) = (g \circ f)(x)$, si apliquem la regla de la cadena:

$$k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+5}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$$

- 015 Calcula la derivada d'aquesta funció i indica els passos que segueixes per trobar-la:

$$f(x) = 5x^4 + 3x^2$$

Apliquem la derivada de les funcions potencials:

$$(x^4)' = 4x^3 \quad (x^2)' = 2x$$

Si tenim en compte les operacions amb derivades:

$$f'(x) = 5 \cdot 4x^3 + 3 \cdot 2x = 20x^3 + 6x$$

- 016 Troba la derivada de la funció següent:

$$f(x) = \left(\frac{x-2}{x^5} \right)^4$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \left(\frac{x-2}{x^5} \right)^3 \cdot \frac{1 \cdot x^5 - (x-2)5x^4}{(x^5)^2} = \frac{4(x-2)^3}{x^{15}} \cdot \frac{x^5 - 5x^5 + 10x^4}{x^{10}} = \\ &= \frac{(x-2)^3(-16x+40)}{x^{21}} \end{aligned}$$

Derivada d'una funció

017 Troba la derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = 5 \ln x + e^{4x}$ b) $f(x) = \log_3 (-6x^2 \ln x)$

a) $f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{x} + e^{4x} \cdot 4$

b) $f'(x) = \frac{-12x \ln x + (-6x^2) \frac{1}{x}}{-6x^2 \ln x \ln 3} = \frac{2 \ln x + 1}{x \ln x \ln 3}$

018 Determina la derivada d'aquestes funcions:

a) $f(x) = e^x \log_4 x^5$ b) $f(x) = \ln (3x^2 - x)^{-7}$

a) $f'(x) = e^x \log_4 x^5 + e^x \cdot \frac{5x^4}{x^5 \ln 4} = e^x \log_4 x^5 + e^x \cdot \frac{5}{x \ln 4}$

b) $f'(x) = \frac{-7(3x^2 - x)^{-8} (6x - 1)}{(3x^2 - x)^{-7}} = \frac{-7(6x - 1)}{3x^2 - x}$

019 Determina de quin tipus són les funcions següents i troba la derivada de cadascuna:

a) $f(x) = \cos (\sin 2x)$ c) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^3 + 2}$

b) $f(x) = \sin (\ln 2x)$ d) $f(x) = \operatorname{tg} (x^4 + 3x)$

a) $f'(x) = -\sin (\sin 2x) \cdot \cos 2x \cdot 2$

b) $f'(x) = \cos (\ln 2x) \cdot \frac{2}{2x} = \frac{\cos (\ln 2x)}{x}$

c) $f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(x^3 + 2)^{-\frac{1}{2}} 3x^2}{1 + (\sqrt{x^3 + 2})^2} = \frac{3x^2}{2(x^3 + 2)\sqrt{x^3 + 2}}$

d) $f'(x) = (1 + \operatorname{tg}^2 (x^4 + 3x))(4x^3 + 3)$

020 Calcula la derivada d'aquestes funcions:

a) $f(x) = \cos \sqrt{x^2 + x}$ c) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{1+x}{1-x}$

b) $f(x) = \sin x^2 + 3 \cos^2 x$ d) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$

a) $f'(x) = -\sin (\sqrt{x^2 + x}) \cdot \frac{1}{2}(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} (2x + 1) = -\frac{(2x + 1) \sin (\sqrt{x^2 + x})}{2\sqrt{x^2 + x}}$

b) $f'(x) = \cos x^2 \cdot 2x + 6 \cos x (-\sin x) = 2x \cos x^2 - 6 \sin x \cos x$

c) $f'(x) = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1+x}{1-x}\right) \frac{1(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1+x}{1-x}\right) \frac{2}{(1-x)^2}$

d) $f'(x) = \frac{\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}}{1 + (\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$

- 021 Calcula la taxa de variació mitjana de la funció $f(x) = \frac{1}{x}$ en els intervals $[2, 3]$ i $[2, 5]$.

A partir d'ella, determina'n la derivada en el punt $x = 2$.

$$TVM([2, 3]) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{6}$$

$$TVM([2, 5]) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{2}}{3} = -\frac{1}{10}$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 - 2 - h}{2h(2+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}$$

- 022 Troba les taxes de variació mitjana de la superfície d'un cercle quan el radi passa de mesurar 1 cm a 3 cm i de 3 cm a 5 cm. Es manté constant si la variació del radi és la mateixa?

La funció que mesura la superfície de d'un cercle segons la longitud del seu radi, x , és: $f(x) = \pi x^2$

$$TVM([1, 3]) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9\pi - \pi}{2} = 4\pi$$

$$TVM([3, 5]) = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{25\pi - 9\pi}{2} = 8\pi$$

Tot la variació del radi és la mateixa, la variació de la superfície no roman constant.

- 023 Galileu va demostrar que, quan un objecte cau lliurement, és a dir, prescindint de la resistència de l'aire, l'altura recorreguda, en metres, i el temps transcorregut, en segons, es relacionen mitjançant la fórmula $h = \frac{1}{2}gt^2$, o, aproximadament, $h = 5t^2$.

a) Calcula les taxes de variació mitjana entre 1 i 7 segons i entre 1 i 5 segons.

b) Troba la derivada d'aquesta funció en $x = 1$.

$$a) \quad TVM([1, 7]) = \frac{f(7) - f(1)}{7 - 1} = \frac{245 - 5}{6} = 40$$

$$TVM([1, 5]) = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{125 - 5}{4} = 30$$

$$b) \quad f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(1+h)^2 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10h + 5h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (10 + 5h) = 10$$

Derivada d'una funció

024 A partir de la definició, calcula la derivada de les funcions següents en el punt $x = -1$.

a) $f(x) = 3x$ b) $g(x) = x^2$ c) $i(x) = x^3$ d) $j(x) = |x|$

$$a) \quad f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(-1+h) + 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3$$

$$b) \quad g'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(-1+h) - g(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-2 + h) = -2$$

$$c) \quad i'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{i(-1+h) - i(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^3 + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h - 3h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3 - 3h + h^2) = 3$$

$$d) \quad j'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{j(-1+h) - j(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|-1+h| - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-h-1}{h} = -1$$

025 A partir de la definició, troba la derivada de les funcions següents en el punt $x = 0$.

a) $f(x) = ax + b$ c) $i(x) = \sin x$
b) $g(x) = ax^2$ d) $h(x) = \cos x$

$$a) \quad f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah + b - b}{h} = a$$

$$b) \quad g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ah^2 - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (ah) = 0$$

$$c) \quad i'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(0+h) - \sin(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

$$d) \quad j'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(0+h) - \cos(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$$

026 A partir de la definició, calcula les derivades laterals d'aquestes funcions en $x = 2$.

a) $f(x) = |2 - x|$ b) $g(x) = |x^2 - 4|$

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} -2 + x & \text{si } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$f'(2^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-2 + 2 + h}{h} = 1$$

$$f'(2^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2 - (2+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Les derivades laterals no són iguals $\rightarrow f(x)$ no és derivable en $x = 2$.

$$b) \ g(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$g'(2^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (4 + h) = 4$$

$$g'(2^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(2+h)^2 + 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-4h - h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-4 - h) = -4$$

Les derivades laterals no són iguals $\rightarrow g(x)$ no és derivable en $x = 2$.

027 Mitjançant la definició, troba les derivades laterals de la funció següent en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h^2} = +\infty$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h^2} = +\infty$$

028 Considera la funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ 2 - x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calcula, si és possible, les derivades laterals de f en $x = 1$.

$$f'(1^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2 - (1+h)^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h^2 - 2h - 3}{h} = -\infty$$

$$f'(1^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)^2 + 3 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (2 + h) = 2$$

029 Estudia si la funció $f(x) = \sqrt[3]{x}$ és contínua i derivable en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{x} = 0 = f(0) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = 0.$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty \rightarrow f(x) \text{ no és derivable en } x = 0.$$

Derivada d'una funció

030

Demostra que la funció següent és contínua en el punt $x = 1$, però que no hi és derivable.

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Aquest fet contradiu algun dels teoremes o propietats estudiats en la unitat?
b) Posa un exemple d'una funció que sigui derivable i discontinua en un punt.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (\ln x) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} x \right) = \ln 1 = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x + 1) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = 1$$

$$\begin{aligned} f'(1^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+h)}{h} = \\ &= \ln \left(\lim_{h \rightarrow 0^+} (1+h)^{\frac{1}{h}} \right) = \ln(e) = 1 \end{aligned}$$

$$f'(1^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-(1+h) + 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Les derivades laterals no són iguals; així doncs, $f(x)$ no és derivable en $x = 1$.

- a) No, perquè la continuïtat no implica derivabilitat.
b) No existeix, perquè si una funció és discontinua en un punt no pot ser derivable en aquest punt.

031

Estudia la continuïtat i la derivabilitat de la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ -2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- Si $x > 2$: $f(x) = -2x \rightarrow$ Funció polinòmica; per tant, contínua en $(2, +\infty)$.
- Si $x < 2$: $f(x) = \frac{x+1}{x-1} \rightarrow$ Funció racional, contínua en $(-\infty, 2)$, excepte en $x = 1$.
- Si $x = 1$:

$$\left. \begin{aligned} f(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = -\infty \\ f(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow f(x) \text{ no és contínua en } x = 1; \text{ per tant, no és derivable en } x = 1.$$

- Si $x = 2$:

$$\left. \begin{aligned} f(2^-) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-1} = 3 \\ f(2^+) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (-2x) = -4 \end{aligned} \right\} \rightarrow f(x) \text{ no és contínua en } x = 2; \text{ per tant, no és derivable en } x = 2.$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{(x-1)^2} & \text{si } x < 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Així doncs, la funció és contínua i derivable en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

032 Se considera la funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -4 \\ x + 2 & \text{si } -4 \leq x < 2 \\ \frac{8}{x} & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Estudia la continuïtat i la derivabilitat de $f(x)$.

- Si $x < -4$: $f(x) = -1 \rightarrow$ Funció constant; per tant, contínua en $(-\infty, -4)$.
- Si $-4 < x < 2$: $f(x) = x + 2 \rightarrow$ Funció polinòmica; per tant, contínua en $(-4, 2)$.
- Si $x > 2$: $f(x) = \frac{8}{x} \rightarrow$ Funció racional; per tant, contínua en $(2, +\infty)$.
- Si $x = -4$:

$$\left. \begin{aligned} f(-4^-) &= \lim_{x \rightarrow -4^-} (-1) = -1 \\ f(-4^+) &= \lim_{x \rightarrow -4^+} (x + 2) = -2 \end{aligned} \right\} \rightarrow f(x) \text{ no és contínua en } x = -4; \text{ per tant, no és derivable en } x = -4.$$

- Si $x = 2$:

$$\left. \begin{aligned} f(2^-) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = 4 \\ f(2^+) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{8}{x} = 4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 = f(2) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = 2.$$

Així, la funció és contínua en $\mathbb{R} - \{-4\}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -4 \\ 1 & \text{si } -4 < x < 2 \\ -\frac{8}{x^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(2^-) &= 1 \\ f'(2^+) &= -2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Les derivades laterals no són iguals; per tant, } f(x) \text{ no és derivable en } x = 2.$$

Així doncs, la funció és derivable en $\mathbb{R} - \{-4, 2\}$.

033 Considera la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ a + bx & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Determina a i b perquè sigui contínua en $\mathbb{R}$.
- Per a aquests valors, estudia la derivabilitat de $f(x)$.

- Si $x < 0$: $f(x) = x^2 \rightarrow$ Funció polinòmica; per tant, contínua en $(-\infty, 0)$.
 - Si $0 < x < 1$: $f(x) = a + bx \rightarrow$ Funció polinòmica; per tant, contínua en $(0, 1)$.
 - Si $x > 1$: $f(x) = 3 \rightarrow$ Funció constant; per tant, contínua en $(1, +\infty)$.

La funció és contínua en $\mathbb{R}$ si ho és en els punts en els quals canvia l'expressió algebraica.

Derivada d'una funció

- Perquè la funció sigui contínua en $x = 0$, els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(0) = 0$:

$$\left. \begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 \\ f(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + bx) = a \end{aligned} \right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow a = 0$$

- Si $a = 0$, perquè la funció sigui contínua en $x = 1$, els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(1) = b$:

$$\left. \begin{aligned} f(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx) = b \\ f(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 3 = 3 \end{aligned} \right\} \rightarrow f(1^-) = f(1^+) = f(1) \rightarrow b = 3$$

$$b) \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= 0 \\ f'(0^+) &= 3 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Les derivades laterals no són iguals; així doncs, } f(x) \text{ no és derivable en } x = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= 3 \\ f'(1^+) &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Les derivades laterals no són iguals; així doncs, } f(x) \text{ no és derivable en } x = 1.$$

Per tant, la funció és derivable en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

034 Sigui f la funció definida per:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \geq 3 \\ 2x + a & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

a) Troba el valor de a perquè f sigui contínua.

b) Comprova si és derivable en $x = 3$.

- a) Si $x > 3$: $f(x) = x^2 - 2x \rightarrow$ Funció polinòmica; per tant, contínua en $(3, +\infty)$.
- Si $x < 3$: $f(x) = 2x + a \rightarrow$ Funció polinòmica; per tant, contínua en $(-\infty, 3)$.
- Perquè la funció sigui contínua en $x = 3$, els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(3) = 3$:

$$\left. \begin{aligned} f(3^-) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x + a) = 6 + a \\ f(3^+) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 2x) = 3 \end{aligned} \right\} \rightarrow f(3^-) = f(3^+) = f(3) \rightarrow 6 + a = 3 \rightarrow a = -3$$

b) La funció només pot ser derivable si és contínua, per això considerem:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \geq 3 \\ 2x - 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(3^+) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(3+h)^2 - 2(3+h) - 3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{9 + 6h + h^2 - 6 - 2h - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (4 + h) = 4 \end{aligned}$$

$$f'(3^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2(3+h) - 3 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h}{h} = 2$$

Les derivades laterals existeixen, però no són iguals; així doncs, $f(x)$ no és derivable en $x = 3$.

035 Considera la funció definida per:

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

on a és un nombre real.

a) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ i comprova que $f(x)$ és contínua en $x = 0$.

b) Per a quin valor del paràmetre a la funció $f(x)$ és derivable en $x = 0$?

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{ax} = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$f(0) = e^{a \cdot 0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = 0.$$

$$\text{b) } f'(x) = \begin{cases} ae^{ax} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Perquè la funció sigui derivable en $x = 0$, les derivades laterals han de ser iguals:

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = a \\ f'(0^+) = 2 \end{array} \right\} \rightarrow a = 2$$

036 Donada la funció: $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ e^{2-x} + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

a) Calcula a perquè f sigui contínua en $x = 2$.

b) Per al valor obtingut, f és derivable en $x = 2$?

a) Perquè la funció sigui contínua en $x = 2$, els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(2) = 3$:

$$\left. \begin{array}{l} f(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax^2 + 1) = 4a + 1 \\ f(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (e^{2-x} + 2) = 3 \end{array} \right\} \rightarrow f(2^-) = f(2^+) = f(2) \rightarrow 4a + 1 = 3 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ e^{2-x} + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 2 \\ -e^{2-x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(2^-) = 2 \\ f'(2^+) = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Les derivades laterals no són iguals; així doncs, } f(x) \text{ no és derivable en } x = 2.$$

037 Considera la funció:

$$f(x) = \begin{cases} -4x - 3 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x^2 - 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{k+2}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Calcula el valor que ha de tenir el paràmetre k perquè la funció sigui contínua en $\mathbb{R}$ i estudia'n la derivabilitat per al valor de obtingut.

(Activitat de Selectivitat)

Derivada d'una funció

- Si $x < -1$: $f(x) = -4x - 3 \rightarrow$ Funció polinòmica; per tant, contínua en $(-\infty, -1)$.
- Si $-1 < x < 1$: $f(x) = 2x^2 - 1 \rightarrow$ Funció polinòmica; per tant, contínua en $(-1, 1)$.
- Si $x > 1$: $f(x) = \frac{k+2}{x} \rightarrow$ Funció racional contínua en $x = 0$; per tant, contínua en $(1, +\infty)$.
- Perquè la funció sigui contínua en $x = -1$, els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(-1) = 1$:

$$\left. \begin{aligned} f(-1^-) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (-4x - 3) = 1 \\ f(-1^+) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (2x^2 - 1) = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 = f(-1) \\ \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = -1.$$

- Perquè la funció sigui contínua en $x = 1$, els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(1) = k + 2$:

$$\left. \begin{aligned} f(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 - 1) = 1 \\ f(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{k+2}{x} = k+2 \end{aligned} \right\} \rightarrow f(1^-) = f(1^+) = f(1) \rightarrow k+2 = 1 \rightarrow k = -1$$

$$\text{Si } k = -1: f'(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < -1 \\ 4x & \text{si } -1 < x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(-1^-) &= -4 \\ f'(-1^+) &= -4 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Les derivades laterals existeixen i són iguals} \\ \rightarrow f(x) \text{ és derivable en } x = -1.$$

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= 4 \\ f'(1^+) &= -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Les derivades laterals no són iguals} \\ \rightarrow f(x) \text{ no és derivable en } x = 1.$$

038 Considera la funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

amb a i $b \in \mathbb{R}$.

- Calcula a i b perquè la funció sigui contínua.
- Per a aquests valors de a i b , calcula la derivada de f on existeixi.

- Si $x < 0$: $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \rightarrow$ Funció racional; per tant, contínua en $(-\infty, 0)$.
- Si $0 < x < 3$: $f(x) = ax + b \rightarrow$ Funció polinòmica; per tant, contínua en $(0, 3)$.
- Si $x > 3$: $f(x) = x - 5 \rightarrow$ Funció polinòmica; per tant, contínua en $(3, +\infty)$.

- Perquè la funció sigui contínua en $x = 0$, els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(0) = b$:

$$\left. \begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2 + 1} = 1 \\ f(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b \end{aligned} \right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow b = 1$$

- Considerem que $b = 1$; aleshores, perquè la funció sigui contínua en $x = 3$ els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(3) = 3a + 1$:

$$\left. \begin{aligned} f(3^-) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax + 1) = 3a + 1 \\ f(3^+) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - 5) = -2 \end{aligned} \right\} \rightarrow f(3^-) = f(3^+) = f(3) \rightarrow 3a + 1 = -2 \rightarrow a = -1$$

$$\text{b) Si } a = -1 \text{ i } b = 1, \text{ aleshores: } f'(x) = \begin{cases} -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= 0 \\ f'(0^+) &= -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Les derivades laterals no són iguals} \\ \rightarrow f(x) \text{ no és derivable en } x = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} f'(3^-) &= -1 \\ f'(3^+) &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Les derivades laterals no són iguals} \\ \rightarrow f(x) \text{ no és derivable en } x = 3.$$

039 Calcula els valors de a i b perquè la funció:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2a \cos x & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ ax^2 + b & \text{si } x \geq \pi \end{cases}$$

sigui contínua per a qualsevol valor de x .

Estudia la derivabilitat de $f(x)$ per als valors de a i b obtinguts.

- Si $x < 0$: $f(x) = 3x + 2 \rightarrow$ Funció polinòmica; per tant, contínua en $(-\infty, 0)$.
- Si $0 < x < \pi$: $f(x) = x^2 + 2a \cos x \rightarrow$ Funció polinòmica i trigonomètrica; per tant, contínua en $(0, \pi)$.
- Si $x > \pi$: $f(x) = ax^2 + b \rightarrow$ Funció polinòmica; per tant, contínua en $(\pi, +\infty)$.
- Perquè la funció sigui contínua en $x = 0$, els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(0) = 2a$:

$$\left. \begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + 2) = 2 \\ f(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2a \cos x) = 2a \end{aligned} \right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow 2a = 2 \rightarrow a = 1$$

Considerem que $a = 1$; aleshores, perquè la funció sigui contínua en $x = \pi$ els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(\pi) = \pi^2 + b$:

$$\left. \begin{aligned} f(\pi^-) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} (x^2 + 2 \cos x) = \pi^2 - 2 \\ f(\pi^+) &= \lim_{x \rightarrow \pi^+} (x^2 + b) = \pi^2 + b \end{aligned} \right\} \rightarrow f(\pi^-) = f(\pi^+) = f(\pi) \\ \rightarrow \pi^2 - 2 = \pi^2 + b \rightarrow b = -2$$

Derivada d'una funció

$$\text{Si } a = 1 \text{ i } b = -2, \text{ aleshores: } f'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 0 \\ 2x - 2\sin x & \text{si } 0 < x < \pi \\ 2x & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 3 \\ f'(0^+) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Les derivades laterals no són iguals; per tant,} \\ f(x) \text{ no és derivable en } x = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(\pi^-) = 2\pi \\ f'(\pi^+) = 2\pi \end{array} \right\} \rightarrow \text{Les derivades laterals existeixen i són iguals; per tant,} \\ f(x) \text{ és derivable en } x = \pi.$$

040 Decideix si la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ és derivable en $x = 1$.

Perquè una funció sigui derivable en un punt ha de ser contínua, i perquè sigui contínua els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb el valor de la funció en el mateix punt; en aquest cas, amb $f(1) = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2 \end{array} \right\} \rightarrow f(x) \text{ no és contínua en } x = 1; \text{ per tant,} \\ \text{no és derivable en } x = 1.$$

041 Demostra que la funció $f(x) = |x|^3$ és derivable en $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = 0.$$

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^2 = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-h^2) = 0$$

Les derivades laterals existeixen i són iguals; per tant, $f(x)$ és derivable en $x = 0$.

042 Raona si les funcions següents són derivables en els punts $x = -2$, $x = 0$ i $x = 1$.

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ b) $g(x) = x|x+2|$

a) • Si $x = -2$: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -1 = f(-2) \rightarrow f(x)$ és contínua en $x = -2$.

• Si $x = 0$: $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow f(x) \text{ no és contínua en } x = 0; \text{ per tant,} \\ \text{no és derivable en } x = 0.$

• Si $x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 = f(1) \rightarrow f(x)$ és contínua en $x = 1$.

Estudiem la derivabilitat en els punts en els quals la funció és contínua:

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$$

• Si $x = -2$: $f'(-2) = -\frac{1}{2} \rightarrow f(x)$ és derivable en $x = -2$.

• Si $x = 1$: $f'(1) = -2 \rightarrow f(x)$ és derivable en $x = 1$.

$$b) \ g(x) = \begin{cases} x(x+2) & \text{si } x \geq -2 \\ -x(x+2) & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

- Si $x = -2$: $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = 0 = g(-2) \rightarrow g(x)$ és contínua en $x = -2$.
- Si $x = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0 = g(0) \rightarrow g(x)$ és contínua en $x = 0$.
- Si $x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 3 = g(1) \rightarrow g(x)$ és contínua en $x = 1$.

Estudiem la derivabilitat en aquests punts:

$$g'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x > -2 \\ -2x - 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

- Si $x = -2$: $\left. \begin{matrix} g'(-2^-) = 2 \\ g'(-2^+) = -2 \end{matrix} \right\} \rightarrow$ Les derivades laterals no són iguals; per tant, $g(x)$ no és derivable en $x = -2$.
- Si $x = 0$: $g'(0) = 2 \cdot 0 + 2 = 2 \rightarrow g(x)$ és derivable en $x = 0$.
- Si $x = 1$: $g'(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4 \rightarrow g(x)$ és derivable en $x = 1$.

043

Considera la funció: $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-3}{x+1} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Estudia'n la derivabilitat en $x = 0$.

(Activitat de Selectivitat)

Una funció només pot ser derivable si és contínua.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -3 = f(0) \rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = 0.$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{5}{(x+1)^2} & \text{si } x < 0 \\ 2x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{matrix} f'(0^-) = 5 \\ f'(0^+) = 2 \end{matrix} \right\} \rightarrow \text{Les derivades laterals no són iguals} \rightarrow f(x) \text{ no és derivable en } x = 0.$$

044

Sigui la funció f definida mitjançant: $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Estudia la derivabilitat de f en $x = -1$ i $x = 1$.

(Activitat de Selectivitat)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- Si $x < 1$: $f(x) = x^2 - x + 1 \rightarrow$ Funció polinòmica; per tant, contínua en $(-\infty, 1)$
 $\rightarrow$ És contínua en $x = -1$.

$$f'(-1) = -3 \rightarrow f(x) \text{ és derivable en } x = -1.$$

- Perquè la funció sigui derivable en $x = 1$ ha de ser contínua en aquest punt, per la qual cosa els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(1) = 0$:

$$\left. \begin{matrix} f(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - x + 1) = 1 \\ f(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow f(1^-) \neq f(1^+) \rightarrow \text{No és contínua en } x = 1.$$

$\rightarrow$ No és derivable en $x = 1$.

Derivada d'una funció

045 Determina el valor de a , si existeix, per al qual la funció següent és derivable en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Perquè la funció sigui derivable, en primer lloc, ha de ser contínua.

La funció és contínua en $x = 0$ si els límits laterals són iguals i si coincideixen amb $f(0) = \cos 0 = 1$:

$$\left. \begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1 \\ f(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + a) = a \end{aligned} \right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow a = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} -\sin x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= 0 \\ f'(0^+) &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Les derivades laterals existeixen i són iguals; així doncs,} \\ f(x) \text{ és derivable en } x = 0 \text{ si } a = 1.$$

046 Considera la funció definida per:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Troba els valors que han de tenir a i b perquè sigui derivable en $x = 0$.

Perquè la funció sigui derivable en $x = 0$ ha de ser contínua en aquest punt, per la qual cosa els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(0) = 0$:

$$\left. \begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin x = 0 \\ f(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b \end{aligned} \right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow b = 0$$

Una vegada que comprovem que és contínua en $x = 0$, perquè la funció sigui derivable en aquest punt les derivades laterals han d'existir i han de ser iguals:

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \left. \begin{aligned} f'(0^-) &= 1 \\ f'(0^+) &= a \end{aligned} \right\} \rightarrow a = 1$$

047 Considera la funció següent: $f(x) = \begin{cases} -x^3 + x^2 & \text{si } x < 1 \\ ax - b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Troba els valors de a i b perquè sigui derivable en tots els punts.

Una funció només pot ser derivable en tots els punts si és contínua en aquests punts:

- Si $x < 1$: $f(x) = -x^3 + x^2 \rightarrow$ Funció polinòmica; per tant, contínua en $(-\infty, 1)$.
- Si $x > 1$: $f(x) = ax^2 + b \rightarrow$ Funció polinòmica; per tant, contínua en $(1, +\infty)$.
- Perquè la funció sigui contínua en $x = 1$, els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(1) = a - b$:

$$\left. \begin{aligned} f(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^3 + x^2) = 0 \\ f(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax - b) = a - b \end{aligned} \right\} \rightarrow f(1^-) = f(1^+) = f(1) \rightarrow a - b = 0 \rightarrow a = b$$

La funció és derivable en $x = 1$ si les derivades laterals existeixen i són iguals:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 2x & \text{si } x < 1 \\ a & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \left. \begin{aligned} f'(1^-) &= -1 \\ f'(1^+) &= a \end{aligned} \right\} \rightarrow a = -1 \rightarrow b = -1$$

- 048 Determina els valors de a i b perquè la funció sigui derivable en tots els punts.

$$f(x) = \begin{cases} bx^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{a}{x} & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \frac{x^2 + ax + 1}{x + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Si $-1 < x < 1$: $f(x) = \frac{a}{x} \rightarrow$ Funció racional, no contínua en $x = 0$; així doncs, no és derivable en $x = 0$.

Per tant, no hi ha valors de a i b per als quals la funció sigui derivable en tots els punts.

- 049 Troba els valors que han de tenir a i b perquè la funció següent sigui derivable en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \ln(e + \sin x) & \text{si } x < 0 \\ x^3 + ax + b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Perquè la funció sigui derivable en $x = 0$ ha de ser contínua en aquest punt, per la qual cosa els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(0) = b$:

$$\left. \begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(e + \sin x) = 1 \\ f(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 + ax + b) = b \end{aligned} \right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow b = 1$$

Perquè la funció sigui derivable en $x = 0$, les derivades laterals han d'existir i han de ser iguals:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{e + \sin x} & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 + a & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \frac{1}{e} \\ f'(0^+) &= a \end{aligned} \right\} \rightarrow a = \frac{1}{e}$$

- 050 Considera la funció definida per:

$$f(x) = \begin{cases} 5 + \sin x & \text{si } x \leq 0 \\ -x^2 + ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Determina els valors que han de tenir a i b perquè sigui derivable en $x = 0$.

Perquè la funció sigui derivable en $x = 0$ ha de ser contínua en aquest punt, per la qual cosa els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(0) = 5$:

$$\left. \begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (5 + \sin x) = 5 \\ f(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + ax + b) = b \end{aligned} \right\} \rightarrow f(0^-) = f(0^+) = f(0) \rightarrow b = 5$$

Perquè la funció sigui derivable en $x = 0$, les derivades laterals han d'existir i han de ser iguals:

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ -2x + a & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \left. \begin{aligned} f'(0^-) &= 1 \\ f'(0^+) &= a \end{aligned} \right\} \rightarrow a = 1$$

Derivada d'una funció

051 Demuestra que la funció següent és derivable per a tots els valors de x .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La funció és derivable per a tots els valors de x només si és contínua en aquests valors.

Estudiem la continuïtat en $x = 0$:

$$\sin \frac{1}{x} \text{ funció acotada} \rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0 \rightarrow f(x) \text{ és contínua.}$$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0$$

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0 \rightarrow f(x) \text{ és derivable.}$$

052 Calcula raonadament els valors de m i n perquè la funció sigui derivable en $x = 4$.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \leq x < 4 \\ x^2 + mx + n & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Perquè la funció sigui derivable en $x = 4$ ha de ser contínua en aquest punt, per la qual cosa els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(4) = 16 + 4m + n$:

$$\left. \begin{aligned} f(4^-) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{25 - x^2} = 3 \\ f(4^+) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} (x^2 + mx + n) = 16 + m + n \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} f(4^-) &= f(4^+) = f(4) \\ &\rightarrow 16 + m + n = 3 \end{aligned}$$

Perquè la funció sigui derivable en $x = 4$, les derivades laterals han d'existir i han de ser iguals:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} & \text{si } -5 < x < 4 \\ 2x + m & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(4^-) &= -\frac{4}{3} \\ f'(4^+) &= 8 + m \end{aligned} \right\} \rightarrow 8 + m = -\frac{4}{3} \rightarrow m = -\frac{28}{3}$$

$$\text{Així doncs: } 16 - \frac{28}{3} + n = 3 \rightarrow \frac{20}{3} + n = 3 \rightarrow n = -\frac{11}{3}$$

053 Sigui f la funció definida per:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Determina els valors que han de tenir a i b perquè f sigui derivable.

(Activitat de Selectivitat)

Una funció només pot ser derivable si és contínua.

- Si $x < 1$: $f(x) = ax^2 + 1 \rightarrow$ Funció polinòmica; per tant, contínua en $(-\infty, 1)$.
- Si $x > 1$: $f(x) = x^2 + bx + 3 \rightarrow$ Funció polinòmica; per tant, contínua en $(1, +\infty)$.
- Perquè la funció sigui contínua en $x = 1$, els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(1) = 4 + b$:

$$\left. \begin{aligned} f(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + 1) = a + 1 \\ f(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + bx + 3) = 4 + b \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} f(1^-) &= f(1^+) = f(1) \\ \rightarrow a + 1 &= 4 + b \rightarrow a - b = 3 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si } x < 1 \\ 2x + b & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La funció és derivable en $x = 1$ si les derivades existeixen i són iguals:

$$\left. \begin{aligned} f'(1^-) &= 2a \\ f'(1^+) &= 2 + b \end{aligned} \right\} \rightarrow 2a = 2 + b \rightarrow 2a - b = 2$$

$$\left. \begin{aligned} a - b &= 3 \\ 2a - b &= 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \end{cases}$$

054 A partir de la definició, troba la funció derivada de les funcions següents:

- | | |
|------------------|-------------------|
| a) $f(x) = 123$ | c) $f(x) = x^3$ |
| b) $f(x) = 3x^2$ | d) $f(x) = ax$ |
| a) $f'(x) = 0$ | c) $f'(x) = 3x^2$ |
| b) $f'(x) = 6x$ | d) $f'(x) = a$ |

055 A partir de la definició, calcula la funció derivada d'aquestes funcions.

- | | |
|-------------------------|--------------------|
| a) $f(x) = \frac{1}{x}$ | c) $f(x) = \sin x$ |
| b) $f(x) = \sqrt{x}$ | d) $f(x) = \cos x$ |

$$\text{a) } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x - x - h}{xh(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{c) } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} = \cos x$$

$$\text{d) } f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} = -\sin x$$

Derivada d'una funció

- 056 Troba la funció derivada de la funció $f(x) = \ln \left(\frac{x}{x+1} \right)$ i simplifica'n el resultat.

(Activitat de Selectivitat)

$$f(x) = \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) = \ln x - \ln (x+1)$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+1-x}{x(x+1)} = \frac{1}{x^2+x}$$

- 057 Calcula les tres primeres derivades de les funcions següents:

- a) $f(x) = 2x$ d) $i(x) = \cos x$
b) $g(x) = x^2$ e) $j(x) = \sin x$
c) $h(x) = x^3$ f) $k(x) = \operatorname{tg} x$

a) $f'(x) = 2$
 $f''(x) = 0$
 $f'''(x) = 0$

b) $g'(x) = 2x$
 $g''(x) = 2$
 $g'''(x) = 0$

c) $h'(x) = 3x^2$
 $h''(x) = 6x$
 $h'''(x) = 6$

d) $i'(x) = -\sin x$
 $i''(x) = -\cos x$
 $i'''(x) = \sin x$

e) $j'(x) = \cos x$
 $j''(x) = -\sin x$
 $j'''(x) = -\cos x$

f) $k'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
 $k''(x) = 2 \operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x)$
 $k'''(x) = 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 + 2 \operatorname{tg} x \cdot 2 \operatorname{tg} x \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) = (2 + 4 \operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x)$

- 058 Troba els punts en els quals la funció $h(x) = \ln x$ és derivable i calcula'n les derivades primera i segona.

La funció és contínua en el seu domini, és a dir, en $(0, +\infty)$.

$$h'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow h(x) \text{ és derivable en } (0, +\infty).$$

$$h''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

059 Troba els punts en els quals les funcions següents són derivables i calcula les dues primeres derivades de cadascuna d'elles.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{c) } v(x) = \begin{cases} 3x + 4 & \text{si } x \leq -1 \\ -2x - 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } g(x) = x + |x - 2|$$

a) $f(x)$ està definida per funcions polinòmiques; així doncs, són contínues i derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left. \begin{aligned} f(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \\ f(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x = 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow f(1^-) \neq f(1^+) \rightarrow f(x) \text{ no és contínua en } x = 1; \\ \text{per tant, no és derivable en } x = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Així, $f(x)$ és contínua i derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x \geq 2 \\ 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$g(x)$ està definida per funcions polinòmiques; així doncs, són contínues i derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left. \begin{aligned} g(2^-) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} 2 = 2 \\ g(2^+) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 2) = 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow g(2^-) = g(2^+) = g(2) \rightarrow g(x) \text{ és contínua en } x = 2.$$

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 2 \\ 0 & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} g'(2^-) &= 0 \\ g'(2^+) &= 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Les derivades laterals existeixen, però són diferents;} \\ \text{així doncs, } g(x) \text{ no és derivable en } x = 2.$$

Per tant, $g(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$ i derivable en $\mathbb{R} - \{2\}$.

$$g''(x) = 0 \quad \text{si } x \neq 2$$

c) $v(x)$ està definida per funcions polinòmiques; així doncs, són contínues i derivables en $\mathbb{R}$.

$$\left. \begin{aligned} v(-1^-) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x + 4) = 1 \\ v(-1^+) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (-2x - 1) = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow v(2^-) = v(2^+) = v(2) \\ \rightarrow v(x) \text{ és contínua en } x = -1.$$

$$v'(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -1 \\ -2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} v'(-1^-) &= 3 \\ v'(-1^+) &= -2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Les derivades laterals existeixen, però són diferents;} \\ \text{així doncs, } v(x) \text{ no és derivable en } x = -1.$$

Per tant, $v(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$ i derivable en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$$v''(x) = 0 \quad \text{si } x \neq -1$$

Derivada d'una funció

060 Determina la derivada n -èsima de cada una de les funcions següents:

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $g(x) = \cos 2x$

c) $h(x) = e^{-x}$

$$a) f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$$

$$\text{Si } n \geq 4, \text{ la derivada } n\text{-èsima és: } f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2n-3)(2n-5) \cdots 1}{2^n} \cdot x^{-\frac{2n-1}{2}}$$

b) $g'(x) = -2\sin 2x$

$$g''(x) = -4\cos 2x$$

$$g'''(x) = 8\sin 2x$$

$$g^{(4)}(x) = 16\cos 2x$$

$$g^{(5)}(x) = -32\sin 2x$$

Així, podem calcular la derivada n -èsima segons les expressions:

$$g^{(n)} = \begin{cases} g^{(2k-1)}(x) = (-1)^k 2^{2k-1} \sin 2x \\ g^{(2k)}(x) = (-1)^k 2^{2k} \cos 2x \end{cases} \text{ per a } k = 1, 2, 3, \dots$$

c) $h'(x) = -e^{-x}$

$$h''(x) = e^{-x}$$

$$\text{La derivada } n\text{-èsima és: } h^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}$$

061 Troba la derivada n -èsima d'aquestes funcions:

a) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

b) $g(x) = \sin^2 x$

c) $h(x) = \ln x$

$$a) f'(x) = \frac{(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{4}{(1-x)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{12}{(1-x)^4}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{48}{(1-x)^5}$$

$$\text{La derivada } n\text{-èsima és: } f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}$$

$$\text{b) } g'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

$$g''(x) = 2 \cos 2x$$

$$g'''(x) = -4 \sin 2x$$

$$g^{(4)}(x) = -8 \cos 2x$$

$$g^{(5)}(x) = 16 \sin 2x$$

Així, podem calcular la derivada n -èsima segons les expressions:

$$g^{(n)} = \begin{cases} g^{(2k-1)}(x) = (-1)^{k+1} 2^{2k-2} \sin 2x \\ g^{(2k)}(x) = (-1)^{k+1} 2^{2k-1} \cos 2x \end{cases} \text{ per a } k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{c) } h'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$h''(x) = -x^{-2}$$

$$h'''(x) = 2x^{-3}$$

$$h^{(4)}(x) = -6x^{-4}$$

La derivada n -èsima és: $h^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! x^{-n}$

062 Hi pot haver dues funcions diferents que tinguin la mateixa funció derivada? Raona la resposta i, si és afirmativa, escriu-ne un exemple.

Sí, hi pot haver dues funcions diferents amb la mateixa funció derivada.
Per exemple:

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= x^2 + 3 \\ g(x) &= x^2 - 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow f'(x) = g'(x) = 2x$$

063 A partir de la propietat de la derivada d'una suma i la del producte d'una constant per una funció, troba la derivada d'aquestes funcions:

$$\text{a) } y = x^2 + x + 3$$

$$\text{d) } y = 5 \sin x - 10 \cos x$$

$$\text{b) } y = -12 + 8x^3 + \frac{1}{x}$$

$$\text{e) } y = 4x^6 - 5x^3 + 3$$

$$\text{c) } y = 3 + 5x^2 + 8\sqrt{x}$$

$$\text{f) } y = \cos^2 x + \cos x^2$$

$$\text{a) } y' = 2x + 1$$

$$\text{d) } y' = 5 \cos x + 10 \sin x$$

$$\text{b) } y' = 24x^2 - \frac{1}{x^2}$$

$$\text{e) } y' = 24x^5 - 15x^2$$

$$\text{c) } y' = 10x + \frac{4}{\sqrt{x}}$$

$$\text{f) } y' = -2 \cos x \sin x - 2x \sin x^2$$

064 A partir de la propietat de la derivada d'un producte de funcions, troba la derivada de les funcions següents:

$$\text{a) } y = 12x^4$$

$$\text{c) } y = 5x^2 \sin x$$

$$\text{b) } y = 3x^3 \ln x$$

$$\text{d) } y = \sqrt{x} (x^3 + 2x)$$

$$\text{a) } y' = 48x^3$$

$$\text{c) } y' = 10x \sin x + 5x^2 \cos x$$

$$\text{b) } y' = 9x^2 \ln x + 3x^2$$

$$\text{d) } y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} (x^3 + 2x) + \sqrt{x} (3x^2 + 2) = \frac{7x^3 + 6x}{2\sqrt{x}}$$

Derivada d'una funció

065 Utilitzant la propietat de la derivada d'un quocient de funcions, calcula la derivada de les funcions següents:

$$\text{a) } y = \frac{1}{x^3} \quad \text{b) } y = \frac{5x^2 - 1}{x + 2} \quad \text{c) } y = \frac{2}{x - 2} \quad \text{d) } y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

$$\text{a) } y' = \frac{-3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$$

$$\text{b) } y' = \frac{10x(x + 2) - (5x^2 - 1)}{(x + 2)^2} = \frac{5x^2 + 20x + 1}{(x + 2)^2}$$

$$\text{c) } y' = \frac{-2}{(x - 2)^2}$$

$$\text{d) } y' = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)x - \operatorname{tg} x}{x^2}$$

066 Deriva les funcions:

$$\text{a) } f(x) = \frac{2x - 2}{x + 1} \quad \text{b) } g(x) = (2x - 1)^2 \cdot \ln x$$

(Activitat de Selectivitat)

$$\text{a) } f'(x) = \frac{2(x + 1) - (2x - 2)}{(x + 1)^2} = \frac{4}{(x + 1)^2}$$

$$\text{b) } g'(x) = 4(2x - 1) \cdot \ln x + (2x - 1)^2 \cdot \frac{1}{x}$$

067 Quina és la derivada d'aquestes funcions?

$$\text{a) } y = \frac{1 + x^2}{x - 1} \quad \text{c) } y = \frac{7}{x^{400}} \quad \text{e) } y = \frac{2 - x}{x^3}$$

$$\text{b) } y = \frac{12}{x^3} \quad \text{d) } y = \frac{4x^2 + 1}{x} \quad \text{f) } y = \frac{x + 1}{x^2}$$

$$\text{a) } y' = \frac{2x(x - 1) - (1 + x^2)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$$

$$\text{b) } y' = -\frac{36}{x^4}$$

$$\text{c) } y' = -\frac{2.800}{x^{401}}$$

$$\text{d) } y' = \frac{8x^2 - (4x^2 + 1)}{x^2} = \frac{4x^2 - 1}{x^2}$$

$$\text{e) } y' = \frac{-x^3 - (2 - x)3x^2}{x^6} = \frac{2x^3 - 6x^2}{x^6} = \frac{2x - 6}{x^4}$$

$$\text{f) } y' = \frac{x^2 - (x + 1)2x}{x^4} = \frac{-x^2 - 2x}{x^4} = -\frac{x + 2}{x^3}$$

068 Calcula la derivada de la funció:

$$f(x) = \left(\frac{x+2}{x} \right)^2$$

(Activitat de Selectivitat)

$$f'(x) = 2 \left(\frac{x+2}{x} \right) \cdot \frac{x - (x+2)}{x^2} = -\frac{4(x+2)}{x^3}$$

069 Calcula la derivada de les funcions trigonomètriques següents.

- a) $y = 4\arctg x$ d) $y = (1+x^2)\arctg x$
 b) $y = (3x+1)\arccos x$ e) $y = (x^2+8x+1)\sin x$
 c) $y = 2\cos x + \tg x$ f) $y = 5(\sin x)(\cos x)$

a) $y' = \frac{4}{1+x^2}$

b) $y' = 3\arccos x - \frac{3x+1}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $y' = -2\sin x + 1 + \tg^2 x$

d) $y' = 2x\arctg x + 1$

e) $y' = (2x+8)\sin x + (x^2+8x+1)\cos x$

f) $y' = 5\cos^2 x - 5\sin^2 x$

070 Troba la derivada d'aquestes funcions logarítmiques.

- a) $y = \ln(9x^5 + 7x + 2)$ d) $y = \ln \sqrt{x^3 + 2x}$
 b) $y = \frac{\ln x}{x^2}$ e) $y = \frac{\ln x}{x}$
 c) $y = \log_2(3x^2 - 7)$ f) $y = \ln(4x + 7)$

a) $y' = \frac{45x^4 + 7}{9x^5 + 7x + 2}$

b) $y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$

c) $y' = \frac{6x}{(3x^2 - 7)\ln 2}$

d) $y' = \frac{\frac{1}{2}(x^3 + 2x)^{-\frac{1}{2}}(3x^2 + 2)}{\sqrt{x^3 + 2x}} = \frac{3x^2 + 2}{2(x^3 + 2x)}$

e) $y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

f) $y' = \frac{4}{4x + 7}$

Derivada d'una funció

- 071 Calcula la derivada de la funció: $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ (ln representa la funció logaritme neperià).

(Activitat de Selectivitat)

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

- 072 Calcula la derivada de les funcions següents:

a) $g(x) = \frac{3}{(2x-5)^2} + \ln(1-x)$ b) $h(x) = \frac{e^x}{x^3 + 1}$

(Activitat de Selectivitat)

a) $g'(x) = -\frac{12}{(2x-5)^3} - \frac{1}{1-x}$

b) $h'(x) = \frac{e^x(x^3 + 1) - e^x \cdot 3x^2}{(x^3 + 1)^2} = \frac{e^x(x^3 - 3x^2 + 1)}{(x^3 + 1)^2}$

- 073 Calcula la derivada d'aquestes funcions:

a) $y = 4^x$

f) $y = \sqrt[3]{5x^2}$

b) $y = \frac{8}{x^2 - 4}$

g) $y = \frac{x-2}{x-3}$

c) $y = \frac{2x-1}{x-x^2}$

h) $y = \frac{x^2(1-x)}{x^2 - 1}$

d) $y = 7\sqrt{x} + 8\sqrt[3]{x}$

i) $y = x^2 \sin x - 5x$

e) $y = xe^x$

j) $y = 2^x + \log_2 x$

a) $y' = 4^x \ln 4$

b) $y' = -\frac{16x}{(x^2 - 4)^2}$

c) $y' = \frac{2(x-x^2) - (2x-1)(1-2x)}{(x-x^2)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{(x-x^2)^2}$

d) $y' = 7 \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + 8 \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{7}{2\sqrt{x}} + \frac{8}{3\sqrt[3]{x^2}}$

e) $y' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

f) $y' = \frac{1}{3}(5x^2)^{\frac{2}{3}} 10x = \frac{10x}{3\sqrt[3]{(5x^2)^2}} = \frac{10}{3\sqrt[3]{25x}}$

g) $y' = \frac{(x-3) - (x-2)}{(x-3)^2} = -\frac{1}{(x-3)^2}$

h) $y' = \frac{(2x(1-x) - x^2)(x^2 - 1) - x^2(1-x)2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^4 + 3x^2 - 2x}{(x^2 - 1)^2}$

i) $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x - 5$

j) $y' = 2^x \ln 2 + \frac{1}{x \ln 2}$

074 Calcula'n les derivades i simplifica'n el resultat.

$$\text{a) } y = \frac{x^2 + 1}{e^x} \qquad \text{c) } y = \frac{(x + 2)^2}{x + 1}$$

$$\text{b) } y = \frac{x}{\ln x} \qquad \text{d) } y = \frac{x^2 - 1}{e^{x^2}}$$

$$\text{a) } y' = \frac{2xe^x - (x^2 + 1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 1}{e^x}$$

$$\text{b) } y' = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

$$\text{c) } y' = \frac{2(x + 2)(x + 1) - (x + 2)^2}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 8}{(x + 1)^2}$$

$$\text{d) } y' = \frac{2xe^{x^2} - (x^2 - 1)e^{x^2} \cdot 2x}{(e^{x^2})^2} = \frac{-2x^3 + 4x}{e^{x^2}}$$

075 Calcula la derivada de les funcions següents:

$$\text{a) } y = 3^{x^2+4} \qquad \text{f) } y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$$

$$\text{b) } y = (x^5 - 2)^3 \qquad \text{g) } y = \sqrt{2x^2 + 1}$$

$$\text{c) } y = \sqrt[3]{x^3 - 2x} \qquad \text{h) } y = e^{x^2-7}$$

$$\text{d) } y = 5e^{-x^2} \qquad \text{i) } y = \sin^2 x$$

$$\text{e) } y = \frac{\sqrt{x+1}}{x^3} \qquad \text{j) } y = 2^{\sin x}$$

$$\text{a) } y' = 3^{x^2+4} \ln 3 \cdot 2x$$

$$\text{b) } y' = 15x^4(x^5 - 2)^2$$

$$\text{c) } y' = \frac{1}{3}(x^3 - 2x)^{-\frac{2}{3}}(3x^2 - 2) = \frac{3x^2 - 2}{3\sqrt[3]{(x^3 - 2x)^2}}$$

$$\text{d) } y' = -10xe^{-x^2}$$

$$\text{e) } y' = \frac{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}x^3 - \sqrt{x+1} \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{-5x - 6}{2x^4\sqrt{x+1}}$$

$$\text{f) } y' = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{1+x} = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$$

$$\text{g) } y' = \frac{1}{2}(2x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}4x = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$$

$$\text{h) } y' = 2xe^{x^2-7}$$

$$\text{i) } y' = 2 \sin x \cos x$$

$$\text{j) } y' = 2^{\sin x} \ln 2 \cdot \cos x$$

Derivada d'una funció

076 Troba la derivada d'aquestes funcions.

a) $y = \arcsin \frac{1}{x}$

d) $y = 12\sqrt{3x^2 + x}$

g) $y = (4x^2 - 5x + 1) \cdot 3^x$

b) $y = \cos(x^2 + 5x + 1)$

e) $y = \arcsin(5x + 1)$

h) $y = \sqrt[7]{x^4 + 3x^3}$

c) $y = \frac{\cotg x}{x^2}$

f) $y = \ln(\sin x^2)$

$$a) \quad y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} = -\frac{x}{x^2\sqrt{x^2 - 1}} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$b) \quad y' = -\sin(x^2 + 5x + 1)(2x + 5)$$

$$c) \quad y = \frac{1}{\tg x \cdot x^2}$$

$$y' = \frac{(1 + \tg^2 x)x^2 + \tg x \cdot 2x}{(\tg x \cdot x^2)^2} = \frac{x + x \tg^2 x + 2 \tg x}{x^3 \tg^2 x}$$

$$d) \quad y' = 12 \cdot \frac{1}{2} (3x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} (6x + 1) = \frac{36x + 6}{\sqrt{3x^2 + x}}$$

$$e) \quad y' = \frac{5}{\sqrt{1 - (5x + 1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{-25x^2 - 10x}}$$

$$f) \quad y' = \frac{\cos x^2 \cdot 2x}{\sin x^2} = 2x \cotg x^2$$

$$g) \quad y' = (8x - 5)3^x + (4x^2 - 5x + 1)3^x \ln 3$$

$$h) \quad y' = \frac{1}{7} (x^4 + 3x^3)^{-\frac{6}{7}} (4x^3 + 9x^2) = \frac{4x^3 + 9x^2}{7\sqrt[7]{(x^4 + 3x^3)^6}}$$

077 Calcula la derivada d'aquestes funcions.

a) $y = \tg^2(2x + 3)$

c) $y = \sqrt{\ln(3x - 5)}$

e) $y = 2x \arcsin x$

b) $y = \arctg(x^3 + 6)$

d) $y = \sqrt[4]{5x^3 + 1}$

f) $y = \sqrt[3]{(5x - 2)^2}$

$$a) \quad y' = 4 \tg(2x + 3)(1 + \tg^2(2x + 3))$$

$$b) \quad y' = \frac{3x^2}{1 + (x^3 + 6)^2}$$

$$c) \quad y' = \frac{1}{2} (\ln(3x - 5))^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{3}{3x - 5} = \frac{3}{2(3x - 5)\sqrt{\ln(3x - 5)}}$$

$$d) \quad y' = \frac{1}{4} (5x^3 + 1)^{-\frac{3}{4}} 15x^2 = \frac{15x^2}{4\sqrt[4]{(5x^3 + 1)^3}}$$

$$e) \quad y' = 2 \arcsin x + 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f) \quad y' = \frac{2}{3} (5x - 2)^{-\frac{1}{3}} 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x - 2}}$$

078 Determina la derivada de les funcions següents:

a) $y = \frac{x \sin x}{e^x}$

b) $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

c) $y = \ln(1 - 2^x)$

d) $y = \sqrt{e^x + x}$

e) $y = \frac{5^x + 5^{-x}}{2}$

f) $y = x^2 e^{-x}$

a) $y' = \frac{(\sin x + x \cos x)e^x - x \sin x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{\sin x + x \cos x - x \sin x}{e^x}$

b) $y' = \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{x^2}{x^2(x^2 + 1)} = -\frac{1}{x^2 + 1}$

c) $y' = \frac{-2^x \ln 2}{1 - 2^x}$

d) $y' = \frac{1}{2}(e^x + x)^{-\frac{1}{2}}(e^x + 1) = \frac{e^x + 1}{2\sqrt{e^x + x}}$

e) $y' = \frac{5^x \ln 5 - 5^{-x} \ln 5}{2}$

f) $y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = (2x - x^2)e^{-x}$

079 Troba la derivada d'aquestes funcions:

a) $y = \frac{\cos x}{x^2}$

c) $y = e^{1-x^2}$

b) $y = \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$

d) $y = \sqrt{\sec x}$

a) $y' = \frac{-\sin x \cdot x^2 - \cos x \cdot 2x}{x^4} = -\frac{x \sin x + 2 \cos x}{x^3}$

b) $y' = \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - \sin \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

c) $y' = e^{1-x^2}(-2x)$

d) $y = \sqrt{\frac{1}{\cos x}}$

$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos x}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x \sqrt{\cos x}}{2 \cos^2 x}$

Derivada d'una funció

080 Calcula la derivada de les funcions:

$$a) y = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$d) y = \sqrt[3]{2^{\cos x}}$$

$$b) y = \operatorname{arctg} \frac{x}{x-1}$$

$$e) y = \log_2 \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$c) y = \arccos(\ln x)$$

$$f) y = \cos^3 x + \sin x^2$$

$$a) y' = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}} = -\frac{1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{x+1} = -\frac{1}{x^2-1}$$

$$b) y' = -\frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{1 + \left(\frac{x}{x-1} \right)^2} = \frac{1}{(x-1)^2 + x^2} = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$$

$$c) y' = -\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} = -\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

$$d) y' = \frac{1}{3} (2^{\cos x})^{-\frac{2}{3}} 2^{\cos x} \ln 2 (-\sin x) = -\frac{\ln 2 \sin x \sqrt[3]{2^{\cos x}}}{3}$$

$$e) y' = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{\sqrt{\frac{1}{x} \ln 2}} = -\frac{1}{2x \ln 2}$$

$$f) y' = -3\cos^2 x \sin x + 2\sin x \cos x$$

081 Troba les derivades de les funcions següents i simplifica'n el resultat.

$$a) y = \arcsin \sqrt{x}$$

$$d) y = \frac{\ln \sqrt{x+1}}{x}$$

$$b) y = \sqrt[4]{\sin(x^3+1)}$$

$$e) y = \ln \left(\frac{x}{x+1} \right)^x$$

$$c) y = 2^{x^2+4} + x^2 + 4$$

$$a) y' = \frac{\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$$b) y' = \frac{1}{4} (\sin(x^3+1))^{-\frac{3}{4}} \cos(x^3+1) 3x^2 = \frac{3x^2 \cos(x^3+1)}{4\sqrt[4]{\sin^3(x^3+1)}}$$

$$c) y' = 2^{x^2+4} \ln 2 \cdot 2x + 2x$$

$$\begin{aligned} \text{d) } y' &= \frac{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x+1}} \cdot x - \ln \sqrt{x+1} = \frac{\frac{x}{2(x+1)} - \ln \sqrt{x+1}}{x^2} = \\ &= \frac{x - 2(x+1) \ln \sqrt{x+1}}{2(x+1)x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } y &= x \ln \frac{x}{x+1} \\ y' &= \ln \frac{x}{x+1} + x \cdot \frac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) + \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

082 Per a $g(x) = e^{1-x} + \ln(x+2)$, calcula $g'(1)$.

(Activitat de Selectivitat)

$$g'(x) = -e^{1-x} + \frac{1}{x+2} \qquad g'(1) = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

083 Calcula les derivades de les funcions següents:

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{4+2^x} + \ln \frac{1}{1+x} \\ y_2 &= \sin^2(2x+1)^3 \end{aligned}$$

(Activitat de Selectivitat)

$$y'_1 = \frac{1}{2}(4+2^x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2^x \cdot \ln 2 + \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{\frac{1}{1+x}} = \frac{2^x \cdot \ln 2}{2\sqrt{4+2^x}} - \frac{1}{1+x}$$

$$\begin{aligned} y'_2 &= 2 \sin(2x+1)^3 \cdot \cos(2x+1)^3 \cdot 3(2x+1)^2 \cdot 2 = \\ &= 12(2x+1)^2 \cdot \sin(2x+1)^3 \cdot \cos(2x+1)^3 \end{aligned}$$

PREPARA LA SELECTIVITAT

(Activitats de Selectivitat)

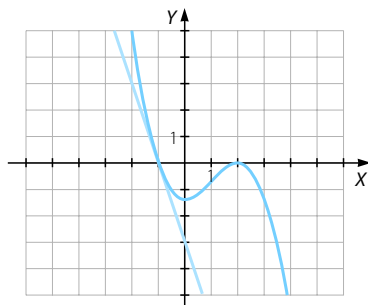
1 Calcula $g''(2)$ si $g(x) = \frac{1}{x} - x$.

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 \rightarrow g''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$g''(2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Derivada d'una funció

- 2 El domini de la corba $y = f(x)$ de la figura és el conjunt de tots els nombres reals.
- a) Determina els punts on la funció val 0. Determina els valors de x per als quals la funció és positiva.
- b) Digues en quins punts s'anul·la la derivada i en quins punts $f'(x) < 0$.



- a) A partir de la corba comprovem que:
 $f(x) = 0 \rightarrow x = -1, x = 2$
 Per tant, la funció s'anul·la en els punts $(-1, 0)$ i $(2, 0)$.
 La funció és positiva si $x < -1$, és a dir, si $x \in (-\infty, -1)$.
- b) La derivada s'anul·la en els punts que tinguin recta tangent horitzontal, és a dir, en $x = 0$ i en $x = 2$.
 La derivada primera és negativa en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, intervals en els quals la funció és decreixent.

- 3 Els beneficis (en milers d'euros) per la venda d'un producte en funció de la inversió realitzada en promoció (en milers d'euros) vénen donats per:

$$B(x) = \begin{cases} 5x + 15 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ -(x - 3)^2 + 30 & \text{si } 3 < x \leq 8 \end{cases}$$

És contínua aquesta funció? És derivable?

- Si $0 < x < 3$: $f(x) = 5x + 15 \rightarrow$ Funció polinòmica; per tant, contínua en $(0, 3)$.
- Si $3 < x < 8$: $f(x) = -(x - 3)^2 + 30 \rightarrow$ Funció polinòmica; per tant, contínua en $(3, 8)$.
- Perquè la funció sigui contínua en $x = 3$, els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(3) = 30$:

$$\left. \begin{aligned} f(3^-) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (5x + 15) = 30 \\ f(3^+) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (-(x - 3)^2 + 30) = 30 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} f(3^-) &= f(3^+) = f(3) \\ &\rightarrow f(x) \text{ és contínua en } x = 3. \end{aligned}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -2(x - 3) & \text{si } 3 < x < 8 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(3^-) &= 5 \\ f'(3^+) &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Les derivades laterals no són iguals} \rightarrow f(x) \text{ no és derivable en } x = 3.$$

La funció és derivable en $(0, 3) \cup (3, 8)$.

- 4 Sigui la funció: $f(x) = \begin{cases} \frac{x - k}{x + 1} & \text{si } x > 0 \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Calcula el valor de k perquè la funció f sigui contínua en $x = 0$. Per a aquest valor de k , és derivable en $x = 0$?

- Perquè la funció sigui contínua en $x = 0$, els límits laterals han de ser iguals i han de coincidir amb $f(0) = 1$:

$$\left. \begin{aligned} f(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-k}{x+1} = -k \\ f(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2x + 1) = 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow f(0^+) = f(0^-) = f(0) \rightarrow -k = 1 \rightarrow k = -1$$

- Perquè la funció sigui derivable en $x = 0$, les derivades laterals han d'existir i han de ser iguals:

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 2x + 2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f'(0^+) &= 0 \\ f'(0^-) &= 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow f(x) \text{ no és derivable en } x = 0.$$

5 Deriva les funcions: $f(x) = \frac{x^3}{3} - 8$ $g(x) = \sqrt{x^3}$ $h(x) = x^2 - e^x$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2 \quad g'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \quad h'(x) = 2x - e^x$$

- 6 Calcula les derivades següents i simplifica'n els resultats tant com sigui possible.

a) $y = \frac{3}{2} \ln \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$ b) $y = (5x-1)e^{3x} + \sin^2 5x$ c) $y = \sqrt{(1-x^2)^3}$

$$\begin{aligned} \text{a) } y' &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{x-1}{x+1}} = \\ &= \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x^2-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y' &= 5e^{3x} + (5x-1)e^{3x} \cdot 3 + 2 \sin 5x \cdot \cos 5x \cdot 5 = \\ &= (15x+2)e^{3x} + 10 \sin 5x \cdot \cos 5x \end{aligned}$$

$$\text{c) } y' = \frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -3x\sqrt{1-x^2}$$

- 7 Troba els valors a , b i c de la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ de manera que una arrel de la funció és el valor $x = +1$, $f'(2) = 40$ i la segona derivada s'anul·la en $x = -1$.

Calculem les derivades primera i segona de la funció:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

Les dades del problema donen lloc a les equacions següents:

$$\left. \begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ 12a + 4b + c &= 40 \\ -6a + 2b &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Resolem el sistema pel mètode de Gauss i la solució és:

$$a = \frac{40}{29} \quad b = \frac{240}{29} \quad c = -\frac{280}{29}$$

LITERATURA I MATEMÀTIQUES

La vida, manual d'ús

Bartlebooth va proposar-li [al seu criat Smautf] que es jubilés ja fa molt de temps, però sempre s'ha negat a fer-ho. La veritat és que té poca feina. Al matí prepara la roba de Bartlebooth i l'ajuda a vestir-se. L'afaitava fins fa cinc anys –amb un matxet que havia estat propietat d'un avi de Bartlebooth–, però hi veu molt malament i el pols ha començat a tremolar-li, motiu pel qual ha estat substituït per un oficial del senyor Pois, el perruquer del carrer Prony, que puja al pis cada matí. Bartlebooth ja no es mou de casa; gairebé no surt del despatx en tot el dia. Smautf s'està a l'habitació contigua, amb la resta de criats, que no tenen gaire més feina que ell i passen l'estona jugant a cartes i parlant del passat. [Ell, però, ha trobat una ocupació que l'absorbeix completament.]

Smautf, molt al principi dels seus viatges, havia vist en un gran music-hall de Londres un calculador prodigi i durant els vint anys de la seva volta al món, llegint i rellegint un vell tractat esparracat de passatemps matemàtics i aritmètics que havia descobert en una llibreria de vell d'Inverness, es va aficionar al càlcul mental i, quan va tornar, era capaç d'extreure arrels quadrades o cúbiques de nombres de nou xifres amb una rapidesa relativa. Quan això ja li començava a ser massa fàcil va entrar-li un frenesi pels factorials:

$1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$; $6! = 720$; $7! = 5.040$;
 $8! = 40.320$; $9! = 362.880$; $10! = 3.628.800$; $11! = 39.916.800$;
 $12! = 479.001.600$; [...]; $22! = 1.124.000.727.777.607.680.000$,

o sigui més de mil milions de vegades set-cents vint-i-set mil milions.

Smautf va actualment pel 76, però ja no troba paper de format prou gran; i, encara que el trobés, no hi hauria una taula prou llarga per estendre'l. Cada vegada té menys seguretat en ell mateix, i per això sempre està repetint els càlculs. Morellet va intentar desanimar-lo anys enrere dient-li que el nombre que s'escriu, o sigui, nou elevat a nou elevat a nou, que és el nombre més gran que es pot escriure utilitzant només tres xifres, tindria, si l'escrivíssim sencer, tres-cents setanta-nou milions de xifres; a raó d'una xifra per segon, es trigarien onze anys a escriure'l; i calculant dues xifres per centímetre, tindria mil vuit-cents quilòmetres de llargada. Malgrat això Smautf continuà alineant columnes i més columnes de xifres en dorsos de sobres, marges de quaderns i papers d'embolicar carn.

GEORGES PEREC

La vida, manual d'ús

Georges Perec

Al llarg d'aquesta «complicada» novel·la apareixen un munt de personatges excèntrics, dos dels quals, aquells que tenen alguna rellevància matemàtica, són els que surten en aquest paràgraf: Bartlebooth i Smautf.

Bartlebooth va dedicar deu anys a iniciar-se en l'art de l'aquarel·la. Després va recórrer el món durant vint anys pintant una aquarel·la cada quinze dies en cinc-cents ports diferents. Quan n'acabava una, l'enviava a un artesà de París perquè l'enganxés en una placa de fusta i després la retallés, de manera que va formar un trencaclosques de set-cents cinquanta peces. Quan va acabar el seu periple, va tornar a França i es va estar vint anys més per reconstruir els cinc-cents trencaclosques a raó d'un cada quinze dies. A mesura que els anava completant, el mateix artesà, amb una tècnica especial, desenganxava del suport l'aquarel·la reconstruïda i l'enviava al mateix lloc on l'havia pintada. Allí la submergien en una solució deterdora de la qual sortia una altra vegada el full blanc i verge. D'aquesta manera, no va quedar cap vestigi d'aquella activitat que durant cinquanta anys va omplir del tot la vida de Bartlebooth.

En totes les etapes, a Bartlebooth el va acompanyar el seu criat Smautf, el qual encara, malgrat els seus vuitanta anys, en té cura a casa seva de París i ocupa el temps amb els entrenaments matemàtics que hem vist en el text escollit.

Els factorials dels nombres naturals formen una successió creixent, és a dir, una funció $f(x) = x!$, definida per a $x \in \mathbb{N}$, és creixent. Estudia si la funció $f(x) = x(x-1)(x-2)$, definida per a qualsevol nombre real, també és creixent.

Perquè sigui creixent s'ha de verificar que, per a qualsevol valor de $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, amb $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Per a la funció $f(x) = x(x-1)(x-2)$ tenim que:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\rightarrow \left. \begin{array}{l} x_1 - 1 < x_2 - 1 \\ x_1 - 2 < x_2 - 2 \end{array} \right\} \rightarrow x_1(x_1 - 1)(x_1 - 2) < x_2(x_2 - 1)(x_2 - 2) \\ &\rightarrow f(x_1) < f(x_2) \rightarrow f(x) \text{ creixent} \end{aligned}$$

Aplicacions de la derivada

ABANS DE COMENÇAR... RECORDA

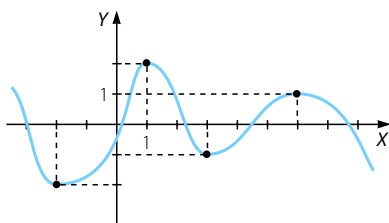
- 001 Determina el creixement i el decreixement d'aquesta funció.

Indica en quins punts assoleix màxims o mínims relatius i absoluts.

La funció és decreixent en $(-\infty, -2) \cup (1, 3) \cup (6, +\infty)$ i és creixent en $(-2, 1) \cup (3, 6)$.

Té un màxim relatiu en $(1, 2)$ i en $(6, 1)$. Té un mínim relatiu en $(-2, -2)$ i en $(3, -1)$.

Considerant la funció, no podem assegurar que presenti ni màxims ni mínims absoluts.



- 002 Una funció definida per a tots els nombres reals és decreixent en l'interval $(-2, 5)$ i creixent en la resta. Quins són els màxims i els mínims?

S'assoleix un màxim en $x = -2$ i un mínim en $x = 5$.

- 003 Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, calcula aquests límits:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x))$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x))$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{g(x)}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{g(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{si } L > 1 \\ \text{Indeterminació} & \text{si } L = 1 \\ 0 & \text{si } 0 < L < 1 \end{cases}$

ACTIVITATS

- 001 Troba el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = 6x^2 + 1$ en $x = 1$.

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6(1+h)^2 + 1 - 7}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{12h + 6h^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 6h) = 12 \end{aligned}$$

- 002 Quin és el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^3$ en $x = 1$?

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^3 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3 + 3h + h^2) = 3 \end{aligned}$$

- 003 Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^2 + 3$ en el punt $P(-1, 4)$.

Quina és l'equació de la recta normal?

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-1+h)^2 + 3 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h + h^2}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} (-2 + h) = -2$$

L'equació de la recta tangent és: $y - 4 = -2(x + 1) \rightarrow y = -2x + 2$

L'equació de la recta normal és: $y - 4 = \frac{1}{2}(x + 1) \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

- 004** Calcula les equacions de les rectes tangents a la funció $f(x) = 2x^3 + 3$ en els punts $x = 1$ i $x = -1$.

Comprova que són paral·leles a la recta $y = 6x$.

$$f(1) = 5$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(1+h)^3 + 3 - 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h + 6h^2 + 2h^3}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + 6h + 2h^2) = 6$$

L'equació de la recta tangent és: $y - 5 = 6(x - 1) \rightarrow y = 6x - 1$

$$f(-1) = 1$$

$$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-1+h)^3 + 3 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h - 6h^2 + 2h^3}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} (6 - 6h + 2h^2) = 6$$

L'equació de la recta tangent és: $y - 1 = 6(x + 1) \rightarrow y = 6x + 7$

Les rectes són paral·leles a la recta $y = 6x$, perquè el seu pendent és 6.

- 005** Determina on creixen i decreixen aquestes funcions:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$

b) $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

- a) Com que $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$, estudiem el creixement per a tots els nombres reals.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1 = 0 \rightarrow x = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, x = 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\bullet \text{ En } \left[-\infty, 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ creixent}$$

$$\bullet \text{ En } \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ decreixent}$$

- b) Com que $g(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$, estudiem el creixement per a tots els nombres reals.

$$g'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$\bullet \text{ En } (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x) \text{ decreixent}$$

$$\bullet \text{ En } (-1, 1) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x) \text{ creixent}$$

Aplicacions de la derivada

006 Troba els intervals de creixement i decreixement d'aquestes funcions i comprova-ho gràficament:

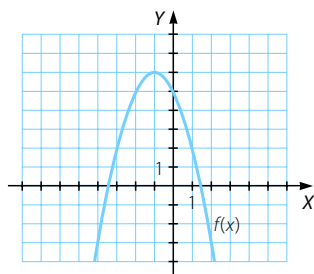
a) $f(x) = -x^2 - 2x + 5$

b) $g(x) = -x + 7x^2$

- a) Com que $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$ perquè és una funció polinòmica, estudiem el creixement per a tots els nombres reals.

$$f'(x) = -2x - 2 = 0 \rightarrow x = -1$$

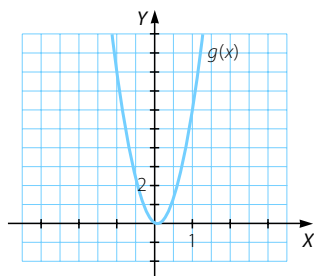
- En $(-\infty, -1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent
- En $(-1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent



- b) Com que $g(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$ perquè és una funció polinòmica, estudiem el creixement per a tots els nombres reals.

$$g'(x) = -1 + 14x = 0 \rightarrow x = \frac{1}{14}$$

- En $(-\infty, \frac{1}{14}) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreixent
- En $(\frac{1}{14}, +\infty) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creixent



007 Estudia els intervals de creixement i decreixement d'aquestes funcions, i calcula'n els màxims i els mínims:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

b) $g(x) = \frac{x}{x^3 + 1}$

- a) $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent
- En $(0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

En $x = 0$ presenta un mínim, que té com a coordenades $(0, -1)$.

b) $g(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{-1\}$.

$$g'(x) = \frac{-2x^3 + 1}{(x^3 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Així, doncs, estudiem el creixement en $(-\infty, -1)$, $\left[-1, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$ i $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$.

- En $(-\infty, -1) \cup \left[-1, \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creixent

- En $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, +\infty\right) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreixent

En $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ presenta un màxim, que té com a coordenades $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2}}, \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$.

008 Troba les coordenades dels màxims i els mínims de la funció següent:

$$f(x) = \frac{x^3 + 3}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-x^3 - 12}{x^5} = 0 \rightarrow x = -\sqrt[3]{12}$$

Com que $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{0\}$, l'extrem es troba en $(-\infty, 0)$.

- En $(-\infty, -\sqrt[3]{12}) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

- En $(-\sqrt[3]{12}, 0) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

En $x = -\sqrt[3]{12}$ presenta un mínim, que té com a coordenades $\left(-\sqrt[3]{12}, \frac{-3}{4\sqrt[3]{12}}\right)$.

009 Troba els màxims i els mínims d'aquestes funcions mitjançant la derivada segona:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$

b) $g(x) = \frac{x^2}{x^6 + 2}$

a) $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{0\}$ amb $f'(x) = \frac{-x^2 + 3}{x^4} = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

$$f''(x) = \frac{2x^2 - 12}{x^5}$$

$$f''(-\sqrt{3}) > 0 \rightarrow x = -\sqrt{3} \text{ Mínim}$$

$$f''(\sqrt{3}) < 0 \rightarrow x = \sqrt{3} \text{ Màxim}$$

b) $g(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = \frac{-4x^7 + 4x}{(x^6 + 2)^2} = 0 \rightarrow x = 0, x = -1, x = 1$$

$$g''(x) = \frac{20x^{12} - 100x^6 + 8}{(x^6 + 2)^3}$$

$$g''(0) = \frac{8}{8} = 1 > 0 \rightarrow x = 0 \text{ Mínim}$$

$$g''(-1) = \frac{20 - 100 + 8}{27} < 0 \rightarrow x = -1 \text{ Màxim}$$

$$g''(1) = \frac{20 - 100 + 8}{27} < 0 \rightarrow x = 1 \text{ Màxim}$$

Aplicacions de la derivada

- 010 Utilitza la derivada segona per determinar els màxims i els mínims de la funció següent:

$$f(x) = \frac{x+3}{x^3+x^2-6x}$$

$f(x)$ és contínua en $\mathbb{R} - \{-3, 0, 2\}$.

$$f'(x) = \frac{-2x^3 - 10x^2 - 6x + 18}{(x^3 + x^2 - 6x)^2} = \frac{-2x + 2}{x^4 - 4x^3 + 4x^2} = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f''(x) = \frac{6x^4 - 24x^3 + 32x^2 - 16x}{(x^4 - 4x^3 + 4x^2)^2} = \frac{x(x-2)(6x^2 - 12x + 8)}{x^4(x-2)^2(x+3)^2} = \frac{6x^2 - 12x + 8}{x^3(x-2)(x+3)^2}$$

$$f''(1) < 0 \rightarrow x = 1 \text{ Màxim}$$

- 011 Determina on són cònques i on són convexes aquestes funcions:

a) $f(x) = 7x^3 - x^2 - x + 2$

b) $g(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

- a) Com que $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$, estudiem la concavitat per a tots els nombres reals.

$$f'(x) = 21x^2 - 2x - 1$$

$$f''(x) = 42x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{2}{42} = \frac{1}{21}$$

$$\bullet \text{ En } \left(-\infty, \frac{1}{21}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ cònca}$$

$$\bullet \text{ En } \left(\frac{1}{21}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ convexa}$$

- b) Com que $g(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$, estudiem la concavitat per a tots els nombres reals.

$$g'(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$g''(x) = \frac{-2x^3 + 6x}{(x^2 + 1)^3} = 0 \rightarrow -x^3 + 3x = 0 \rightarrow x = 0, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$$

$$\bullet \text{ En } (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x) \text{ convexa}$$

$$\bullet \text{ En } (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x) \text{ cònca}$$

- 012 Troba els intervals de concavitat i convexitat de les funcions següents, i comprova el resultat gràficament:

a) $f(x) = -x^2 - x + 4$

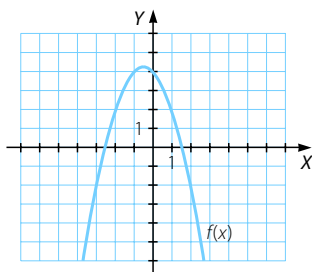
b) $g(x) = -x - 5x^2$

- a) $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$; per tant, estudiem la concavitat per a tots els nombres reals.

$$f'(x) = -2x - 1$$

$$f''(x) = -2 < 0 \rightarrow f(x) \text{ cònca}$$

Gràficament:

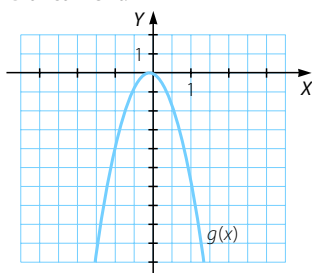


- b) $g(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$; per tant, estudiem la concavitat per a tots els nombres reals.

$$g'(x) = -1 - 10x$$

$$g''(x) = -10 < 0 \rightarrow g(x) \text{ còncava}$$

Gràficament:



013

Estudia els intervals de concavitat i convexitat d'aquestes funcions i, a partir d'aquests intervals, determina els punts d'inflexió:

a) $f(x) = x^3 + 3x^2$

b) $g(x) = \frac{x-1}{x^2+7x}$

- a) $f(x)$ és contínua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x$$

$$f''(x) = 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$$

- En $(-\infty, -1) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ còncava
- En $(-1, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa

Així, doncs, en $x = -1$ trobem un punt d'inflexió.

- b) Com que el domini de $g(x)$ és $\mathbb{R} - \{-7, 0\}$, estudiem la concavitat en $(-\infty, -7)$, $(-7, 0)$, $(0, 7)$ i $(7, +\infty)$.

$$g'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 7}{(x^2 + 7x)^2}$$

$$g''(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 - 42x - 98}{(x^2 + 7x)^3} = 0 \rightarrow x = 7$$

- En $(-\infty, -7) \cup (0, 7) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ còncava
- En $(-7, 0) \cup (7, +\infty) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ convexa

Hi ha un punt d'inflexió en $x = 7$.

Aplicacions de la derivada

014 Estudia els intervals de concavitat i convexitat i els punts d'inflexió de les funcions següents:

a) $f(x) = 4x^3 - 8x + 7$ b) $g(x) = \frac{-x^3 + 2}{x^2}$

a) $f'(x) = 12x^2 - 8$

$$f''(x) = 24x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$f'''(x) = 24 \rightarrow f'''(0) \neq 0 \rightarrow x = 0 \text{ Punt d'inflexió}$$

• En $(-\infty, 0) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ convexa

• En $(0, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ còncava

b) $g'(x) = \frac{-x^3 - 4}{x^3}$

$$g''(x) = \frac{12}{x^4} > 0 \rightarrow \text{No hi ha punts d'inflexió i la funció és còncava}$$

en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, perquè 0 no es troba en el domini.

015 Calcula els punts d'inflexió de les funcions següents mitjançant la derivada tercera:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^3}$

b) $g(x) = -\frac{x}{x^2 - 7}$

a) $f'(x) = \frac{-x^2 + 3}{2x^4}$

$$f''(x) = \frac{x^2 - 6}{x^5} = 0 \rightarrow x = -\sqrt{6}, x = \sqrt{6}$$

$$f'''(x) = \frac{-3x^2 + 30}{x^6}$$

$f'''(-\sqrt{6}) \neq 0, f'''(\sqrt{6}) \neq 0 \rightarrow$ En $x = -\sqrt{6}$ i en $x = \sqrt{6}$ presenta punts d'inflexió.

b) $g'(x) = \frac{x^2 + 7}{(x^2 - 7)^2}$

$$g''(x) = \frac{-2x^3 - 42x}{(x^2 - 7)^3} = 0 \rightarrow x = 0$$

$$g'''(x) = \frac{6x^4 + 252x^2 + 294}{(x^2 - 7)^4} \rightarrow g'''(0) \neq 0 \rightarrow \text{En } x = 0 \text{ presenta un punt d'inflexió.}$$

016 Troba els màxims, els mínims o els punts d'inflexió d'aquestes funcions:

a) $f(x) = -4x^6$

b) $g(x) = 3x^7$

a) $f'(x) = -24x^5 = 0 \rightarrow x = 0$

$$f''(x) = -120x^4 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$f'''(x) = -480x^3 \rightarrow f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = -1.440x^2 \rightarrow f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = -2.880x \rightarrow f^{(5)}(0) = 0$$

$$f^{(6)}(x) = -2.880 \neq 0$$

La primera derivada no nul·la té ordre parell i $f^{(6)}(0) < 0 \rightarrow$ En $x = 0$ assoleix un màxim.

$$b) \quad g'(x) = 21x^6 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$g''(x) = 126x^5 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$g'''(x) = 630x^4 \rightarrow g'''(0) = 0$$

$$g^{(4)}(x) = 2.520x^3 \rightarrow g^{(4)}(0) = 0$$

$$g^{(5)}(x) = 7.560x^2 \rightarrow g^{(5)}(0) = 0$$

$$g^{(6)}(x) = 15.120x \rightarrow g^{(6)}(0) = 0$$

$$g^{(7)}(x) = 15.120 \neq 0$$

L'ordre de la primera derivada no nul·la és imparell, per això en $x = 0$ presenta un punt d'inflexió.

- 017 Si obtenim el nombre de visitants d'un museu mitjançant $f(x) = \frac{300x}{x^3 + 2}$, en què x és l'hora en què l'obren, quan rep un nombre més gran de visitants?

$$\text{Hem de maximitzar aquesta funció: } f(x) = \frac{300x}{x^3 + 2}$$

$$f'(x) = \frac{-600x^3 + 600}{(x^3 + 2)^2} = 0 \rightarrow x = 1$$

$$f''(x) = \frac{1.800x^5 - 7.200x^2}{(x^3 + 2)^3} \rightarrow f''(1) < 0 \rightarrow \text{En } x = 1 \text{ assoleix un màxim.}$$

Així, doncs, el nombre més gran de visitants el rep quan fa una hora que l'han obert.

- 018 Troba el nombre real x que minimitza aquesta funció:

$$D(x) = (a - x)^2 + (b - x)^2 + (c - x)^2 \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$D'(x) = -2(a - x) - 2(b - x) - 2(c - x)$$

$$D'(x) = -2a + 2x - 2b + 2x - 2c + 2x = 6x - 2(a + b + c) = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{2(a + b + c)}{6} = \frac{a + b + c}{3}$$

$$D''(x) = 6 > 0 \rightarrow \text{En } x = \frac{a + b + c}{3} \in \mathbb{R} \text{ té un mínim.}$$

- 019 La capacitat de concentració d'una saltadora d'altura, en una competició d'atletisme de tres hores de durada, està determinada per aquesta funció:

$$f(t) = 300t(3 - t)$$

en què t mesura el temps en hores. Quin és el millor moment, en termes de capacitat de concentració, perquè la saltadora pugui batre la seva marca?

$$f'(t) = 900 - 600t = 0 \rightarrow t = \frac{3}{2}$$

$$f''(t) = -600 < 0 \rightarrow \text{En } t = \frac{3}{2} \text{ assoleix un màxim.}$$

Així, doncs, el millor moment perquè la saltadora pugui batre la seva marca és al cap d'una hora i mitja.

Aplicacions de la derivada

- 020 Troba dos nombres reals positius si saps que sumen 10 i que el producte dels seus quadrats és màxim.

Si anomenem x i y els dos nombres reals positius, es compleix que: $x + y = 10$
Hem de maximitzar la funció:

$$P(x, y) = x^2 y^2 \rightarrow P(x) = x^2 (10 - x)^2 = x^2 (100 + x^2 - 20x) = 100x^2 + x^4 - 20x^3$$

$$P'(x) = 200x + 4x^3 - 60x^2 = 0 \rightarrow x = 0, x = 5, x = 10$$

Busquem quin és el nombre que maximitza la funció $P(x)$.

$$P''(x) = 200 + 12x^2 - 120x$$

$$P''(0) = 200 > 0 \rightarrow \text{En } x = 0 \text{ presenta un mínim.}$$

$$P''(5) = -100 < 0 \rightarrow \text{En } x = 5 \text{ presenta un màxim.}$$

$$P''(10) = 200 > 0 \rightarrow \text{En } x = 10 \text{ presenta un mínim.}$$

Els dos nombres que busquem són $x = 5$ i $y = 5$.

- 021 De tots els prismes rectes de base quadrada i que tinguin com a perímetre d'una cara lateral 30 cm, troba les dimensions del que té volum màxim.

Anomenem x la longitud de l'aresta de la base i y l'altura del prisma.
Com que el perímetre d'una cara lateral és de 30 cm, es compleix que:
 $2x + 2y = 30 \rightarrow x + y = 15 \rightarrow y = 15 - x$

La funció que hem d'optimitzar és: $V(x) = x^2(15 - x) = 15x^2 - x^3$

$$V'(x) = 30x - 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0, x = 10$$

$$V''(x) = 30 - 6x \rightarrow V''(0) > 0, V''(10) < 0 \rightarrow \text{El màxim es troba en } x = 10.$$

Les dimensions del prisma recte de base quadrada són:

Aresta de la base: 10 cm

Altura: 5 cm

- 022 Determina el punt de la gràfica de la funció que a cada nombre hi fa correspondre el seu doble i que té una distància mínima al punt (6, 3).
Quina és aquesta distància?

La funció que a cada nombre hi fa correspondre el seu doble és: $y = 2x$

Un punt que pertany a aquesta funció és $(x, 2x)$, i la funció que ens dona la distància des d'aquest punt a (6, 3) és: $d(x) = \sqrt{(x - 6)^2 + (2x - 3)^2}$

Optimitzem la funció $D(x) = d^2(x) = (x - 6)^2 + (2x - 3)^2$.

$$D'(x) = 2(x - 6) + 4(2x - 3) = 2x - 12 + 8x - 12 = 10x - 24 = 0 \rightarrow x = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

$$D''(x) = 10 > 0 \rightarrow \text{En } x = \frac{12}{5} \text{ assoleix un mínim.}$$

Així, doncs, la distància al punt (6, 3) serà mínima en el punt $\left(\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right)$.

- 023 Entre tots els rectangles d'àrea 3 m^2 , troba les dimensions del que té mínim el producte de les seves diagonals.

Considerem x i y les dimensions del rectangle, de manera que: $xy = 3$.

La funció que hem d'optimitzar està determinada per:

$$d \cdot d = d^2 \rightarrow P(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow P(x) = x^2 + \left(\frac{3}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{9}{x^2}$$

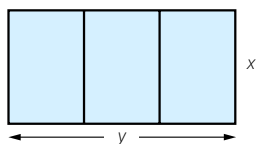
$$P'(x) = 2x - \frac{18}{x^3} = 0 \rightarrow 2x^4 - 18 = 0 \rightarrow x = -\sqrt[4]{9}, x = \sqrt[4]{9}$$

Com que la solució negativa no és vàlida, tenim que:

$$P''(x) = 2 + \frac{54}{x^4} \rightarrow P''(\sqrt[4]{9}) > 0 \rightarrow \text{En aquest punt hi ha un mínim.}$$

Les dimensions són $x = \sqrt[4]{9}, y = \frac{3}{\sqrt[4]{9}} = \sqrt[4]{9}$, per tant, es tracta d'un quadrat de costat $\sqrt[4]{9}$ m.

- 024 Un jardiner té 160 m de filferro que vol fer servir per construir una tanca en una zona rectangular i dividir-la en tres parts, de manera que vol posar el filat de les divisions paral·leles en un dels costats del rectangle. Quines dimensions ha de tenir la zona tancada perquè l'àrea sigui la més gran possible?



Anomenem x i y les dimensions de la zona rectangular, i considerem que les divisions són paral·leles als costats de mida x . Per dividir la zona rectangular en tres parts necessitem dues divisions, per la qual cosa s'ha de complir que:

$$4x + 2y = 160 \rightarrow 2x + y = 80 \rightarrow y = 80 - 2x$$

Hem d'optimitzar la funció que ens dona l'àrea, és a dir:

$$A(x, y) = xy \rightarrow A(x) = x(80 - 2x) = 80x - 2x^2$$

$$A'(x) = 80 - 4x = 0 \rightarrow x = 20$$

$$A''(x) = -4 < 0 \rightarrow \text{En } x = 20 \text{ assoleix un màxim.}$$

Així, doncs, les dimensions de la zona rectangular han de ser $x = 20$ m i $y = 40$ m.

- 025 Troba el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = \frac{-2}{x}$ en el punt d'abscissa $x = 2$.

El pendent coincideix amb el valor de la derivada en el punt $x = 2$.

$$f'(x) = \frac{2}{x^2} \rightarrow f'(2) = \frac{1}{2} \rightarrow \text{El pendent és } \frac{1}{2}.$$

- 026 Donada la funció $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$, calcula el pendent de la tangent a la gràfica de la funció f en el punt d'abscissa $x = -1$.

(Activitat de Selectivitat)

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \rightarrow f'(-1) = 3 - 6 = -3 \rightarrow \text{El pendent és } -3.$$

Aplicacions de la derivada

027

Donada la funció: $f(x) = \begin{cases} 16 - x^2 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ x^2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

Calcula el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció en $x = 1$.

(Activitat de Selectivitat)

$$x = 1 \rightarrow f(x) = 16 - x^2 \rightarrow f'(x) = -2x \rightarrow f'(1) = -2 \rightarrow \text{El pendent és } -2.$$

028

Donada la funció $f(x) = \frac{x}{x-2}$, existeix algun punt de la gràfica en el qual la recta tingui pendent positiu? Justifica la resposta.

(Activitat de Selectivitat)

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \text{No existeix cap punt de la gràfica en el qual la recta tangent tingui pendent positiu.}$$

029

Troba l'equació de la tangent a la gràfica de cada una d'aquestes funcions en els punts que s'indiquen.

a) $y = \sin x + x$, en $x = \pi$.

b) $y = \frac{x^4 - 3}{x}$, en $x = -1$.

c) $y = \ln(x^2 + 7)$, en $x = 0$.

d) $y = 3^{x+1}$, en $x = -1$.

a) $f(\pi) = \pi$

$$f'(x) = \cos x + 1 \rightarrow f'(\pi) = 0$$

$$\text{L'equació de la recta tangent és: } y - \pi = 0(x - \pi) \rightarrow y = \pi$$

b) $f(-1) = 2$

$$f'(x) = \frac{4x^3 \cdot x - (x^4 - 3)}{x^2} = \frac{3x^4 + 3}{x^2} \rightarrow f'(-1) = 6$$

$$\text{L'equació de la recta tangent és: } y - 2 = 6(x + 1) \rightarrow y = 6x + 8$$

c) $f(0) = \ln 7$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 7} \rightarrow f'(0) = 0$$

$$\text{L'equació de la recta tangent és: } y - \ln 7 = 0(x - 0) \rightarrow y = \ln 7$$

d) $f(-1) = 3^0 = 1$

$$f'(x) = 3^{x+1} \cdot \ln 3 \rightarrow f'(-1) = 3^0 \cdot \ln 3 = \ln 3$$

$$\text{L'equació de la recta tangent és: } y - 1 = \ln 3(x + 1)$$

030

Determina l'equació de la tangent a la paràbola $y = \frac{1}{2}x^2$ en el punt $A(2, 2)$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x \rightarrow f'(2) = 2$$

$$\text{L'equació de la recta tangent és: } y - 2 = 2(x - 2) \rightarrow y = 2x - 2$$

- 031 Calcula l'equació de la recta tangent a la corba $x^2 + 16y^2 - 16 = 0$ en el punt d'abscissa 3 i ordenada positiva.

$$x = 3 \rightarrow 9 + 16y^2 - 16 = 0 \rightarrow 16y^2 = 7 \rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{Considerem el punt } \left(3, \frac{\sqrt{7}}{4}\right).$$

Aillem y com a arrel positiva perquè és l'ordenada positiva.

$$y = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{4} \rightarrow y' = \frac{-x}{4\sqrt{16 - x^2}}$$

$$y'(3) = \frac{-3}{4\sqrt{16 - 9}} = -\frac{3\sqrt{7}}{28}$$

L'equació de la recta tangent és:

$$y - \frac{\sqrt{7}}{4} = -\frac{3\sqrt{7}}{28}(x - 3) \rightarrow y = -\frac{3\sqrt{7}}{28}x + \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

- 032 Determina l'equació de la recta tangent a la corba $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ en el punt d'abscissa 4 i ordenada positiva.

$$x = 4 \rightarrow 64 - 9y^2 - 36 = 0 \rightarrow 9y^2 = 28 \rightarrow y = \pm \frac{2\sqrt{7}}{3}$$

$$\text{Considerem el punt } \left(4, \frac{2\sqrt{7}}{3}\right).$$

Aillem y com a arrel positiva perquè és l'ordenada positiva.

$$y = \frac{\sqrt{4x^2 - 36}}{3} \rightarrow y' = \frac{4x}{3\sqrt{4x^2 - 36}}$$

$$y'(4) = \frac{16}{3\sqrt{64 - 36}} = \frac{8\sqrt{7}}{21}$$

L'equació de la recta tangent és:

$$y - \frac{2\sqrt{7}}{3} = \frac{8\sqrt{7}}{21}(x - 4) \rightarrow y = \frac{8\sqrt{7}}{21}x - \frac{6\sqrt{7}}{7}$$

- 033 Considera la funció $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

Troba l'expressió de la recta tangent a aquesta funció en $x = 3$.

(Activitat de Selectivitat)

$$f(3) = 3 \quad f'(x) = \frac{-2}{(x-2)^2} \rightarrow f'(3) = -2$$

$$\text{La recta tangent és: } y - 3 = -2(x - 3) \rightarrow y - 3 = -2x + 6 \rightarrow y = -2x + 9$$

Aplicacions de la derivada

- 034 Donada la funció $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en $x = 0$.

(Activitat de Selectivitat)

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2} \rightarrow f'(0) = 1$$

Equació de la recta tangent: $y = x$

- 035 Considera la funció $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$.

Calcula l'equació de la recta tangent a la corba en $x = -3$.

(Activitat de Selectivitat)

$$f(-3) = \frac{20}{9}$$

$$f'(x) = \frac{3x-4}{x^3} \rightarrow f'(-3) = \frac{-9-4}{-27} = \frac{13}{27}$$

Equació de la recta tangent:

$$y - \frac{20}{9} = \frac{13}{27}(x + 3) \rightarrow y - \frac{20}{9} = \frac{13}{27}x + \frac{39}{27} \rightarrow y = \frac{13}{27}x + \frac{11}{3}$$

- 036 Calcula l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x) = (x+1)e^{-x}$ en el punt de tall $f(x)$ amb l'eix X .

Calculem el punt de tall amb l'eix d'abscisses:

$$(x+1)e^{-x} = 0 \rightarrow x+1 = 0 \rightarrow x = -1$$

$$f'(x) = e^{-x} - (x+1)e^{-x} \rightarrow f'(-1) = e$$

L'equació de la recta tangent és: $y = e(x+1)$

- 037 Considera la funció $f(x) = \frac{2x}{x+5}$.

Determina els valors de a i b perquè l'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt $x = -3$ sigui $y = ax + b$.

(Activitat de Selectivitat)

$$f(-3) = \frac{-6}{2} = -3$$

$$f'(x) = \frac{10}{(x+5)^2} \rightarrow f'(-3) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Equació de la recta tangent:

$$y + 3 = \frac{5}{2}(x + 3) \rightarrow y + 3 = \frac{5}{2}x + \frac{15}{2} \rightarrow y = \frac{5}{2}x + \frac{9}{2} \rightarrow a = \frac{5}{2}, b = \frac{9}{2}$$

- 038 Troba els valors de a i b perquè la recta tangent a la gràfica de $f(x) = ax^2 - b$ en el punt $(1, 5)$ sigui la recta $y = 3x + 2$.

(Activitat de Selectivitat)

$$f(1) = 5 \rightarrow a - b = 5$$

$$f'(x) = 2ax \rightarrow f'(1) = 2a$$

Com que el pendent de la recta tangent és 3 resulta: $2a = 3 \rightarrow a = \frac{3}{2}$

$$\text{Per tant: } a - b = 5 \rightarrow \frac{3}{2} - b = 5 \rightarrow b = \frac{3}{2} - 5 \rightarrow b = \frac{-7}{2}$$

$$\text{D'aquesta manera tenim que: } f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}$$

- 039 Determina les equacions de la recta tangent i de la recta normal a la gràfica de la funció $y = \ln x$ en el punt d'abscissa $x = 1$.

$$f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(1) = 1$$

L'equació de la recta tangent és: $y = x - 1$

L'equació de la recta normal és: $y = -(x - 1) \rightarrow y = -x + 1$

- 040 Troba les equacions de les rectes tangent i normal a les corbes següents en els punts que s'indiquen:

a) $y = xe^{\sqrt{x}}$, en $x = 4$.

b) $y = \arcsin \sqrt{x}$, en $x = \frac{1}{2}$.

a) $f(4) = 4e^2$

$$f'(x) = e^{\sqrt{x}} + xe^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = e^{\sqrt{x}} + \frac{xe^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \rightarrow f'(4) = 2e^2$$

L'equació de la recta tangent és: $y - 4e^2 = 2e^2(x - 4) \rightarrow y = 2e^2x - 4e^2$

L'equació de la recta normal és:

$$y - 4e^2 = -\frac{1}{2e^2}(x - 4) \rightarrow y = -\frac{1}{2e^2}x + \frac{2}{e^2} + 4e^2$$

b) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} \rightarrow f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

L'equació de la recta tangent és: $y - \frac{\pi}{4} = x - \frac{1}{2} \rightarrow y = x - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

L'equació de la recta normal és: $y - \frac{\pi}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right) \rightarrow y = -x + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

Aplicacions de la derivada

- 041 Determina les equacions de la recta tangent i de la recta normal a la gràfica de $g(x) = |x^2 - 9|$ en el punt d'abscissa $x = 2$.

$$g(2) = 5$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } |x| \geq 3 \\ -x^2 + 9 & \text{si } -3 < x < 3 \end{cases} \rightarrow g'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } |x| > 3 \\ -2x & \text{si } -3 < x < 3 \end{cases}$$

$$g'(2) = -4$$

L'equació de la recta tangent és: $y - 5 = -4(x - 2) \rightarrow y = -4x + 13$

$$\text{L'equació de la recta normal és: } y - 5 = \frac{1}{4}(x - 2) \rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{2}$$

- 042 Troba les equacions de les rectes tangent i normal a la corba $y = x^3 + x^2 - 6x + 1$ en el punt d'ordenada 1 i abscissa positiva.

$$x^3 + x^2 - 6x + 1 = 1 \rightarrow x^3 + x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x^2 + x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Hem de trobar les rectes que passen pel punt (2, 1).

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 6 \rightarrow f'(2) = 10$$

L'equació de la recta tangent és: $y - 1 = 10(x - 2) \rightarrow y = 10x - 19$

$$\text{L'equació de la recta normal és: } y - 1 = -\frac{1}{10}(x - 2) \rightarrow y = -\frac{1}{10}x + \frac{6}{5}$$

- 043 Determina en quins punts de la gràfica de la funció $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$, la recta tangent a aquesta funció és paral·lela a la recta $y = x + 7$.

Escriu les equacions de les rectes tangent i normal en els punts obtinguts.

Si la recta tangent és paral·lela a la recta $y = x$, resulta que: $f'(x) = 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

$$\text{Aleshores, tenim que: } 3x^2 - 6x + 1 = 1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Per tant, els punts de la gràfica que verifiquen la condició són: (0, 1) i (2, -1)

Equació de la recta tangent en (0, 1): $y - 1 = x \rightarrow y = x + 1$

Equació de la recta normal en (0, 1): $y - 1 = -x \rightarrow y = -x + 1$

Equació de la recta tangent en (2, -1): $y + 1 = x - 2 \rightarrow y = x - 3$

Equació de la recta normal en (2, -1):

$$y + 1 = -(x - 2) \rightarrow y = -x + 2 \rightarrow y = -x + 1$$

- 044 Calcula el valor de a perquè la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = -ax^2 + 5x - 4$, en el punt d'abscissa 3, talli l'eix X en el punt $x = 5$. Quina és l'equació de la recta normal?

$$f(3) = -9a + 11$$

$$f'(x) = -2ax + 5 \rightarrow f'(3) = -6a + 5$$

L'equació de la recta tangent és:

$$y + 9a - 11 = (-6a + 5)(x - 3) \rightarrow y = (-6a + 5)x + 9a - 4$$

Si aquesta recta passa pel punt (5, 0), aleshores:

$$(-6a + 5)5 + 9a - 4 = 0 \rightarrow -21a = -21 \rightarrow a = 1$$

Així doncs, l'equació de la recta tangent és: $y - 2 = -(x - 3) \rightarrow y = -x + 5$

L'equació de la recta normal és: $y - 2 = x - 3 \rightarrow y = x - 1$

- 045** Donada la funció $f(x) = -x^2 + bx + c$, calcula els valors b i c si aquesta funció passa pel punt (1, 4) i en aquest punt l'equació de la recta tangent és $y = 4$.

(Activitat de Selectivitat)

$$f(1) = 4 \rightarrow -1 + b + c = 4 \rightarrow b + c = 5$$

$$f'(x) = -2x + b \rightarrow f'(1) = -2 + b$$

Equació de la recta tangent:

$$y - 4 = (-2 + b)(x - 1) \rightarrow y = (-2 + b)x + 2 - b + 4$$

$$\left. \begin{array}{l} -2 + b = 0 \\ 2 - b + 4 = 4 \\ b + c = 5 \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 2 \\ c = 3 \end{array} \right. \rightarrow f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

- 046** Troba els valors de a , b i c perquè les gràfiques de les funcions $f(x) = x^2 + ax + b$ i $g(x) = x^3 + c$ passin pel punt (1, 2) i en aquest punt tinguin la mateixa tangent.

Si la gràfica de f passa pel punt (1, 2), aleshores: $1 + a + b = 2 \rightarrow a + b = 1$

I si la gràfica de g passa pel punt (1, 2), tenim que: $1 + c = 2 \rightarrow c = 1$

A més, si en aquest punt tenen la mateixa tangent es verifica que: $f'(1) = g'(1)$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 2x + a \rightarrow f'(1) = 2 + a \\ g'(x) = 3x^2 \rightarrow g'(1) = 3 \end{array} \right\} \rightarrow 2 + a = 3 \rightarrow a = 1 \rightarrow b = 0$$

- 047** Troba el punt de la corba $y = \sqrt{x}$ en el qual la recta tangent és paral·lela a la recta $y = \frac{1}{2}x$.

Les rectes són paral·leles si tenen el mateix pendent; així doncs, busquem el punt

que verifica que: $f'(x) = \frac{1}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Aleshores, tenim que: } \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow \sqrt{x} = 1 \rightarrow x = 1$$

El punt té aquestes coordenades: (1, 1).

- 048** Troba els punts de la gràfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta $y = x$.

Si la recta tangent és paral·lela a la recta $y = x$, resulta que: $f'(x) = 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$$

$$\text{Aleshores, tenim que: } 3x^2 - 6x + 1 = 1 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Per tant, els punts de la gràfica que verifiquen la condició són (0, 0) i (2, -2).

Aplicacions de la derivada

- 049 Determina el punt de la paràbola $y = x^2 - 7x + 3$ en el qual la recta tangent que passa per aquest punt és paral·lela a la recta $y = -5x + 5$.

Les rectes són paral·leles si tenen el mateix pendent; així doncs, busquem el punt que verifica que: $f'(x) = -5$

$$f'(x) = 2x - 7$$

$$\text{Aleshores, tenim que: } 2x - 7 = -5 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$$

El punt té aquestes coordenades: $(1, -3)$.

- 050 Troba el domini de la funció $y = \log(1 + x + x^2)$ i els punts en els quals la tangent a la corba és paral·lela a la bisectriu del primer quadrant.

Nota: $\log$ significa logaritme neperià.

(Activitat de Selectivitat)

$$1 + x + x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R}$$

Com que la bisectriu del primer quadrant és la recta $y = x$, cal verificar que:

$$\begin{aligned} y' = \frac{1+2x}{1+x+x^2} = 1 &\rightarrow 1+2x = 1+x+x^2 \rightarrow x^2+x-2x = 0 \rightarrow x^2-x = 0 \\ &\rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Els punts són $(0, 0)$ i $(1, \log 3)$.

- 051 Troba l'equació de la paràbola $y = x^2 + bx + c$ la recta tangent a la qual en el punt $(1, 1)$ és paral·lela a la bisectriu del primer quadrant.

$$f'(x) = 2x + b \rightarrow f'(1) = 2 + b$$

La bisectriu del primer quadrant és la recta $y = x$.

Si la recta tangent hi és paral·lela, aleshores: $2 + b = 1 \rightarrow b = -1$

Així doncs, l'equació de la funció és de la forma: $y = x^2 - x + c$

Si passa pel punt $(1, 1)$, tenim que: $1 = 1 - 1 + c \rightarrow c = 1$

Per tant, l'equació de la paràbola és $y = x^2 - x + 1$.

- 052 Troba els valors de a, b i c perquè la corba $f(x) = ax^2 + bx + c$ passi pel punt $(1, 3)$ i sigui tangent en l'origen de coordenades a la bisectriu del primer quadrant.

(Activitat de Selectivitat)

$$f(1) = 3 \rightarrow a + b + c = 3$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$\text{Passa pel punt } (0, 0): f(0) = 0 \rightarrow c = 0$$

Ha de ser tangent en aquest punt a la bisectriu del primer quadrant:

$$f'(0) = 1 \rightarrow b = 1$$

$$\text{Per tant, resulta: } a + b + c = 3 \rightarrow a + 1 = 3 \rightarrow a = 2$$

Així doncs, la funció és $f(x) = 2x^2 + x$.

- 053 Considera la funció $f(x) = \frac{3-2x}{x}$.

a) Troba els punts de la gràfica en els quals la recta tangent és paral·lela a la recta $3x + 4y + 5 = 0$.

b) Calcula les equacions d'aquestes rectes tangents.

(Activitat de Selectivitat)

a) Pendent de la recta $3x + 4y + 5 = 0 \rightarrow \frac{-3}{4}$

Cal verificar que: $f'(x) = \frac{-3}{4} \rightarrow f'(x) = \frac{-3}{x^2} = \frac{-3}{4} \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

b) $f(2) = \frac{3-4}{2} = \frac{-1}{2}$

Recta tangent en $\left(2, \frac{-1}{2}\right)$:

$$y + \frac{1}{2} = \frac{-3}{4}(x - 2) \rightarrow y + \frac{1}{2} = \frac{-3}{4}x + \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{-3}{4}x + 1$$

$$f(-2) = \frac{3+4}{-2} = \frac{-7}{2}$$

Recta tangent en $\left(-2, \frac{-7}{2}\right)$:

$$y + \frac{7}{2} = \frac{-3}{4}(x + 2) \rightarrow y + \frac{7}{2} = \frac{-3}{4}x - \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{-3}{4}x - 5$$

054

Considera la funció: $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ \frac{x-3}{x} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Determina el punt de la gràfica en el qual la recta tangent té pendent 0. Què més podem afirmar sobre aquest punt? Justifica la resposta.

(Activitat de Selectivitat)

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } 1 < x < 3 \\ \frac{3}{x^2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Si la recta tangent té pendent 0, cal verificar que:

$$f'(x) = 0 \rightarrow -2x + 4 = 0 \rightarrow x = 2$$

El punt té aquestes coordenades: (2, 1).

A més, podem afirmar que és un punt de tall amb l'eix X i un extrem relatiu.

Com que $f''(x) = -2 < 0$ en l'interval (1, 3), el punt (2, 1) és un màxim.

055

Dibuixa la paràbola $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

- a) En quin punt de la gràfica la tangent és paral·lela a l'eix d'abscisses?
b) Troba l'equació de la recta tangent a $f(x)$ en el punt $P(2, 0)$.

(Activitat de Selectivitat)

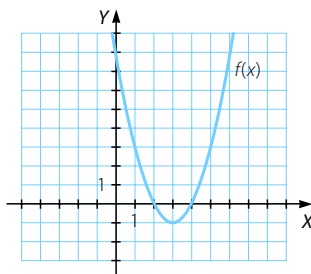
Es tracta d'una paràbola amb vèrtex (3, -1).

Punts de tall amb l'eix X: (2, 0) i (4, 0).

Punts de tall amb l'eix Y: (0, 8).

- a) Perquè la tangent sigui paral·lela a l'eix d'abscisses:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3 \text{ (vèrtex de la paràbola)}$$



Aplicacions de la derivada

b) $f'(2) = 4 - 6 = -2$

Equació de la tangent: $y - 0 = -2(x - 2) \rightarrow y = -2x + 4$

056 Considera f la funció amb domini els nombres reals menys el zero definida

per $f(x) = \frac{4}{x}$.

a) Calcula l'equació de la recta tangent i de la recta normal a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = 2$.

b) Determina els punts A i B de la gràfica de f per als quals les rectes tangents en A i B es tallen en el punt $(4, -8)$.

a) $f(2) = 2$

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2} \rightarrow f'(2) = -1$$

L'equació de la recta tangent és: $y - 2 = -(x - 2) \rightarrow y = -x + 4$

L'equació de la recta normal és: $y - 2 = x - 2 \rightarrow y = x$

b) Considerem $P\left(p, \frac{4}{p}\right)$ un punt qualsevol de la gràfica de f .

$$f'(p) = -\frac{4}{p^2}$$

Així doncs, la recta tangent en P és de la forma:

$$y - \frac{4}{p} = -\frac{4}{p^2}(x - p) \rightarrow y = -\frac{4}{p^2}x + \frac{8}{p}$$

Si aquesta recta passa pel punt $(4, -8)$, tenim que:

$$-8 = -\frac{4}{p^2} \cdot 4 + \frac{8}{p} \rightarrow 8p^2 + 8p - 16 = 0 \rightarrow p^2 + p - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} p = 1 \\ p = -2 \end{cases}$$

Per tant, els punts que busquem són $A(1, 4)$ i $B(-2, -2)$.

057 Troba els intervals de creixement i decreixement, i també els màxims i els mínims, de les funcions polinòmiques següents:

a) $f(x) = x^2(x + 1)$

b) $g(x) = -x^4 + 3x^2 - 2x$

c) $h(x) = 8x + 6x^2 - x^4$

d) $i(x) = -x^3 + x^2 - 1$

e) $j(x) = |x^2 - 2|$

a) $f'(x) = 2x(x + 1) + x^2 = 3x^2 + 2x = 0 \rightarrow x = 0, x = -\frac{2}{3}$

• En $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

• En $\left(-\frac{2}{3}, 0\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

Per tant, $f(x)$ aconsegueix un màxim en $x = -\frac{2}{3}$ i un mínim en $x = 0$.

$$b) \quad g'(x) = -4x^3 + 6x - 2 = 0 \rightarrow x = 1, x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\bullet \text{ En } \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, 1\right) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x) \text{ creixent}$$

$$\bullet \text{ En } \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \cup (1, +\infty) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x) \text{ decreixent}$$

Per tant, en $x = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ i en $x = 1$ assoleix dos màxims, i en $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, un mínim.

$$c) \quad h'(x) = 8 + 12x - 4x^3 = 0 \rightarrow x = -1, x = 2$$

$$h''(x) = 12 - 12x^2$$

$$h''(2) < 0 \rightarrow \text{En } x = 2 \text{ aconsegueix un màxim.}$$

$$h''(-1) = 0$$

$$h'''(x) = -24x \rightarrow h'''(-1) \neq 0 \rightarrow \text{En } x = -1 \text{ hi ha un punt d'inflexió.}$$

Així doncs, $h(x)$ és creixent en $(-\infty, -1) \cup (-1, 2)$ i és decreixent en $(2, +\infty)$.

$$d) \quad i'(x) = -3x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(-3x + 2) = 0 \rightarrow x = 0, x = \frac{2}{3}$$

$$\bullet \text{ En } (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right) \rightarrow i'(x) < 0 \rightarrow i(x) \text{ decreixent}$$

$$\bullet \text{ En } \left(0, \frac{2}{3}\right) \rightarrow i'(x) > 0 \rightarrow i(x) \text{ creixent}$$

En $x = 0$ aconsegueix un mínim i en $x = \frac{2}{3}$ un màxim.

$$e) \quad j(x) = |x^2 - 2| = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x^2 - 2 \geq 0 \\ 2 - x^2 & \text{si } x^2 - 2 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \\ 2 - x^2 & \text{si } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$$

$$j'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \\ -2x & \text{si } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \end{cases}$$

Així, doncs $j'(x) = 0 \rightarrow x = 0$, per tant, els intervals en els quals hem d'estudiar el creixement i el decreixement són: $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, +\infty)$

$$\bullet \text{ En } (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \rightarrow j'(x) > 0 \rightarrow i(x) \text{ creixent}$$

$$\bullet \text{ En } (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2}) \rightarrow j'(x) < 0 \rightarrow i(x) \text{ decreixent}$$

La funció $j(x)$ assoleix un màxim en $x = 0$ i dos mínims en $x = -\sqrt{2}$ i $x = \sqrt{2}$.

058

Determina els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius d'aquestes funcions racionals:

$$a) \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

$$c) \quad h(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$$

$$b) \quad g(x) = \frac{40 - 5x}{10 - x}$$

$$d) \quad i(x) = \frac{x^3}{x - 5}$$

Aplicacions de la derivada

a) f és contínua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

• En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

• En $(0, 1) \cup (1, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

En $x = 0$ assoleix un màxim, i en $x = 2$, un mínim.

b) g és contínua en $\mathbb{R} - \{10\}$.

$$g'(x) = \frac{-10}{(10-x)^2} < 0 \rightarrow g(x) \text{ és decreixent en tot el seu domini.}$$

c) h és contínua en $\mathbb{R}$.

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2}{(x^2 + 2)^2} = 0 \rightarrow x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$$

• En $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \rightarrow h'(x) < 0 \rightarrow h(x)$ decreixent

• En $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \rightarrow h'(x) > 0 \rightarrow h(x)$ creixent

Per tant, en $x = \sqrt{2}$ assoleix un màxim, i en $x = -\sqrt{2}$ un mínim.

d) i és contínua en $\mathbb{R} - \{5\}$.

$$i'(x) = \frac{2x^3 - 15x^2}{(x-5)^2} = 0 \rightarrow x = 0, x = \frac{15}{2}$$

• En $(-\infty, 0) \cup (0, 5) \cup \left(5, \frac{15}{2}\right) \rightarrow i'(x) < 0 \rightarrow i(x)$ decreixent

• En $\left(\frac{15}{2}, +\infty\right) \rightarrow i'(x) > 0 \rightarrow i(x)$ creixent

En $x = \frac{15}{2}$ la funció aconsegueix un mínim.

059 Considera la funció $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$.

a) Troba l'equació de la recta tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 2$.

b) Determina els intervals de creixement i decreixement, i els extrems, si existeixen.

(Activitat de Selectivitat)

$$\text{a) } f(2) = \frac{4}{3}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x}{(2x-1)^2} \rightarrow f'(2) = \frac{8-4}{9} = \frac{4}{9}$$

Equació de la recta tangent:

$$y - \frac{4}{3} = \frac{4}{9}(x - 2) \rightarrow y = \frac{4}{9}x - \frac{8}{9} + \frac{4}{3} \rightarrow y = \frac{4}{9}x + \frac{4}{9}$$

$$\text{b) } \text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x}{(2x - 1)^2} = 0 \rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

• En $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

• En $\left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

En $x = 0$ aconsegueix un màxim i en $x = 1$ un mínim.

060

Calcula els intervals de creixement i decreixement, i també els màxims i els mínims, de les funcions exponencials següents:

a) $f(x) = 3x^2 e^x$

c) $h(x) = 6xe^{-x}$

b) $g(x) = (x + 3)e^x$

d) $i(x) = e^{x^2 + 2x + 1}$

Les tres funcions són contínues en $\mathbb{R}$.

a) $f'(x) = e^x(6x + 3x^2) = 0 \rightarrow x = -2, x = 0$

• En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

• En $(-2, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

En $x = -2$ assoleix un màxim, i en $x = 0$, un mínim.

b) $g'(x) = e^x(x + 4) = 0 \rightarrow x = -4$

• En $(-\infty, -4) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreixent

• En $(-4, +\infty) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creixent

En $x = -4$ assoleix un mínim.

c) $h'(x) = e^{-x}(6 - 6x) = 0 \rightarrow x = 1$

• En $(-\infty, 1) \rightarrow h'(x) > 0 \rightarrow h(x)$ creixent

• En $(1, +\infty) \rightarrow h'(x) < 0 \rightarrow h(x)$ decreixent

En $x = 1$ assoleix un màxim.

d) $i'(x) = (2x + 2)e^{x^2 + 2x + 1} = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

• En $(-\infty, -1) \rightarrow i'(x) < 0 \rightarrow i(x)$ decreixent

• En $(-1, +\infty) \rightarrow i'(x) > 0 \rightarrow i(x)$ creixent

En $x = -1$ assoleix un mínim.

061

Estudia el creixement i el decreixement i els extrems relatius d'aquestes funcions logarítmiques:

a) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

b) $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

c) $h(x) = x \ln \sqrt{x}$

d) $i(x) = \frac{x}{\ln x}$

Aplicacions de la derivada

- a) El domini de f és $(0, +\infty)$ i és contínua en tot el domini.

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1$$

- En $(0, 1) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent
- En $(1, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

En $x = 1$ assoleix un mínim.

- b) El domini de g és $(0, +\infty)$ i és contínua en tot el domini.

$$g'(x) = \frac{1-2 \ln x}{x^3} = 0 \rightarrow x = \sqrt{e}$$

- En $(0, \sqrt{e}) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creixent
- En $(\sqrt{e}, +\infty) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreixent

En $x = \sqrt{e}$ assoleix un màxim.

- c) El domini de h és $(0, +\infty)$ i és contínua en tot el domini.

$$h'(x) = \ln(\sqrt{x}) + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{e}$$

- En $\left(0, \frac{1}{e}\right) \rightarrow h'(x) < 0 \rightarrow h(x)$ decreixent
- En $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right) \rightarrow h'(x) > 0 \rightarrow h(x)$ creixent

En $x = \frac{1}{e}$ assoleix un mínim.

- d) El domini de i és $(0, +\infty) - \{1\}$ i és contínua en tot el domini.

$$i'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln x^2} = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

- En $(0, 1) \cup (1, e) \rightarrow i'(x) < 0 \rightarrow i(x)$ decreixent
- En $(e, +\infty) \rightarrow i'(x) > 0 \rightarrow i(x)$ creixent

En $x = e$ aconseguix un mínim.

062

Estudia el creixement i el decreixement d'aquestes funcions trigonomètriques, i determina si assoleixen màxims o mínims en algun punt:

a) $f(x) = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$

c) $h(x) = \operatorname{arctg} x$

b) $g(x) = x - \sin x$

d) $i(x) = 3x - \cos x$

- a) f és contínua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = -2 \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = -2 \cos x = 0 \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{2}$$

Estudiem el creixement en $(-\pi, \pi)$ perquè les funcions de sinus i cosinus són periòdiques de període 2π .

- En $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent
- En $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

La funció té un màxim en $x = \frac{-\pi}{2}$ i un mínim en $x = \frac{\pi}{2}$.

Com que és una funció periòdica de període 2π , podem estendre el resultat a tota la recta real, de manera que es repeteixin indefinidament intervals de creixement i de decreixement, màxims i mínims.

b) g és contínua en $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 1 - \cos x = 0 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 0$$

Estudiem el creixement en $(-\pi, \pi)$, perquè $g'(x)$ és periòdica de període 2π .

$$g'(x) > 0 \text{ en } (-\pi, 0) \cup (0, \pi) \rightarrow g(x) \text{ creixent} \rightarrow \text{No té extrems relatius.}$$

Si estenem el resultat a tota la recta real, g no té extrems relatius.

c) h és contínua en $\mathbb{R}$.

$$h'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0 \rightarrow h(x) \text{ creixent en } \mathbb{R} \rightarrow \text{No té extrems relatius.}$$

d) i és contínua en $\mathbb{R}$.

$$i'(x) = 3 + \sin x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow i(x) \text{ creixent en } \mathbb{R} \rightarrow \text{No té extrems relatius.}$$

063

Determina els màxims i els mínims d'aquestes funcions per mitjà de la derivada segona:

a) $y = x^3 - 24x - 6$

c) $y = \ln(x^2 + 1)$

b) $y = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$

d) $y = \frac{x^3 - 8}{x^2}$

a) $y' = 3x^2 - 24 = 0 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{8}$

$$y'' = 6x$$

$$y''(\sqrt{8}) > 0 \rightarrow \text{En } x = \sqrt{8} \text{ assoleix un mínim.}$$

$$y''(-\sqrt{8}) < 0 \rightarrow \text{En } x = -\sqrt{8} \text{ assoleix un màxim.}$$

c) $y' = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$

$$y'' = \frac{-4x^3 + 12x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$y''(1) > 0 \rightarrow \text{En } x = 1 \text{ assoleix un mínim.}$$

$$y''(-1) < 0 \rightarrow \text{En } x = -1 \text{ assoleix un màxim.}$$

d) $y' = \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 0$

$$y'' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow y''(0) = 2 > 0 \rightarrow \text{En } x = 0 \text{ assoleix un mínim.}$$

d) $y' = \frac{x^3 + 16}{x^3} = 0 \rightarrow x^3 = -16 \rightarrow x = -\sqrt[3]{16}$

$$y'' = \frac{-48}{x^4} \rightarrow y''(-\sqrt[3]{16}) < 0 \rightarrow \text{En } x = -\sqrt[3]{16} \text{ aconsegueix un màxim.}$$

Aplicacions de la derivada

- 064 Troba els intervals de creixement i de decreixement i els màxims i els mínims d'aquestes funcions, a partir de la segona derivada.

a) $y = (x^2 + 4)e^x$ b) $y = \frac{1}{x-2}$ c) $y = x^2e^x$ d) $y = \frac{x-2}{x} + 5x$

a) Domini = $\mathbb{R}$

$$y' = (x^2 + 2x + 4)e^x \neq 0 \rightarrow \text{No té extrems relatius.}$$

b) Domini = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$y' = \frac{-1}{(x-2)^2} < 0 \rightarrow \text{Funció decreixent en tot el domini}$$

No té cap extrem relatiu.

c) Domini = $\mathbb{R}$

$$y' = 2xe^x + x^2e^x = e^x(2x + x^2) = 0 \rightarrow 2x + x^2 = 0 \rightarrow x = 0, x = -2$$

$$y'' = e^x(2x + x^2) + e^x(2 + 2x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$$

$$y''(0) > 0 \rightarrow \text{En } x = 0 \text{ s'aconsegueix un mínim.}$$

$$y''(-2) < 0 \rightarrow \text{En } x = -2 \text{ s'aconsegueix un màxim.}$$

Així, en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$ la funció és creixent i en $(-2, 0)$ és decreixent.

d) $y = \frac{x-2+5x^2}{x} \rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R} - \{0\}$

$$y' = \frac{5x^2 + 2}{x^2} > 0 \rightarrow \text{Funció creixent en tot el domini.}$$

No té extrems relatius.

- 065 Calcula els màxims i els mínim absoluts de la funció $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ en l'interval $[1, 4]$. Justifica que els punts trobats són màxims o mínim absoluts.

(Activitat de Selectivitat)

Els valors de la funció en els extrems de l'interval són $(1, 5)$ i $(4, 5)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = 3$$

• En $(1, 3) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

• En $(3, 4) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

En $(3, 1)$ aconsegueix un mínim relatiu, que com que és l'únic en $[1, 4]$ és, a més, mínim absolut, i en $(1, 5)$ i $(4, 5)$ aconsegueix dos màxims absoluts, perquè es tracta dels extrems de l'interval i en tots dos $f(x)$ agafa el mateix valor.

- 066 Donada la funció $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, determina'n els intervals de creixement i decreixement.

(Activitat de Selectivitat)

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$f'(x) = \frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2+1}{(1-x^2)^2} > 0 \rightarrow f(x) \text{ és creixent en tot el domini.}$$

Així doncs, els intervals de creixement són: $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

067 Considera la funció de variable real $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x - 4}$.

a) Determina'n els intervals de creixement i decreixement.

b) Troba'n els extrems relatius.

(Activitat de Selectivitat)

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{4\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 8x - 20}{(x - 4)^2} = 0 \rightarrow x = -2, x = 10$$

- En $(-\infty, -2) \cup (10, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent
- En $(-2, 4) \cup (4, 10) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

b) En $x = -2$ s'aconsegueix un màxim que té com a coordenades $(-2, 1)$.

En $x = 10$ s'aconsegueix un mínim que té com a coordenades $(10, 25)$.

068 Donada la funció real de variable real definida per $f(x) = \frac{(x - 3)^2}{x + 3}$, calcula'n els màxims i els mínims i determina'n els intervals de creixement i decreixement.

(Activitat de Selectivitat)

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 6x - 27}{(x + 3)^2} = 0 \rightarrow x = -9, x = 3$$

- En $(-\infty, -9) \cup (3, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent
- En $(-9, -3) \cup (-3, 3) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

En $x = -9$ s'aconsegueix un màxim que té com a coordenades $(-9, -24)$.

En $x = 3$ s'aconsegueix un mínim que té com a coordenades $(3, 0)$.

069 Comprova que la derivada en el punt $x = -1$ de la funció $f(x) = (x + 1)^3$ és nul·la i, tot i així, no té un extrem relatiu.

$f'(x) = 3(x + 1)^2 \rightarrow f'(-1) = 0$, però, $f'(x) > 0$ per a tot valor real de x ; per tant, f sempre és creixent i no pot tenir cap extrem relatiu en $x = -1$.

Això no contradiu el teorema: «Si una funció és derivable en un punt i hi té un extrem, aleshores la derivada és zero», perquè el cas recíproc no té per què ser cert, és a dir, si la derivada en un punt és zero, això no garanteix que la funció tingui un extrem en aquest punt.

070 Comprova que la funció següent té un extrem relatiu en el punt $x = 0$ i la seva derivada en aquest punt no és nul·la.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Com que f és positiva en $\mathbb{R} - \{0\}$ i val -1 en $x = 0 \rightarrow$ en aquest punt assoleix un mínim. D'altra banda, f no és derivable en $x = 0$.

Això no contradiu el teorema enunciat a l'activitat anterior perquè com que la funció no és derivable, no podem aplicar el teorema.

Aplicacions de la derivada

071 Considera la funció:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{x}{3} & \text{si } x \in (-6, -1) \\ x - 1 & \text{si } x \in [-1, 4] \end{cases}$$

Calcula els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$ per als valors $x \in (-6, -1)$.

(Activitat de Selectivitat)

$$f'(x) = \frac{-3}{x^2} + \frac{1}{3} = 0 \rightarrow -9 + x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$$

- En $(-6, -3) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent
- En $(-3, -1) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

072 Una empresa de compra i venda d'automòbils ha efectuat un estudi sobre els beneficis/pèrdues, en milers d'euros, al llarg dels últims 10 anys i ha comprovat que s'ajusten a la funció:

$$F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3 \quad \text{si } 0 \leq t \leq 10$$

Et demanem, justificant la resposta:

- En quins anys es produeixen els valors màxim i mínim d'aquesta funció?
- Determina'n els períodes de creixement i decreixement.
- Quins són els seus beneficis màxims?
- Quins resultats va obtenir l'empresa en l'últim any de l'estudi?

(Activitat de Selectivitat)

- F és contínua en $[0, 10]$ perquè es tracta d'una funció polinòmica.
 $F'(t) = 3t^2 - 36t + 81 = 0 \rightarrow t = 3, t = 9$
 $F''(t) = 6t - 36$
 $F''(3) = 18 - 36 = -18 < 0 \rightarrow$ En $t = 3$ s'aconsegueix un màxim.
 $F''(9) = 54 - 36 = 18 > 0 \rightarrow$ En $t = 9$ s'aconsegueix un mínim.
Així doncs, el valor màxim de la funció s'aconsegueix al cap de 3 anys, i el mínim, al cap de 9 anys.
- Períodes de creixement: $(0, 3) \cup (9, 10)$
Període de decreixement: $(3, 9)$
- $F(3) = 27 - 162 + 243 - 3 = 105$
El benefici puja a 105.000 €.
- $F(10) = 1.000 - 1.800 + 810 - 3 = 7$
És a dir, l'empresa va obtenir un benefici de 7.000 €.

073 Per a cada valor de a es considera la funció $f(x) = \frac{3x^2 - ax}{x + 2}$.

Calcula el valor de a perquè $f(x)$ tingui un mínim relatiu en $x = 2$.

(Activitat de Selectivitat)

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 12x - 2a}{(x+2)^2}$$

Perquè hi hagi un mínim en $x = 2$ s'ha de complir que:

$$f'(2) = 0 \rightarrow \frac{12 + 24 - 2a}{16} = 0 \rightarrow 36 - 2a = 0 \rightarrow a = 18$$

- 074 Troba els valors de a i b perquè la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + x + 1$ tingui un màxim en el punt $x = 1$ i un mínim en el punt $x = 2$.

(Activitat de Selectivitat)

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$$

$$f'(1) = 0 \rightarrow 3a + 2b + 1 = 0$$

$$f'(2) = 0 \rightarrow 12a + 4b + 1 = 0$$

$$\begin{cases} 3a + 2b + 1 = 0 \\ 12a + 4b + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow a = \frac{1}{6}, b = \frac{-3}{4}$$

- 075 Segui la funció $f(x) = x - \frac{k}{x}$. Determina el valor de k de manera que la funció tingui un màxim en $x = -1$.

En la funció determinada d'aquesta manera, troba:

- El domini de definició.
- Els intervals de creixement i de decreixement de la funció, i també els màxims i els mínims.

(Activitat de Selectivitat)

$$f'(x) = 1 + \frac{k}{x^2} \rightarrow f'(-1) = 0 \rightarrow 1 + k = 0 \rightarrow k = -1$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

• En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

• En $(-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

En $x = -1$ aconseguim un màxim amb aquestes coordenades: $(-1, -2)$;

i en $x = 1$, un mínim amb aquestes coordenades: $(1, 2)$.

- 076 Troba els paràmetres r , s i t perquè la funció $f(x) = x^3 - rx^2 + sx + t$ tingui un màxim en $x = -2$, un mínim en $x = 0$ i passi pel punt $(1, -1)$.

(Activitat de Selectivitat)

$$\text{Passa per } (1, -1) \rightarrow 1 - r + s + t = -1 \rightarrow -r + s + t = -2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2rx + s$$

$$\text{Té un màxim en } x = -2 \rightarrow f'(-2) = 0 \rightarrow 12 + 4r + s = 0$$

$$\text{Té un mínim en } x = 0 \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow s = 0$$

$$\text{Per tant, resulta: } \begin{cases} -r + t = -2 \\ 12 + 4r = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} r = -3 \\ t = -5 \end{cases} \rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$$

Aplicacions de la derivada

- 077 Troba els valors de a , b i c en la funció $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si saps que la seva tangent en el punt $(1, 1)$ és la recta $y = -x + 2$ i que té un extrem en el punt $(0, 2)$.

(Activitat de Selectivitat)

Passa per $(1, 1) \rightarrow 1 = a + b + c + d$

Passa per $(0, 2) \rightarrow d = 2$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c \rightarrow y'(1) = 3a + 2b + c$

S'ha de verificar que: $y'(1) = -1 \rightarrow 3a + 2b + c = -1$

Té un extrem en el punt $(0, 2) \rightarrow y'(0) = 0 \rightarrow c = 0$

Per tant, resulta:
$$\left. \begin{array}{l} a + b + 2 = 1 \\ 3a + 2b = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases} \rightarrow y = x^3 - 2x^2 + 2$$

- 078 Una entitat financera llença al mercat un pla d'inversió la rendibilitat del qual, R , en euros ve donada per $R(x) = -0,01x^2 + 5x + 2.500$, en què x és la quantitat que s'inverteix.

- a) Quant ha d'invertir un inversor si vol obtenir una rendibilitat màxima?
b) Calcula aquesta rendibilitat màxima.

(Activitat de Selectivitat)

a) $R'(x) = -0,02x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{0,02} \rightarrow x = 250$

$R''(x) = -0,02 < 0 \rightarrow$ En $x = 250$ la funció aconsegueix un màxim.

Així doncs, per obtenir una rendibilitat màxima ha d'invertir 250 €.

b) $R(250) = -625 + 1.250 + 2.500 = 3.125$ € és la rendibilitat màxima.

- 079 En la construcció d'un túnel, el percentatge de roca fragmentada o de mala qualitat ve donat pel model matemàtic següent:

$$R(x) = \frac{x^3}{3} - 4,5x^2 + 18x + 15 \quad \text{si } 0 \leq x \leq 7$$

$R(x)$ representa aquest percentatge quan la distància a la boca del túnel és x (en quilòmetres).

Si en algun tram de la perforació el percentatge supera el 40 %, s'hauran de reforçar les mesures de sosteniment i seguretat de l'estructura.

- a) Indica en quins trams de la perforació el percentatge creix i en quins trams decreix.
b) Assenyala els màxims i els mínims (absoluts i relatius) i els punts d'inflexió de la corba.

(Activitat de Selectivitat)

a) $R'(x) = x^2 - 9x + 18 = 0 \rightarrow x = 3, x = 6$

• En $(0, 3) \rightarrow R'(x) > 0 \rightarrow R(x)$ creixent

• En $(3, 6) \rightarrow R'(x) < 0 \rightarrow R(x)$ decreixent

• En $(6, 7) \rightarrow R'(x) > 0 \rightarrow R(x)$ creixent

Per tant, el percentatge creix en i de creix en $(3, 6)$.

$$b) R''(x) = 2x - 9 = 0 \rightarrow x = \frac{9}{2} = 4,5$$

$R'''(x) = 2 \neq 0 \rightarrow$ En $x = 4,5$ hi ha un punt d'inflexió.

Dels intervals de creixement i de decreixement que hem obtingut, i a partir del valor de la funció en $[0, 7]$, deduïm que:

- En $x = 3$ s'aconsegueix un màxim relatiu i, a més, com que $R(3) = 37,5$, aquest punt és el màxim absolut de la funció. Té com a coordenades $(3, 37,5)$.
- En $x = 6$ s'aconsegueix un mínim relatiu que té com a coordenades $(6, 33)$.
- En $x = 0$, com que $R(0) = 15$, s'aconsegueix el mínim absolut de la funció. Té com a coordenades $(0, 15)$.

- 080 Un article de consum va estar a la venda durant 8 anys, i el seu preu $P(t)$ (en milers d'euros) va variar amb el temps t (en anys) que portava al mercat segons la funció:

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -\frac{5}{2}t + 25 & \text{si } 2 < t \leq 8 \end{cases}$$

Esbrina en quin moment es van assolir els preus màxim i mínim i quins van ser aquests preus.

(Activitat de Selectivitat)

En $t = 2$ la funció és contínua, perquè es compleix que:

$$P(2) = P(2^-) = 16 + 4 = 20 \qquad P(2^+) = \frac{-5}{2} \cdot 2 + 25 = 20$$

Per tant, la funció és contínua en $(0, 8)$.

$$P'(t) = \begin{cases} 8t & \text{si } 0 < t < 2 \\ -\frac{5}{2} & \text{si } 2 < t < 8 \end{cases}$$

- En $(0, 2) \rightarrow P'(t) > 0 \rightarrow P(t)$ creixent
- En $(2, 8) \rightarrow P'(t) < 0 \rightarrow P(t)$ decreixent

$$P(0) = 4 \qquad P(2) = 16 + 4 = 20 \qquad P(8) = -20 + 25 = 5$$

El preu mínim es va aconseguir al començament de la venda, i va ser de 4.000 €; el preu màxim es va aconseguir quan feia 2 anys que es venia el producte, i va ser de 20.000 €.

- 081 El rendiment dels treballadors d'una fàbrica (valorat en una escala de 0 a 100), durant una jornada de 8 hores, ve donat per la funció:

$$r(t) = \begin{cases} -10t^2 + 60t & \text{si } 0 \leq t < 4 \\ 80 & \text{si } 4 \leq t < 6 \\ 170 - 15t & \text{si } 6 \leq t \leq 8 \end{cases}$$

en què t és el temps en hores.

- Determina'n els intervals de creixement i decreixement. Quin és el rendiment màxim?
- En quins instants de la jornada laboral el rendiment se situa a la meitat de l'escala?

(Activitat de Selectivitat)

Aplicacions de la derivada

a) En $t = 4$ la funció és contínua, perquè es compleix que:

$$r(4^-) = -160 + 240 = 80 \quad r(4) = r(4^+) = 80$$

En $t = 6$ la funció és contínua, perquè es compleix que:

$$r(6^-) = 80 \quad r(6) = r(6^+) = 80$$

Així doncs, la funció és contínua en $(0, 8)$.

$$r'(t) = \begin{cases} -20t + 60 & \text{si } 0 < t < 4 \\ 0 & \text{si } 4 < t < 6 \\ -15 & \text{si } 6 < t < 8 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ En } (0, 4) \rightarrow r'(t) = 0 \rightarrow -20t + 60 = 0 \rightarrow t = 3$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{En } (0, 3) \rightarrow r'(t) > 0 \rightarrow r(t) \text{ creixent} \\ \text{En } (3, 4) \rightarrow r'(t) < 0 \rightarrow r(t) \text{ decreixent} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ En } (4, 6) \rightarrow r'(t) = 0 \rightarrow r(t) \text{ constant}$$

$$\bullet \text{ En } (6, 8) \rightarrow r'(t) < 0 \rightarrow r(t) \text{ decreixent}$$

Per tant, el rendiment màxim s'aconsegueix quan $t = 3$, i té un valor de 90.

b) El rendiment se situa a la meitat de l'escala si $r(t) = 50$. D'aquesta manera, pot passar que:

$$\bullet -10t^2 + 60t - 50 = 0 \rightarrow -t^2 + 6t - 5 = 0 \rightarrow t = 1, t = 5$$

En aquest cas, només és vàlida la solució $t = 1$, perquè l'altra solució no és a $(0, 4)$.

$$\bullet 170 - 15t = 50 \rightarrow 170 - 50 = 15t \rightarrow t = 8$$

Així doncs, el rendiment se situa a la meitat de l'escala quan hagin passat 1 o 8 hores.

082 L'oferta d'un bé si en coneixem el preu, p , és:

$$S(p) = \begin{cases} 30p + 200 & \text{si } 0 \leq p \leq 10 \\ p^2 - 60p + 1.000 & \text{si } 10 < p \leq 40 \end{cases}$$

Digues per a quin valor del preu s'assoleixen l'oferta màxima i la mínima.

(Activitat de Selectivitat)

En $p = 10$ la funció és contínua, perquè es compleix que:

$$S(10) = S(10^-) = 500 \quad S(10^+) = 500$$

Per tant, la funció és contínua en $(0, 40)$.

$$S'(p) = \begin{cases} 30 & \text{si } 0 < p < 10 \\ 2p - 60 & \text{si } 10 < p < 40 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ En } (0, 10) \rightarrow S'(p) > 0 \rightarrow S(p) \text{ creixent}$$

$$\bullet \text{ En } (10, 40) \rightarrow S'(p) = 0 \rightarrow 2p - 60 = 0 \rightarrow p = 30$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{En } (10, 30) \rightarrow S'(p) < 0 \rightarrow S(p) \text{ decreixent} \\ \text{En } (30, 40) \rightarrow S'(p) > 0 \rightarrow S(p) \text{ creixent} \end{cases}$$

$$S(0) = 200$$

$$S(10) = 500$$

$$S(30) = 100$$

$$S(40) = 200$$

L'oferta màxima s'aconsegueix per a un valor del preu de 10, i l'oferta mínima s'aconsegueix per a un valor del preu de 30.

- 083 La distància (en milles) entre un vaixell de pesca que va sortir a pescar durant un període de 10 dies i el seu port base ve donada per la funció:

$$M(t) = \begin{cases} 36 - (2t - 6)^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 5 \\ 4(10 - t) & \text{si } 5 < t \leq 10 \end{cases}$$

en què t és el temps transcorregut, en dies, des de la sortida del port base.

- Després de quants dies és màxima la distància del vaixell al port?
A quantes milles es trobava?
- Durant quins períodes augmentava la distància al port base?
En quins períodes disminuïa?
- A partir de quin dia, després d'assolir la distància màxima, es trobava a menys de 12 milles del port base?

(Activitat de Selectivitat)

- a) En $t = 5$ la funció és contínua, perquè es compleix que:

$$M(5) = M(5^-) = 36 - 16 = 20 \quad M(5^+) = 20$$

$$M'(t) = \begin{cases} -2(2t - 6) & \text{si } 0 < t < 5 \\ -4t & \text{si } 5 < t < 10 \end{cases}$$

- En $(0, 5) \rightarrow M'(t) = 0 \rightarrow -4t + 12 = 0 \rightarrow t = 3$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{En } (0, 3) \rightarrow M'(t) > 0 \rightarrow M(t) \text{ creixent} \\ \text{En } (3, 5) \rightarrow M'(t) < 0 \rightarrow M(t) \text{ decreixent} \end{cases}$$

- En $(5, 10) \rightarrow M'(t) < 0 \rightarrow M(t) \text{ decreixent}$

$$M(0) = 36 - 36 = 0 \quad M(3) = 36 \quad M(5) = 36 - 16 = 20 \quad M(10) = 0$$

La distància del vaixell de pesca al port base és màxima al cap de 3 dies, i es trobava a 36 milles.

- La distància al port base augmentava en el període $(0, 3)$ i disminuïa en els períodes $(3, 5)$ i $(5, 10)$.
- Com que en $(3, 5)$ la funció és decreixent i $M(5) = 20$, el dia que busquem estarà entre 5 i 10.

$$M(t) < 12 \rightarrow 4(10 - t) < 12 \rightarrow 10 - t < 3 \rightarrow 7 < t \rightarrow \text{A partir del dia 7 es trobava sempre a menys de 12 milles de distància del port base.}$$

- 084 Determina els intervals de concavitat i de convexitat, i també els punts d'inflexió, de les funcions següents:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 4$

d) $y = \frac{x^3 - 8}{x^2}$

b) $y = x^4 + 2x^3 - 3$

e) $y = \sqrt{9 + x^2}$

c) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

f) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

- a) La funció és contínua en $\mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6x + 2 = 0$$

$$y'' = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$$

- En $(-\infty, 1) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava
- En $(1, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

Així, doncs, en $x = 1$ assolim un punt d'inflexió.

Aplicacions de la derivada

b) La funció és contínua en $\mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 + 6x^2$$

$$y'' = 12x^2 + 12x = 0 \rightarrow x = 0, x = -1$$

• En $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

• En $(-1, 0) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

Així, doncs, en $x = -1$ i $x = 0$ assoleix punts d'inflexió.

c) La funció és contínua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$y' = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3} \neq 0 \rightarrow \text{No té punts d'inflexió.}$$

Així, doncs, els intervals en els quals hem d'estudiar la curvatura són:

$(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$

• En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

• En $(-1, 1) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

d) La funció és contínua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$y' = \frac{x^3 + 16}{x^3}$$

$$y'' = \frac{-48}{x^4} < 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \text{Funció còncava}$$

No té punts d'inflexió.

e) La funció està definida en $\mathbb{R}$.

$$y' = \frac{x}{\sqrt{9 + x^2}}$$

$$y'' = \frac{9}{(9 + x^2)\sqrt{9 + x^2}} > 0 \text{ en } \mathbb{R} \rightarrow \text{Funció convexa}$$

No té punts d'inflexió.

f) La funció està definida en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$y'' = \frac{-4}{(x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 4}} < 0 \text{ en tot el domini} \rightarrow \text{Funció còncava}$$

No té punts d'inflexió.

085 Estudia en quins intervals aquestes funcions són còncaves i en quins són convexes. Calcula també els punts d'inflexió que tingui cadascuna.

a) $y = (x - 3)e^x$

e) $y = \frac{x^2}{2^x}$

b) $y = \frac{\ln x}{2x}$

f) $y = \sqrt{x^2 - x}$

c) $y = \cos x - \cos 2x$

g) $y = \frac{x}{e^x}$

d) $y = \ln(x^2 - x)$

a) La funció és contínua en $\mathbb{R}$.

$$y' = (x-2)e^x \quad y'' = (x-1)e^x = 0 \rightarrow x = 1$$

- En $(-\infty, 1) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava
- En $(1, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

En $x = 1$ assoleix un punt d'inflexió.

b) La funció és contínua en $(0, +\infty)$.

$$y' = \frac{1 - \ln x}{2x^2}$$

$$y'' = \frac{2 \ln x - 3}{2x^3} = 0 \rightarrow \ln x = \frac{3}{2} \rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \rightarrow x = \sqrt{e^3}$$

- En $(0, \sqrt{e^3}) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava
- En $(\sqrt{e^3}, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

En $x = \sqrt{e^3}$ assoleix un punt d'inflexió.

c) La funció és contínua en $\mathbb{R}$.

$$y' = -\sin x + 2 \sin 2x$$

$$y'' = -\cos x + 4 \cos 2x = -\cos x + 4(\cos^2 x - \sin^2 x) = \\ = -\cos x + 4(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) = 8 \cos^2 x - \cos x - 4 = 0$$

Les solucions aproximades són:

$$\cos x = 0,77 \rightarrow x = 0,69 + 2k\pi; x = 5,59 + 2k\pi \text{ amb } k \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = -0,65 \rightarrow x = 2,28 + 2k\pi; x = 3,79 + 2k\pi \text{ amb } k \in \mathbb{R}$$

Estudiem la concavitat en $(0, 2\pi)$ perquè la funció és periòdica:

- En $(0; 0,69) \cup (2,28; 3,79) \cup (5,59; 2\pi) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa
- En $(0,69; 2,28) \cup (3,79; 5,59) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

Així, doncs, tots els punts que anul·len y'' són punts d'inflexió.

d) La funció està definida en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

$$y' = \frac{2x-1}{x^2-x}$$

$$y'' = \frac{-2x^2 + 2x - 1}{(x^2 - x)^2} < 0 \text{ en tot el domini} \rightarrow \text{Funció còncava}$$

No té punts d'inflexió.

e) La funció és contínua en $\mathbb{R}$.

$$y' = \frac{2x - x^2 \ln 2}{2^x}$$

$$y'' = \frac{2 - 4x \ln 2 + x^2 \ln^2 2}{2^x} = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{\ln 2}$$

- En $\left(-\infty, \frac{2 - \sqrt{2}}{\ln 2}\right) \cup \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{\ln 2}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

- En $\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{\ln 2}, \frac{2 + \sqrt{2}}{\ln 2}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

En $x = \frac{2 - \sqrt{2}}{\ln 2}$ i $x = \frac{2 + \sqrt{2}}{\ln 2}$ assoleix dos punts d'inflexió.

Aplicacions de la derivada

f) La funció està definida en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

$$y' = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

$$y'' = \frac{4\sqrt{x^2-x} - \frac{(2x-1)^2}{\sqrt{x^2-x}}}{4(x^2-x)} = \frac{4(x^2-x) - (4x^2+1-4x)}{4(x^2-x)\sqrt{x^2-x}} = \frac{-1}{4(x^2-x)\sqrt{x^2-x}} \neq 0 \rightarrow \text{No hi ha punts d'inflexió.}$$

A més, és negativa en tot el domini i, per tant, sempre és còncava.

g) La funció està definida en $\mathbb{R}$.

$$y' = \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} = \frac{1-x}{e^x}$$

$$y'' = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{e^{2x}} = \frac{-2+x}{e^x} = 0 \rightarrow x = 2$$

• En $(-\infty, 2) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

• En $(2, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

En $x = 2$ hi ha un punt d'inflexió.

086 Comprova que la funció $f(x) = -7x^4$ té nul·la la derivada segona en el punt $x = 0$ i, tot i així, no té un punt d'inflexió.

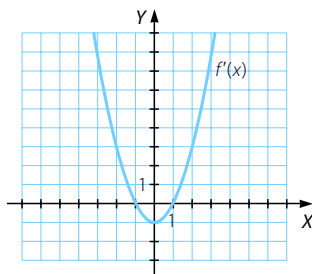
$$f(x) = -7x^4 \quad f'(x) = -28x^3 \quad f''(x) = -84x^2 \rightarrow f''(0) = 0$$

En $x = 0$ no s'aconsegueix un punt d'inflexió, perquè $f''(x) < 0$ per a qualsevol valor real de x . Així doncs, la funció sempre és còncava.

087 La derivada d'una funció f és $f'(x) = x^2 - 1$.

Representa gràficament f' i dedueix d'aquesta gràfica els intervals de creixement i de concavitat de f .

(Activitat de Selectivitat)



• En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

• En $(-1, 1) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

Així doncs, en $x = -1$ s'aconsegueix un màxim, i en $x = 1$, un mínim.

$f'(0) = 0$, perquè $f'(x)$ presenta un mínim en $x = 0$.

• En $(-\infty, 0) \rightarrow f'(x)$ decreixent $\rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ còncava

• En $(0, +\infty) \rightarrow f'(x)$ creixent $\rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa

Per tant, en $x = 0$ hi ha un punt d'inflexió.

- 088** Volem afegir a una casa una altra habitació rectangular de 12 m^2 de superfície. Determina quina longitud han de tenir les parets perquè el perímetre sigui el més petit possible i minimitzar la quantitat de maons que farem servir en aquesta ampliació.

Si x i y són les dimensions, tenim que: $xy = 12 \rightarrow y = \frac{12}{x}$

Com que la nova habitació serà un afegit de la casa, una de les parets hi ha de coincidir; d'aquesta manera, no necessitem cap maó, perquè ja està construïda.

Per tant, hem de minimitzar: $P(x, y) = 2x + y \rightarrow P(x) = 2x + \frac{12}{x}$

$$P'(x) = 2 - \frac{12}{x^2} = \frac{2x^2 - 12}{x^2} = 0 \rightarrow x = -\sqrt{6}, x = \sqrt{6}$$

Com que una longitud no pot ser negativa, tenim que: $x = \sqrt{6} \rightarrow y = 2\sqrt{6}$

Comprovem que en aquest punt s'assoleix un mínim:

$$P''(x) = \frac{24}{x^3} \rightarrow P''(\sqrt{6}) > 0 \rightarrow \text{Es tracta d'un mínim.}$$

Les dimensions de l'habitació són $x = \sqrt{6} \text{ m}$ i $y = 2\sqrt{6} \text{ m}$.

- 089** Volem delimitar una parcel·la rectangular, enganxada a la paret d'una nau. Si disposen de 200 m de filat per fer la tanca, digues quines són les dimensions de la parcel·la que té la superfície més gran.

Anomenem x i y les dimensions de la parcel·la. Com que estarà enganxada a la paret de la nau, s'ha de complir que: $2x + y = 200 \rightarrow y = 200 - 2x$

Es tracta de maximitzar la funció superfície, determinada per:

$$S(x) = xy \rightarrow S(x) = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$$

$$S'(x) = 200 - 4x = 0 \rightarrow x = 50$$

$$S''(x) = -4 < 0 \text{ en } \mathbb{R} \rightarrow \text{En } x = 50 \text{ assoleix un màxim.}$$

Les dimensions de la parcel·la són: $x = 50 \text{ m}$ i $y = 100 \text{ m}$.

- 090** Determina quines dimensions ha de tenir un paraigüer amb forma de prisma quadrat de 20 dm^3 de volum perquè a l'hora de fabricar-lo es gastí la quantitat de material més petita possible.

Anomenem x l'aresta de la base i y l'altura del prisma quadrangular.

$$\text{Aleshores, s'ha de complir que: } x^2 y = 20 \rightarrow y = \frac{20}{x^2}$$

Com que un paraigüer no té base superior, hem de minimitzar la funció superfície, que està determinada per:

$$S(x, y) = x^2 + 4xy \rightarrow S(x) = x^2 + 4x \frac{20}{x^2} = x^2 + \frac{80}{x}$$

$$S'(x) = 2x - \frac{80}{x^2} = \frac{2x^3 - 80}{x^2} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{40}$$

$$S''(x) = 2 + \frac{160}{x^3} \rightarrow S''(\sqrt[3]{40}) > 0 \rightarrow \text{Se assoleix un mínim.}$$

Les dimensions del paraigüer són:

$$\text{Aresta de la base } x = \sqrt[3]{40} \text{ dm}$$

$$\text{Altura } y = \frac{20}{(\sqrt[3]{40})^2} = \frac{20}{\sqrt[3]{1.600}} \text{ dm}$$

Aplicacions de la derivada

091 Digues si tots els cilindres amb el mateix volum tenen també la mateixa superfície total. Quin té la superfície més petita?

Considerem r i h les dimensions del radi de la base i de l'altura del cilindre.

Si $V(r, h)$ és el volum:

$$V(r, h) = \pi r^2 h \rightarrow h = \frac{V(r, h)}{\pi r^2}$$

La superfície del cilindre que hem de minimitzar està determinada per:

$$S(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V(r, h)}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V(r, h)}{r}$$

Com que el volum sempre és el mateix, derivem respecte de r :

$$S'(r, h) = 4\pi r - \frac{2V(r, h)}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V(r, h)}{r^2} = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V(r, h)}{2\pi}}$$

$$S''(r, h) = 4\pi + \frac{4V(r, h)}{r^3} \rightarrow S''\left(\sqrt[3]{\frac{V(r, h)}{2\pi}}\right) > 0 \rightarrow S \text{ aconsegueix un mínim.}$$

Així, doncs, no tots els cilindres amb el mateix volum tenen també la mateixa superfície total, i el que té la superfície més petita és d'aquestes dimensions:

$$r = \sqrt[3]{\frac{V(r, h)}{2\pi}} \quad h = \sqrt[3]{\frac{4V(r, h)}{\pi}}$$

092 De tots els cilindres que podem inscriure en una esfera de 9 cm de radi, troba l'altura i el radi del que té el volum més gran.

Anomenem x el radi de la base del cilindre i y la meitat de la seva altura, així: $R = 9$.

Es verifica que:

$$x^2 + y^2 = R^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 81 \rightarrow y = \sqrt{81 - x^2}$$

La funció que hem de maximitzar és:

$$V(x, y) = \pi x^2 h \text{ on } h = 2y.$$

$$V(x, y) = 2\pi x^2 y \rightarrow V(x) = 2\pi x^2 \sqrt{81 - x^2} = 2\pi \sqrt{81x^4 - x^6}$$

$$V'(x) = \frac{2\pi(324x^3 - 6x^5)}{2\sqrt{81x^4 - x^6}} = \frac{\pi(324x^3 - 6x^5)}{\sqrt{81x^4 - x^6}} = 0 \rightarrow x = 0, x = \sqrt{54}$$

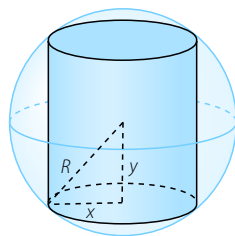
- En $(0, \sqrt{54}) \rightarrow V'(x) > 0 \rightarrow V(x)$ creixent
- En $(\sqrt{54}, +\infty) \rightarrow V'(x) < 0 \rightarrow V(x)$ decreixent

Per tant, en $x = \sqrt{54}$ aconsegueix un màxim.

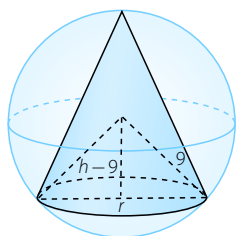
Així, doncs, l'altura i el radi del cilindre de més volum que podem inscriure en una esfera de radi 9 cm és:

$$\text{Radi: } \sqrt{54} \text{ cm}$$

$$\text{Altura: } 2\sqrt{81 - 54} = 2\sqrt{27} \text{ cm}$$



- 093 De tots els cons que podem inscriure en una esfera de 9 cm de radi, determina l'altura i el radi del que té el volum més gran.



Anomenem r i h el radi i l'altura del con.

Es compleix que:

$$r^2 + (h - 9)^2 = 81$$

$$r^2 = 81 - (h - 9)^2 = -h^2 + 18h$$

La funció que hem d'optimitzar és:

$$V(r, h) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h \rightarrow V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi (-h^2 + 18h) h = \frac{1}{3} \cdot \pi (-h^3 + 18h^2)$$

$$V'(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi (-3h^2 + 36h) = \pi (-h^2 + 12h) = 0 \rightarrow h = 0, h = 12$$

$$V''(h) = \pi (-2h + 12)$$

$$V''(0) > 0 \rightarrow \text{Per a } h = 0 \text{ assoleix un mínim.}$$

$$V''(12) < 0 \rightarrow \text{Per a } h = 12 \text{ assoleix un màxim.}$$

Així, doncs, el con que té el volum més gran és el que té una altura de 12 cm i un radi de la base $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$ cm.

- 094 Amb un tros de filferro de 12 cm de longitud podem formar diferents rectangles. Digues quin d'aquests rectangles té la superfície màxima.

Considerem x i y les dimensions del rectangle, de manera que:

$$2x + 2y = 12 \rightarrow x + y = 6$$

Així, doncs, la funció que hem de maximitzar és: $S(x) = x(6 - x) = 6x - x^2$

$$S'(x) = 6 - 2x = 0 \rightarrow x = 3$$

$$S''(x) = -2 < 0 \rightarrow \text{En } x = 3 \text{ assoleix un màxim.}$$

Per tant, les dimensions del rectangle de superfície màxima són 3 i 3, és a dir, un quadrat de costat 3 cm.

- 095 Troba dos nombres que sumin 20 si saps que el seu producte és màxim.

(Activitat de Selectivitat)

Considerem x i y els dos nombres que busquem. Es compleix que:

$$x + y = 20 \rightarrow y = 20 - x$$

$$P(x, y) = xy \rightarrow P(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

$$P'(x) = 20 - 2x = 0 \rightarrow x = 10$$

$P''(x) = -2 < 0 \rightarrow$ En $x = 10$ s'aconsegueix un màxim i, per tant, els nombres són $x = 10$ i $y = 10$.

Aplicacions de la derivada

096 Considera la funció següent:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$$

Escriu l'equació de la recta tangent a la gràfica d'aquesta funció que té màxim pendent en l'interval $[1, e]$.

Com que necessitem que el pendent sigui màxim, la funció que hem d'optimitzar és la funció derivada primera:

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2-x}{x^3} = 0 \rightarrow x = 2$$

$$f'''(x) = \frac{2x-6}{x^4} \rightarrow f'''(2) < 0 \rightarrow \text{En } x = 2 \text{ assoleix un màxim.}$$

$$f(2) = \frac{1}{2} + \ln 2 \rightarrow \text{L'equació de la recta tangent en el punt } \left(2, \frac{1}{2} + \ln 2\right)$$

$$\text{amb pendent } f'(2) = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4} \text{ és:}$$

$$y - \left(\frac{1}{2} + \ln 2\right) = \frac{1}{4}(x - 2)$$

097 Digues en quin punt de la paràbola $y = 4 - x^2$ la tangent forma amb els eixos de coordenades un triangle d'àrea mínima.

La funció de l'enunciat representa una paràbola amb vèrtex a l'eix Y , per la qual cosa hi ha d'haver dues solucions simètriques respecte d'aquest eix, una al primer quadrant i una altra al segon. Considerem $(a, 4 - a^2)$ un punt de la paràbola del primer quadrant.

$$y' = -2x \rightarrow y'(a) = -2a \rightarrow \text{L'equació de la recta tangent a la paràbola en el punt } (a, 4 - a^2) \text{ és: } y - (4 - a^2) = -2a(x - a) \rightarrow y = -2ax + a^2 + 4$$

$$\text{Els punts d'intersecció d'aquesta recta amb els eixos són: } (0, a^2 + 4) \text{ i } \left(\frac{a^2 + 4}{2a}, 0\right).$$

L'àrea del triangle que es forma amb aquests punts i el punt $(0, 0)$ és:

$$A(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + 4}{2a} (a^2 + 4) = \frac{(a^2 + 4)^2}{4a} \text{ que és la funció que hem d'optimitzar.}$$

$$A'(a) = \frac{16a^2(a^2 + 4) - 4(a^2 + 4)^2}{16a^2} = \frac{3a^4 + 8a^2 - 16}{4a^2} = 0 \rightarrow a = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ és la solució del primer quadrant.}$$

$$A''(a) = \frac{4a^2(12a^3 + 16a) - 8a(3a^4 + 8a^2 - 16)}{16a^4} = \frac{3a^4 + 16}{2a^3} \rightarrow A''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) > 0$$

$$\text{En } \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{8}{3}\right) \text{ la tangent forma amb els eixos un triangle d'àrea mínima.}$$

098 Determina el punt de la paràbola $y = x^2$ que es troba més pròxim al punt $(3, 0)$.

Considerem (x, y) el punt de la paràbola que busquem. La distància d'aquest punt al punt $(3, 0)$ està determinada per: $d = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2}$

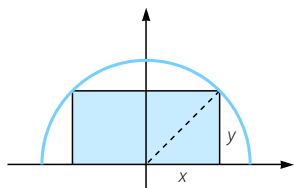
La funció que hem d'optimitzar és: $D = d^2 = (x-3)^2 + y^2 \rightarrow D(x) = (x-3)^2 + x^4$

$D'(x) = 2(x-3) + 4x^3 = 0 \rightarrow x = 1$ és l'única solució real.

$D''(x) = 2 + 12x^2 \rightarrow D''(1) > 0 \rightarrow$ En $x = 1$ assoleix un mínim.

Així, doncs, el punt que busquem és $(1, 1)$.

099 Determina les dimensions dels costats d'un rectangle d'àrea màxima que està inscrit en una semicircumferència de 5 cm de radi, i que té un dels costats sobre el diàmetre d'aquesta semicircumferència.



Considerem x la meitat de la base del rectangle i y l'altura. Es compleix que:

$$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$$

La funció que hem d'optimitzar és:

$$A(x) = 2x\sqrt{25 - x^2} = 2\sqrt{25x^2 - x^4}$$

$$A'(x) = \frac{50x - 4x^3}{\sqrt{25x^2 - x^4}} = 0 \rightarrow 50x - 4x^3 = 0 \rightarrow x = 0, x = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{En } \left(0, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow A'(x) > 0 \text{ i en } \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \rightarrow A'(x) < 0$$

Per tant, en $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ assoleix un màxim.

Així, doncs, les dimensions del rectangle d'àrea màxima són: $x = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm

i $y = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm, és a dir, es tracta d'un quadrat.

100 Entre tots els rectangles de 3 m^2 d'àrea, troba les dimensions del que tingui mínim el producte de les diagonals.

Considerem x i y les dimensions del rectangle, de manera que: $xy = 3$.

La funció que hem d'optimitzar està determinada per:

$$P = d \cdot d = d^2 = x^2 + y^2 \rightarrow P(x) = x^2 + \left(\frac{3}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{9}{x^2}$$

$$P'(x) = 2x - \frac{18}{x^3} = 0 \rightarrow 2x^4 - 18 = 0 \rightarrow x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$$

La solució vàlida és: $x = \sqrt{3}$

$$P''(x) = 2 + \frac{54}{x^4} \rightarrow P''(\sqrt{3}) > 0 \rightarrow \text{En aquest punt assoleix un mínim.}$$

Les dimensions són $x = \sqrt{3}$ i $y = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, és a dir, un quadrat de costat $\sqrt{3}$ m.

Aplicacions de la derivada

- 101 De tots els triangles isòsceles inscrits en una circumferència de 5 cm de radi, troba les dimensions del que té l'àrea més gran.

Anomenem x la meitat de la base del triangle, i $y + 5$ l'altura. Es verifica que:

$$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow x = \sqrt{25 - y^2}$$

La funció que hem d'optimitzar està determinada per:

$$A(y) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{25 - y^2} (y + 5) = (y + 5)\sqrt{25 - y^2}$$

$$A'(y) = \sqrt{25 - y^2} + (y + 5) \cdot \frac{-2y}{2\sqrt{25 - y^2}} = \frac{25 - y^2 - y^2 - 5y}{\sqrt{25 - y^2}} = 0$$

$$\rightarrow -2y^2 - 5y + 25 = 0 \rightarrow y = -5, y = \frac{5}{2}$$

La solució vàlida és la positiva.

• En $\left(-5, \frac{5}{2}\right) \rightarrow A'(y) > 0 \rightarrow$ Funció creixent

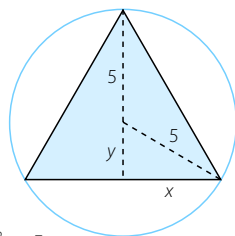
• En $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right) \rightarrow A'(y) < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

Així, doncs, en $y = \frac{5}{2}$ assoleix un màxim.

Per tant, les dimensions del triangle d'àrea més gran són:

$$\text{Base: } 2x = 2 \cdot \frac{\sqrt{75}}{2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

$$\text{Altura: } y + 5 = \frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}$$



- 102 El perímetre d'un triangle isòsceles fa 10 m. Si gira al voltant de l'altura que correspon al costat desigual, genera un con.

Calcula els costats del triangle perquè el volum del con sigui màxim.

Pel teorema de Pitàgores:

$$r^2 + h^2 = g^2 \rightarrow h = \sqrt{g^2 - r^2}$$

Com que el perímetre del triangle és 10 m, tenim que:

$$2g + 2r = 10 \rightarrow g + r = 5 \rightarrow g = 5 - r$$

Així, doncs, si substituïm en l'expressió de l'altura obtenim:

$$h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{(5 - r)^2 - r^2} = \sqrt{25 + r^2 - 10r - r^2} = \sqrt{25 - 10r}$$

La funció que hem d'optimitzar és:

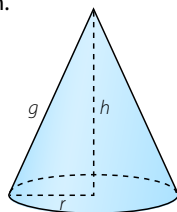
$$V(r, h) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h \rightarrow V(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \sqrt{25 - 10r} = \frac{\pi}{3} \sqrt{25r^4 - 10r^5}$$

$$V'(r) = \frac{\pi(100r^3 - 50r^4)}{6\sqrt{25r^4 - 10r^5}} = 0 \rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 2 \end{cases}$$

La solució vàlida és $r = 2$.

Així, doncs, les dimensions del triangle són:

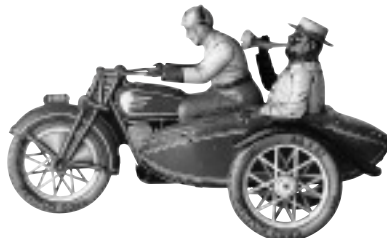
Base: 4 m Costats: 3 m



- 103 Un taller artesanal està especialitzat en la producció d'un tipus de joguines. Els costos de fabricació, $C(x)$, en euros, estan relacionats amb el nombre de joguines fabricades, x , mitjançant l'expressió:

$$C(x) = 10x^2 - 1.850x + 25.000$$

El preu de venda de cada joguina és de 50 €.



- Planteja la funció d'ingressos que obté el taller amb la venda de les joguines produïdes.
- Planteja la funció de beneficis, entesos com la diferència entre ingressos i costos de fabricació.
- Quantes joguines ha de fabricar per maximitzar beneficis?
A quant pujaran aquests beneficis?

(Activitat de Selectivitat)

a) $I(x) = 50x$

b) $B(x) = I(x) - C(x) = 50x - (10x^2 - 1.850x + 25.000) =$
 $= -10x^2 + 1.900x - 25.000$

c) $B'(x) = -20x + 1.900 = 0 \rightarrow x = \frac{1.900}{20} = 95$

$B''(x) = -20 < 0 \rightarrow$ En $x = 95$ s'aconsegueix un màxim.

$B(95) = -90.250 + 180.500 - 25.000 = 65.250$

Així doncs, per maximitzar beneficis ha de vendre 95 joguines.

Aquests beneficis pugen a $B(95) = 65.250$ €.

- 104 La funció $B(x) = \frac{-x^2 + 9x - 16}{x}$ representa, en milers d'euros, el benefici net d'un procés de venda, en què x és el nombre d'articles venuts. Calcula el nombre d'articles que s'han de vendre per obtenir el benefici màxim i determina aquest benefici màxim.

(Activitat de Selectivitat)

$$B(x) = \frac{-x^2 + 9x - 16}{x} \rightarrow B'(x) = \frac{-x^2 + 16}{x^2} = 0 \rightarrow -x^2 + 16 = 0 \rightarrow x = \pm 4$$

La solució vàlida és $x = 4$ (l'altra no té sentit)

El benefici màxim serà: $B(4) = \frac{-(4^2) + 9 \cdot 4 - 16}{4} = \frac{4}{4} = 1.$

Així doncs, el benefici màxim és de 1.000 €

Aplicacions de la derivada

- 105 Volen fabricar amb llauna una paperera cilíndrica, sense tapa, de 10 dm^3 de capacitat. Determina quines dimensions ha de tenir perquè utilitzin per fabricar-la la menor quantitat possible de llauna.

Si r i h són el radi i l'altura del cilindre: $\pi r^2 h = 10 \rightarrow h = \frac{10}{\pi r^2}$

La funció que hem d'optimitzar és:

$$S(r, h) = \pi r^2 + 2\pi r h \rightarrow S(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{10}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{20}{r}$$

$$S'(r) = 2\pi r - \frac{20}{r^2} = 0 \rightarrow 2\pi r^3 - 20 = 0 \rightarrow \pi r^3 - 10 = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$$

$$S''(r) = 2\pi + \frac{40}{r^3} \rightarrow S''\left(\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}\right) > 0 \rightarrow \text{En } r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \text{ asoleix un mínim.}$$

Per tant, per utilitzar la menor quantitat possible de llauna, les dimensions

de la paperera cilíndrica han de ser $r = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \text{ dm}$ i $h = \sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \text{ dm}$.

- 106 Determina com han de ser tres nombres reals positius perquè sumin 100, la suma del primer més dues vegades el segon més tres vegades el tercer sigui 200 i el seu producte sigui al més gran possible.

(Activitat de Selectivitat)

Anomenem x , y i z els nombres que busquem.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ x + 2y + 3z = 200 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 100 - y - z \\ x = 200 - 2y - 3z \end{array} \right\} \rightarrow 100 - y - z = 200 - 2y - 3z$$

$$100 - y - z = 200 - 2y - 3z \rightarrow y = 100 - 2z$$

$$\text{Per tant, resulta: } x = 100 - (100 - 2z) - z = 2z - z = z$$

$$P(x, y, z) = xyz \rightarrow P(z) = z(100 - 2z)z = 100z^2 - 2z^3$$

$$P'(z) = 200z - 6z^2 = z(200 - 6z) = 0 \rightarrow z = 0, z = \frac{200}{6} = \frac{100}{3}$$

$$P''(z) = 200 - 12z \rightarrow P''\left(\frac{100}{3}\right) < 0 \rightarrow \text{En } z = \frac{100}{3} \text{ s'aconsegueix un màxim.}$$

$$\text{Així doncs, tenim que: } x = \frac{100}{3} \quad y = 100 - \frac{200}{3} = \frac{100}{3} \quad z = \frac{100}{3}$$

- 107 Troba les dimensions d'una cartolina rectangular de 60 cm de perímetre que, quan fa una volta completa al voltant d'un costat, genera un cilindre de volum màxim.

Hem d'optimitzar la funció $V(r, h) = \pi r^2 h$, en què r és el radi i h és l'altura del cilindre. La cartolina rectangular, per les condicions de l'enunciat, ha de tenir dimensions h, r , i per això s'ha de complir que:

$$2h + 2r = 60 \rightarrow h + r = 30 \rightarrow h = 30 - r$$

$$\text{Així, } V(r) = \pi r^2(30 - r) = 30\pi r^2 - \pi r^3$$

$$V'(r) = 60\pi r - 3\pi r^2 = 0 \rightarrow r = 0, r = 20$$

La solució vàlida és $r = 20$.

$$V''(r) = 60\pi - 6\pi r \rightarrow V''(20) < 0 \rightarrow \text{En } r = 20 \text{ asoleix un màxim.}$$

Així, doncs, les dimensions de la cartolina per aconseguir el cilindre de volum màxim són: $r = 20 \text{ cm}$ i $h = 10 \text{ cm}$.

- 108 Una fàbrica de televisors ven cada aparell a 300 €. Les despeses derivades de fabricar x televisors són $D(x) = 200x + x^2$, on $0 \leq x \leq 80$.
- Suposant que es venguin tots els televisors que es fabriquen, troba la funció dels beneficis que s'obtenen després de fabricar i vendre x televisors.
 - Determina el nombre d'aparells que convé fabricar per obtenir el benefici màxim, i determina, també, aquest benefici.

(Activitat de Selectivitat)

$$a) B(x) = 300x - D(x) = 300x - (200x + x^2) = 100x - x^2, \text{ en què } 0 \leq x \leq 80$$

$$b) B'(x) = 100 - 2x = 0 \rightarrow x = 50$$

$$B''(x) = -2 < 0 \rightarrow \text{En } x = 50 \text{ s'aconsegueix un màxim.}$$

$$B(50) = 5.000 - 2.500 = 2.500$$

Així doncs, per obtenir el benefici màxim han de fabricar 50 televisors; aquest benefici és de 2.500 €.

- 109 S'ha determinat que el cost total, en euros, que suposa per a una empresa la producció de n unitats d'un article varia segons la funció $C(n) = 2n^3 + 270n + 2.048$.

Determina, justificant la resposta:

- La funció que defineix el cost per unitat produïda.
- El nombre d'unitats que han de produir-se per fer mínim el cost per unitat.
- El valor d'aquest cost mínim per unitat.

(Activitat de Selectivitat)

$$a) f(n) = \frac{2n^3 + 270n + 2.048}{n}$$

$$b) f'(n) = \frac{4n^3 - 2.048}{n^2} = 0 \rightarrow 4n^3 = 2.048 \rightarrow n^3 = 512 \rightarrow n = 8$$

$$f''(n) = \frac{4n^3 + 4.096}{n^3} \rightarrow f''(8) > 0 \rightarrow \text{En } n = 8 \text{ s'aconsegueix un mínim.}$$

Per tant, per fer mínim el cost per unitat s'han de produir 8 unitats.

$$c) f(8) = \frac{1.024 + 2.160 + 2.048}{8} = 654$$

El valor del cost mínim per unitat és de 654 €.

- 110 Es vol organitzar una competició esportiva que consisteix a nadar des d'un lloc A, situat a la vora d'un riu, fins a un altre lloc B situat a la mateixa riba; allà se surt del riu i s'ha d'anar corrent fins a un altre lloc C, des del qual es torna altre cop a B, on acaba la competició. Se suposa que tots els trajectes són rectilinis. La distància de C a A és de 10 km i la distància de C al riu és de 6 km.

Determina a quina distància de A s'ha de situar el punt B perquè el recorregut complet sigui el menor possible.

Aplicacions de la derivada

$$d = x + y$$

$$100 = 36 + d^2 \rightarrow d^2 = 64 \rightarrow d = 8$$

$$y = 8 - x \rightarrow d^2(B, C) = 36 + (8 - x)^2$$

$$\rightarrow d^2(B, C) = 36 + 64 + x^2 - 16x = x^2 - 16x + 100$$

Podem expressar la distància recorreguda de la manera següent:

$$E(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 16x + 100}$$

$$E'(x) = 1 + \frac{2x - 16}{\sqrt{x^2 - 16x + 100}} = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 - 16x + 100} = 16 - 2x$$

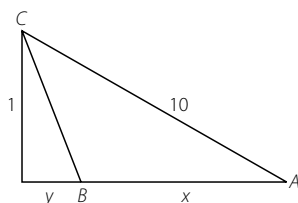
$$\rightarrow x^2 - 16x + 100 = 256 + 4x^2 - 64x$$

$$\rightarrow 3x^2 - 48x - 156 = 0 \rightarrow x = 11,46; x = 4,54$$

De les dues solucions només és vàlida $x = 4,54$.

A l'esquerra de 4,54: $E'(x) < 0 \rightarrow E(x)$ decreixent, i a la dreta: $E'(x) > 0$

$\rightarrow E(x)$ creixent. Així, en $x = 4,54$ s'aconsegueix un mínim; per tant, perquè el trajecte sigui el més curt possible cal situar B a 4,54 km de A .



111 La funció de cost total de producció de x unitats d'un producte

és $C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 6x + 192$. Es defineix la funció de cost mitjà per unitat

com $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$. A quin nivell de producció serà mínim el cost mitjà per unitat?

(Activitat de Selectivitat)

$$\bar{C}(x) = \frac{\frac{1}{3}x^2 + 6x + 192}{x}$$

$$\bar{C}'(x) = \frac{\frac{1}{3}x^2 - 192}{x^2} = \frac{x^2 - 576}{3x^2} = 0 \rightarrow x^2 = 576 \rightarrow x = \pm 24. \text{ Només és vàlida}$$

la solució positiva, perquè no es pot produir un nombre negatiu d'unitats.

$$\bar{C}''(x) = \frac{384}{x^3} \rightarrow \bar{C}''(24) > 0 \rightarrow \text{En } x = 24 \text{ s'aconsegueix un mínim.}$$

El cost mitjà per unitat serà mínim quan es produeixin 24 unitats.

112 Troba un nombre xy tal que la suma de les seves xifres sigui 12 i de manera que la suma del cub de la xifra de les desenes i del triple del quadrat de la xifra de les unitats sigui al més petita possible.

(Activitat de Selectivitat)

$$x + y = 12 \rightarrow y = 12 - x$$

La funció que hem de minimitzar és: $S(x, y) = x^3 + 3y^2 \rightarrow S(x) = x^3 + 3(12 - x)^2$

$$S'(x) = 3x^2 - 6(12 - x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 72 + 6x = 0 \rightarrow x = -6, x = 4$$

$$S''(x) = 6x + 6$$

$S''(-6) < 0 \rightarrow \text{En } x = -6 \text{ s'aconsegueix un màxim.}$

$S''(4) > 0 \rightarrow \text{En } x = 4 \text{ s'aconsegueix un mínim.}$

Així doncs, les xifres del nombre que busquem són: $x = 4, y = 8$.

Per tant, el nombre és 48.

- 113 Descompon de manera raonada el nombre 90 en dos sumands de manera que el resultat de sumar el quadrat del primer i el doble del segon sigui mínim.

(Activitat de Selectivitat)

$$x + y = 90 \rightarrow y = 90 - x$$

Hem de minimitzar aquesta funció:

$$S(x, y) = x^2 + 2y \rightarrow S(x) = x^2 + 2(90 - x) = x^2 + 180 - 2x = x^2 - 2x + 180$$

$$S'(x) = 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$S''(x) = 2 > 0 \rightarrow \text{En } x = 1 \text{ s'aconsegueix un mínim.}$$

Així doncs, els dos sumands que busquem són $x = 1$ i $y = 89$.

- 114 Un venedor de pòlisses d'assegurances té un sou fix de 1.000 €, més una comissió que ve donada per la funció $17x - 0,0025x^3$, en què x representa el nombre de pòlisses venudes. Si el venedor té mensualment una despesa general de 200 € més una altra de 5 € per pòlissa contractada, calcula el nombre de pòlisses que ha de contractar mensualment perquè el seu guany sigui màxim. A quant puja aquest guany?

(Activitat de Selectivitat)

$$\text{Sou: } 1.000 + 17x - 0,0025x^3 \quad \text{Despesa: } 200 + 5x$$

$$\text{Guany: } G(x) = 1.000 + 17x - 0,0025x^3 - 200 - 5x = -0,0025x^3 + 12x + 800$$

$$G'(x) = -0,0075x^2 + 12 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{12}{0,0075} = 1.600 \rightarrow x = \pm 40$$

$$G''(x) = -0,015x \rightarrow G''(40) < 0 \rightarrow \text{Perquè el guany sigui màxim ha de contractar mensualment 40 pòlisses.}$$

$$G(40) = 1.120 \rightarrow \text{El guany obtingut puja a 1.120 €.}$$

- 115 Suposa que a casa hi ha un bany amb dutxa i un amb banyera. Els cabdals d'aigua que surten per la dutxa i per l'aixeta de la banyera són, respectivament, de 12 litres/minut i de 9,6 litres/minut. Si decideixes banyar-te, has de tenir oberta l'aixeta durant 10 minuts perquè s'ompli la banyera. L'aigua calenta ve d'un termos elèctric i escalfar-la fins a la temperatura que t'agrada val 0,01 € per litre. L'aigua de la dutxa s'escalfa amb un escalfador de gas i escalfar-la fins a aquesta temperatura val 0,8 cèntims d'euro per litre. Quant temps pot durar una dutxa perquè surti més barat que banyar-se?



(Activitat de Selectivitat)

A la banyera entren $10 \cdot 9,6 = 96$ litres d'aigua.

Omplir la banyera costa: $96 \cdot 0,01 = 0,96$ €.

Si x és la quantitat de minuts que l'aixeta de la dutxa està oberta, la funció de la despesa està determinada per: $G(x) = 12 \cdot 0,008x = 0,096x$

El màxim d'aquesta funció ha de ser més petit que 0,96.

$$G(x) = 0,0096x < 0,96 \rightarrow x < \frac{0,96}{0,0096} \rightarrow x < 100$$

Els costos de la dutxa i el bany s'igualarien al cap de 100 minuts.

Aplicacions de la derivada

- 116 Una discoteca obre les portes a les 10 de la nit sense cap client, i les tanca quan ja han marxat tots. Suposa que la funció que representa el nombre de clients, n , en funció del nombre d'hores que porta oberta, t , és $N(t) = 80t - 10t^2$.

- a) Determina a quina hora el nombre de clients és màxim. Quants clients hi ha en aquest moment?
- b) A quina hora tancarà la discoteca?

(Activitat de Selectivitat)

a) $N'(t) = 80 - 20t = 0 \rightarrow t = 4$

$N'(t) = -20 < 0 \rightarrow$ Per a $t = 4$ s'aconsegueix un màxim.

$N(4) = 320 - 160 = 160$

Per tant, el nombre de clients és màxim al cap de 4 hores d'ençà que obren la discoteca, i en aquell moment hi ha 160 clients.

- b) La discoteca tancarà quan no hi quedi cap client.

$N(t) = 0 \rightarrow 80t - 10t^2 = 0 \rightarrow t(80 - 10t) = 0 \rightarrow t = 0, t = 8$

La discoteca tancarà després de 8 hores de ser oberta, és a dir, a les 6 de la matinada.

- 117 El benefici obtingut per una empresa, en milers d'euros, ve donat per la funció:

$$f(x) = \begin{cases} -5x^2 + 40x - 60 & \text{si } 0 \leq x \leq 6 \\ \frac{5x}{2} - 15 & \text{si } 6 < x \leq 10 \end{cases}$$

en què x representa la despesa en publicitat, en milers d'euros.

- a) Calcula la despesa en publicitat a partir de la qual l'empresa no té pèrdues.
- b) Calcula la despesa en publicitat que produeix màxim benefici.
Quin és aquest benefici màxim?

(Activitat de Selectivitat)

a) En $x = 6$ la funció és contínua: $f(6) = f(6^-) = 0$ $f(6^+) = 15 - 15 = 0$

$$f'(x) = \begin{cases} -10x + 40 & \text{si } 0 < x < 6 \\ \frac{5}{2} & \text{si } 6 < x < 10 \end{cases}$$

• En $(0, 6) \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow -10x + 40 = 0 \rightarrow x = 4$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{En } (0, 4) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ creixent} \\ \text{En } (4, 6) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ decreixent} \end{cases}$$

• En $(6, 10) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

$f(0) = -60$ $f(4) = 20$ $f(6) = 0$ $f(10) = 10$

$-5x^2 + 40x - 60 = 0 \rightarrow x = 2, x = 6$

Així doncs, la funció és negativa en $(0, 2)$ i és positiva en $(2, 6)$.

També és positiva en $(6, 10)$.

Per tant, l'empresa no té pèrdues a partir d'una despesa en publicitat de 2.000 €.

- b) La despesa en publicitat que produeix el benefici màxim és 4.000 €, i aquest benefici és de 20.000 €.

PREPARA LA SELECTIVITAT

(Activitats de Selectivitat)

- 1 Considera la corba d'equació $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$.

Escriu l'equació de la recta tangent a aquesta corba en el punt d'abscissa $x = 1$.

$$f(1) = \frac{1}{2} \qquad f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow f'(1) = \frac{4}{4} = 1$$

$$\text{Equació de la recta tangent: } y - \frac{1}{2} = x - 1 \rightarrow y = x - \frac{1}{2}$$

- 2 Donada la funció $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$, calcula:

- El pendent de la recta tangent a la gràfica de f en el punt d'abscissa $x = -1$.
- Els intervals de creixement i els de decreixement.
- Els màxims relatius i els mínims relatius. Què val la funció f en aquests punts?

a) $f'(x) = 3x^2 + 6x$

$$f'(-1) = 3 - 6 = -3 \rightarrow \text{El pendent és } -3.$$

b) $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow x(3x + 6) = 0 \rightarrow x = 0, x = -2$

- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

- En $(-2, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

c) • En $x = -2$ s'aconsegueix un màxim i $f(-2) = 0$.

- En $x = 0$ s'aconsegueix un mínim i $f(0) = -4$.

- 3 Considera la funció $f(x) = \frac{x^2}{a - bx}$, en què a i b són paràmetres reals.

- Determina els valors dels paràmetres a i b per als quals $f(2) = -4$ i la recta tangent a la gràfica de $f(x)$ en $x = 6$ és horitzontal.
- Per a $a = 1$ i $b = -1$, raona quin és el domini de $f(x)$ i determina'n els intervals de concavitat i convexitat i els punts d'inflexió de $f(x)$.

a) $f(2) = -4 \rightarrow \frac{4}{a - 2b} = -4 \rightarrow 4 = -4a + 8b \rightarrow 1 = -a + 2b$

$$f'(x) = \frac{2x(a - bx) - x^2(-b)}{(a - bx)^2} = \frac{2xa - 2bx^2 + bx^2}{(a - bx)^2} = \frac{2xa - bx^2}{(a - bx)^2}$$

$$f'(6) = 0 \rightarrow \frac{12a - 36b}{(a - 6b)^2} = 0 \rightarrow 12a - 36b = 0 \rightarrow a = 3b$$

$$1 = -3b + 2b \rightarrow 1 = -b \rightarrow b = -1 \rightarrow a = -3$$

b) $f(x) = \frac{x^2}{1 + x} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} \qquad f''(x) = \frac{2}{(x + 1)^3} \neq 0 \rightarrow \text{No presenta punts d'inflexió.}$$

- En $(-\infty, -1) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ còncava

- En $(-1, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa

Aplicacions de la derivada

- 4 L'atenció davant d'un anunci de televisió (en una escala del 0 al 100) de 3 minuts de durada es comporta segons la funció $A(t) = -10t^2 + 40t + 40$, amb $0 \leq t \leq 3$.

- a) A quants minuts de l'inici de l'anunci es presta la màxima atenció?
b) Quan acaba l'anunci, en quin punt de l'escala d'atenció s'està?
c) En quin punt de l'escala d'atenció s'està quan han passat 90 segons?

a) $A'(t) = -20t + 40 = 0 \rightarrow t = \frac{40}{20} = 2$

$A''(t) = -20 < 0 \rightarrow$ En $t = 2$ s'aconsegueix un màxim.

Al cap de 2 minuts de l'inici de l'anunci es presta la màxima atenció; el valor és de 80.

b) $t = 3 \rightarrow A(3) = -90 + 120 + 40 = 70$

En una escala del 0 al 100, s'està en el punt 70.

c) $90 \text{ s} = 1,5 \text{ min} \rightarrow A(1,5) = -22,5 + 60 + 40 = 77,5$

En una escala del 0 al 100, s'està en el punt 77,5.

- 5 Determina les condicions més econòmiques d'una piscina oberta a l'aire, de 32 m^3 de volum amb un fons quadrat, de manera que la superfície de les parets i del terra necessiti la quantitat mínima de material.

Considerem x el costat de la base i y la profunditat de la piscina; es compleix que:

$$x^2 y = 32 \rightarrow y = \frac{32}{x^2}$$

$$S(x, y) = x^2 + 4xy \rightarrow S(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}$$

$$S'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^3 - 128 = 0 \rightarrow x^3 = 64 \rightarrow x = 4$$

$$S''(x) = 2 + \frac{256}{x^3} \rightarrow S''(4) > 0 \rightarrow \text{En } x = 4 \text{ s'aconsegueix un mínim.}$$

$$x = 4 \rightarrow y = \frac{32}{16} = 2$$

Així doncs, cada costat de la base de la piscina ha de fer 4 metres i la profunditat ha de ser de 2 metres.

- 6 Una fira de bestiar està oberta des de les 10 fins a les 20 hores. S'ha comprovat que el nombre de visitants diaris queda determinat, com a funció de l'hora del dia, mitjançant l'expressió $N(t) = -20(A - t)^2 + B$, si $10 \leq t \leq 20$.

Si saps que a les 17 hores assoleix el nombre màxim de 1.500 visitants, determina les constants A i B . Justifica la resposta.

$$\begin{aligned} N(17) &= -20(A - 17)^2 + B = 1.500 \rightarrow -20(A^2 + 289 - 34A) + B = 1.500 \\ &\rightarrow -20A^2 - 5.780 + 680A + B = 1.500 \\ &\rightarrow -20A^2 + 680A + B = 7.280 \end{aligned}$$

$$N'(t) = 40(A - t) \rightarrow N'(17) = 40(A - 17) = 0 \rightarrow A - 17 = 0 \rightarrow A = 17$$

$$-20 \cdot 289 + 11.560 + B = 7.280 \rightarrow B = 7.280 - 11.560 + 5.780 \rightarrow B = 1.500$$

- 7 S'estima que els beneficis mensuals d'una fàbrica de dolços, en milers d'euros, vénen donats per la funció $f(x) = -0,1x^2 + 2,5x - 10$, quan es venen x tones de producte.

- Calcula la quantitat de tones que han de vendre per obtenir el benefici màxim i calcula'l. Justifica que és màxim.
- Calcula la quantitat mínima que han de vendre per no tenir pèrdues.
- Quina quantitat produeix el màxim benefici per tona venuda? Calcula el benefici màxim i justifica que és màxim.

$$a) f'(x) = -0,2x + 2,5 = 0 \rightarrow x = \frac{2,5}{0,2} = 12,5$$

$f''(x) = -0,2 < 0 \rightarrow$ En $x = 12,5$ s'aconsegueix un màxim.

$$f(12,5) = -15,625 + 31,25 - 10 = 5,625$$

Per obtenir el benefici màxim han de vendre 12 tones i mitja. Aquest benefici és de 5,625 milers d'euros.

- Estudiem quan el benefici és 0, perquè aleshores no hi haurà pèrdues.

$$f(x) = 0 \rightarrow -0,1x^2 + 2,5x - 10 = 0 \rightarrow x = 5, x = 20$$

Per tant, la quantitat mínima que han de vendre és 5 tones.

- La funció que ens dona el benefici per tona venuda és:

$$g(x) = \frac{-0,1x^2 + 2,5x - 10}{x}$$

$$g'(x) = \frac{-0,1x^2 + 10}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = \frac{10}{0,1} = 100 \rightarrow x = \pm 10$$

$$g''(x) = \frac{-20}{x^3}$$

$g''(-10) > 0 \rightarrow$ En $x = -10$ s'aconsegueix un mínim.

$g''(10) < 0 \rightarrow$ En $x = 10$ s'aconsegueix un màxim.

Per produir el benefici màxim per tona venuda han de vendre 10 tones.

$$g(10) = \frac{5}{10} = 0,5$$

Així doncs, el benefici serà de 500 €.

10 Representació de funcions

LITERATURA I MATEMÀTIQUES

L'home, la femella i la fam

A Cuba anomenen *boles* els rumors, tant si són certs com falsos. Es tracta d'una sinonímia per associació, perquè les boles, igual que els rumors, corren, s'esmunyen, salven esculls, alenteixen la marxa o l'augmenten segons el terreny, i arriben als racons més insospitats.

En un indret on se sap que les notícies oficials no són mai el que semblen i no semblen mai el que són, el paper de les boles agafa un especial significat. La societat s'assabenta del que passa per mitjà de les boles. I la teoria sobre la velocitat amb la qual s'estenen els rumors aconsegueix dimensions còsmiques, amb un temps rècord de distribució que es podria resumir en la fórmula $V_p = 3 \times i$, en què 3 és el terme mitjà mínim de persones a les quals s'acostuma a explicar una notícia, i designaria el factor d'importància que una notícia determina té per als interessats, i V_p , la velocitat amb la qual es propaga aquest rumor.

L'Havana hauria de ser un cas perquè l'estudiessin les Nacions Unides... i no tan sols perquè el seu barri històric l'hagin declarat patrimoni de la humanitat. En aquesta ciutat de dos milions i mig d'habitants, una bola amb factor i molt alt que sortís a rodar a les set del matí, ja és coneguda per les quatre cinques parts d'aquella població abans de les deu.

Això va passar, per exemple, quan es va estendre el rumor que l'ambaixada del Canadà, situada a la bella mansió de la Setena Avinguda, a Miramar, donava visats de sortida a tothom qui volgués treballar a les mines d'Austràlia. Analitzada sota el prisma del seny, podria semblar impossible que una idea així se l'hagin pogut prendre seriosament ni tan sols deu persones; però en aquesta olla de grills que és l'illa, es tracta d'un tipus de rumors que desencadenen una resposta espontània, enèrgica i molt més massiva que quan obliguen la població a marxar a la plaça, amb el somriure als llavis, sota pena de perdre els seus llocs de treball. La desesperació és la mare del deliri. No és estrany, per això, que qualsevol rumor –per absurd que sigui– provoqui l'aglomeració de milers de persones, i creï el consegüent caos en la vida pública.

DAÍNA CHAVIANO

L'home, la femella i la fam

Daina Chaviano

En aquesta novel·la no surt cap més referència a les matemàtiques que la d'aquest paràgraf. Però n'hi ha un exemple paradigmàtic en una novel·la de Jardiel Poncela titulada *Amor se escribe sin hache*. Allà trobem una escena en la qual aquest llenguatge serveix a l'autor per descriure el comportament absurd del protagonista i el seu caràcter estrafolari. La Sylvia i en Zambombo arriben a una illa després que naufragués el vaixell en què viatjaven. Una vegada encesa una foguera admirable, en Zambombo va determinar construir una cabana.

—Sí, sí! —va aplaudir la Sylvia—. Una cabana... i tu, estimat... Ah! Que feliç que sóc!

En Zamb es va dirigir cap a l'entrada del bosc i va transportar a la platja uns quants arbres que jeien al terra abatuts, potser, per alguna tempesta. Va calcular la resistència dels arbres mesurant-ne el diàmetre i la longitud, i va escriure a la seva llibreta:

$$A + B = (A + B) - (A + B) \times (A + B) + (A + B)$$

Va elevar al quadrat el primer terme i, davant la seva sorpresa, que no es pensava que sabia tantes matemàtiques, va obtenir:

$$(A + B)^2 = (A + B) - (A + B) \times (A + B) + (A + B)$$

I substituint això per les xifres que havia esbrinat, va aconseguir: $73^2 = (10 + 10)$

La resistència dels troncs de l'arbre era de 730 quilograms.

Va posar els troncs recolzats entre ells, formant dos vèrtexs, en nombre de quinze. De manera que quan en Zamb i la Sylvia s'hi van posar a sota, els quilos d'arbre que els van caure a sobre, quan es va desplomar la cabana, van ser: 730×15 , o sigui: 10.950.

Tots dos es van desmaiar com a conseqüència del traumatisme. Quan van tornar en si, era de nit.*

* Podem calcular que, per cada 100 quilos que cauen al cap d'un ésser humà, queda desmaiat un minut. Com que en 10.950 quilos hi ha, aproximadament, 109 vegades 100 quilos, resulta que en Zambombo i la Sylvia van estar desmaiats durant 109 minuts, o sigui, dues hores menys onze minuts. No ens podem explicar, per tant, per què quan van tornar en si ja era de nit.

Jardiel Poncela fa servir aquí el llenguatge algebraic com un recurs humorístic, una aplicació *innovadora*, perquè en matemàtiques i en les altres ciències es fa servir per expressar propietats o per resoldre problemes.

Suposa que cada persona que sent un rumor el difon a nou persones en una hora. Escriu la fórmula de la funció que expressa el nombre de persones que coneixen el rumor en relació amb el temps que ha transcorregut. Representa-la gràficament i calcula les hores que calen perquè tota l'Havana s'assabenti de l'esdeveniment.

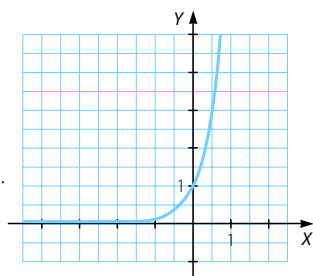
$f(t) = 9^t$ amb $t \in \mathbb{R}^+$ el nombre d'hores.

$f'(x) = 9^x \cdot \ln 9 > 0 \rightarrow f(x)$

No té màxims ni mínims.

$$9^t = 2.500.000 \rightarrow t = \log_9 2.500.000 = \frac{\ln 2.500.000}{\ln 9} = 6,7.$$

En menys de 7 hores, els habitants de l'Havana coneixeran l'esdeveniment.



Representació de funcions

ABANS DE COMENÇAR... RECORDA

001 Calcula aquests límits:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x + 7)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 8^{\frac{x^3 - x}{x+1}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x + 7}{x^2 + 3x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^5 + x^2}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 1)^{\frac{x^2 - 1}{x}}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x + 7) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^5 + x^2} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x + 7}{x^2 + 3x} = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 8^{\frac{x^3 - x}{x+1}} = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x} = 1$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 1)^{\frac{x^2 - 1}{x}} = +\infty$

002 Estudia la continuïtat d'aquesta funció i classifica'n els punts de discontinuïtat:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x-1} & \text{si } x < 2 \\ x^2 - x + 7 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

• Si $x < 2$: $\frac{x^2}{x-1} \rightarrow$ Funció racional, no definida en $x = 1$.

• Si $x \geq 2$: $x^2 - x + 7 \rightarrow$ Funció polinòmica, definida en $\mathbb{R}$.

Així, doncs, $f(x)$ està definida i és contínua en $\mathbb{R} - \{1, 2\}$. Estudiem la continuïtat en $x = 1$ i en $x = 2$:

• Si $x = 1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Discontinuitat de salt infinit}$$

• Si $x = 2$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x-1} = \frac{4}{1} = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - x + 7) = 4 - 2 + 7 = 9 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Discontinuitat de salt finit}$$

ACTIVITATS

001 Determina el domini i els punts de tall amb els eixos de les funcions següents: .

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

b) $f(x) = \sin x$

a) $f(x)$ està definida si $x^2 - 16 \geq 0 \rightarrow (x - 4)(x + 4) \geq 0$

$\rightarrow x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty) \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

• Talls amb l'eix X: $\sqrt{x^2 - 16} = 0 \rightarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4 \rightarrow (-4, 0), (4, 0)$

• Tall amb l'eix Y: no en té perquè $x = 0$ no es troba al domini.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

• Talls amb l'eix X:

$$\sin x = 0 \rightarrow x = 0 + k\pi \text{ amb } k \in \mathbb{Z} \rightarrow (0 + k\pi, 0) \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

• Tall amb l'eix Y:

$$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$$

002 Troba el domini i els punts de tall amb els eixos de les funcions següents:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 81}{x - 7}$

b) $f(x) = \log(x + 8)$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{7\}$

• Talls amb l'eix X:

$$\frac{x^2 - 81}{x - 7} = 0 \rightarrow x^2 = 81 \rightarrow x = \pm 9 \rightarrow (-9, 0), (9, 0)$$

• Tall amb l'eix Y:

$$x = 0 \rightarrow y = \frac{-81}{-7} = \frac{81}{7} \rightarrow \left(0, \frac{81}{7}\right)$$

b) $f(x)$ està definida quan $x + 8 > 0 \rightarrow x > -8 \rightarrow \text{Dom } f = (-8, +\infty)$

• Talls amb l'eix X:

$$\log(x + 8) = 0 \rightarrow x + 8 = 10^0 = 1 \rightarrow x = -7 \rightarrow (-7, 0)$$

• Tall amb l'eix Y:

$$x = 0 \rightarrow y = \log 8 \rightarrow (0, \log 8)$$

003 Estudia la simetria de les funcions següents:

a) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 25}$

b) $f(x) = -x^2 - 27$

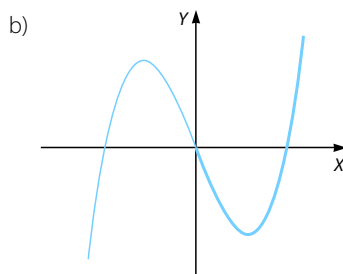
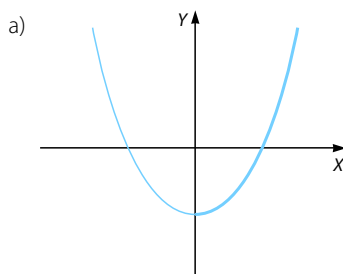
a) $f(-x) = \sqrt{2(-x)^2 - 25} = \sqrt{2x^2 - 25} = f(x) \rightarrow f(x)$ és simètrica respecte de l'eix Y.

b) $f(-x) = -(-x)^2 - 27 = -x^2 - 27 = f(x) \rightarrow f(x)$ és simètrica respecte de l'eix Y.

004 Dibuixa la gràfica d'una funció que sigui:

a) Parella.

b) Imparella.



Representació de funcions

005 Determina el període de les funcions següents:

a) $f(x) = \cos x$

b) $f(x) = \sin 2x$

a)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π	$\frac{9\pi}{2}$	5π
$f(x)$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1

La funció es repeteix amb període 2π : $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

b)

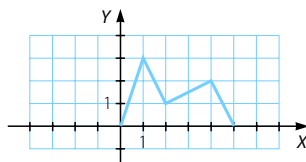
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
$f(x)$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0

La funció es repeteix amb període π : $\sin 2x = \sin(2x + k\pi)$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

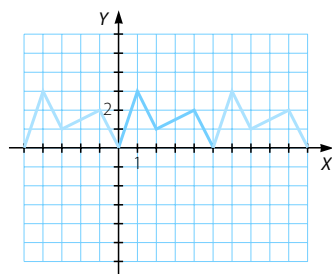
006 La funció que a cada nombre hi associa la seva part decimal, és periòdica? Si és així, quin període té?

Una funció que a cada nombre hi associa la seva part decimal és periòdica de període 1.

007 Representa una funció



Quin n'és el període?



El període d'aquesta funció és 5.

008 Escriu una funció que tingui com a asímptotes verticals les rectes amb les equacions següents:

a) $x = 4$ i $x = -2$

b) $x = 1$ i $x = 0$

Resposta oberta. Per exemple:

a) $f(x) = \frac{5}{(x-4)(x+2)}$

b) $f(x) = \frac{6x+3}{x(x-1)}$

009 Troba les asímptotes verticals d'aquestes funcions:

a) $f(x) = \log(x^2 - 16)$ b) $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$

a) $x^2 - 16 \geq 0 \rightarrow (x - 4)(x + 4) \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

Així, tenim que: $\text{Dom } f = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$

$\lim_{x \rightarrow -4^-} \log(x^2 - 16) = -\infty \rightarrow$ Asímtota vertical: $x = -4$

$\lim_{x \rightarrow 4^+} \log(x^2 - 16) = -\infty \rightarrow$ Asímtota vertical: $x = 4$

b) $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x - 1} = \infty \rightarrow$ Asímtota vertical: $x = 1$

010 Estudia si les funcions següents tenen asímptotes horitzontals:

a) $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ b) $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = 1 \rightarrow$ Asímtota horitzontal: $y = 1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{0}{0 + 1} = 0 \rightarrow$ Asímtota horitzontal: $y = 0$

b) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x - 1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x - 1} = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow f(x) \text{ no té asímptotes horitzontals.}$

011 Determina la situació de la gràfica respecte de les asímptotes horitzontals d'aquestes funcions:

a) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}}$ b) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}} = 1 \rightarrow$ Asímtota horitzontal: $y = 1$

• Si $x \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}} - 1 < 0 \rightarrow f(x)$ està per sota de l'asímtota.

• Si $x \rightarrow -\infty \rightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 3}} - 1 < 0 \rightarrow f(x)$ està per sota de l'asímtota.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow$ Asímtota horitzontal: $y = 0$

• Si $x \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{x}{x^2 - 1} - 0 > 0 \rightarrow f(x)$ està per sobre de l'asímtota.

• Si $x \rightarrow -\infty \rightarrow \frac{x}{x^2 - 1} - 0 < 0 \rightarrow f(x)$ està per sota de l'asímtota.

Representació de funcions

012 Estudia si les funcions següents tenen asímptotes obliques:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{-x^2+3}{x+2}$

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x-1)} = 1 \neq 0 \rightarrow m=1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1 \rightarrow n=1 \end{aligned} \right\}$$

→ Asímtota obliqua: $y = mx + n \rightarrow y = x + 1$

$$\left. \begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2+3}{x(x+2)} = -1 \neq 0 \rightarrow m=-1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-x^2+3}{x+2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2+3+x^2+2x}{x+2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+2x}{x+2} = 2 \rightarrow n=2 \end{aligned} \right\}$$

→ Asímtota obliqua: $y = mx + n \rightarrow y = -x + 2$

013 Determina la situació de la gràfica respecte de les asímptotes obliques d'aquestes funcions:

a) $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+5}$

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x(x-1)} = 1 \neq 0 \rightarrow m=1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{x-1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1} \right) = 1 \rightarrow n=1 \end{aligned} \right\}$$

→ Asímtota obliqua: $y = mx + n \rightarrow y = x + 1$

$$f(x) - (mx + n) = \frac{x^2+2}{x-1} - x - 1 = \frac{3}{x-1}$$

- Si $x \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{3}{x-1} > 0 \rightarrow f(x)$ està per sobre de l'asímtota.
- Si $x \rightarrow -\infty \rightarrow \frac{3}{x-1} < 0 \rightarrow f(x)$ està per sota de l'asímtota.

$$\left. \begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}}{x} = 1 \neq 0 \rightarrow m=1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+5} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5}+x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{x^2+5}+x} = 0 \end{aligned} \right\}$$

→ Asímtota obliqua: $y = x$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+5}}{x} = -1 \neq 0 \rightarrow m = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+5} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5}-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{\sqrt{x^2+5}-x} = 0 \end{aligned} \right\}$$

→ Asímtota obliqua: $y = -x$

• Si $x \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{5}{\sqrt{x^2+5}+x} > 0 \rightarrow f(x)$ està per sobre de l'asímtota $y = x$.

• Si $x \rightarrow -\infty \rightarrow \frac{5}{\sqrt{x^2+5}-x} > 0 \rightarrow f(x)$ està per sobre de l'asímtota $y = -x$.

014 Estudia si aquestes funcions presenten branques parabòliques:

a) $f(x) = x^4 - x^3 + 4$

b) $g(x) = x \ln x$

a) Funció polinòmica → Dom $f = \mathbb{R} \rightarrow$ No té asímtotes verticals.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - x^3 + 4) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - x^3 + 4) &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No té asímtotes horitzontals.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - x^3 + 4}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - x^3 + 4}{x} = -\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No té asímtotes obliques.}$$

Per tant, la funció té branques parabòliques quan $x \rightarrow +\infty$ i $x \rightarrow -\infty$.

b) Dom $g = (0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x \rightarrow 0 \cdot \infty \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

→ No té asímtotes verticals.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty \rightarrow \text{No té asímtotes horitzontals.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \rightarrow \text{No té asímtotes obliques.}$$

Per tant, la funció té una branca parabòlica quan $x \rightarrow +\infty$.

015 Determina les branques infinites de $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Dom $f = \mathbb{R} \rightarrow$ No té asímtotes verticals.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Asímtota horitzontal: } y = 0$$

Com que la funció té asímtota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$, no té asímtotes obliques ni tampoc branques parabòliques.

Representació de funcions

016 Estudia el creixement i el decreixement d'aquestes funcions, i calcula'n els màxims i els mínims:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{-x^2+3}{x+2}$

a) $x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x^2-2x=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

• En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

• En $(0, 1) \cup (1, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

$x=0 \rightarrow f(x)=0 \rightarrow (0, 0)$ Màxim $x=2 \rightarrow f(x)=4 \rightarrow (2, 4)$ Mínim

b) $x+2=0 \rightarrow x=-2 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$f'(x) = \frac{-x^2-4x-3}{(x+2)^2} = 0 \rightarrow -x^2-4x-3=0 \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$$

• En $(-3, -2) \cup (-2, -1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

• En $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

$x=-1 \rightarrow f(x)=2 \rightarrow (-1, 2)$ Màxim

$x=-3 \rightarrow f(x)=6 \rightarrow (-3, 6)$ Mínim

017 Estudia el creixement i el decreixement de les funcions següents, i troba'n els màxims i els mínims:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 15$

b) $f(x) = \sqrt{x^2+5}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x-3=0 \rightarrow x=\frac{3}{2}$$

• En $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

• En $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

$x=\frac{3}{2} \rightarrow f(x)=\frac{51}{4} \rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{51}{4}\right)$ Mínim

b) $x^2+5 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} = 0 \rightarrow x=0$$

• En $(-\infty, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

• En $(0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

$x=0 \rightarrow f(x)=\sqrt{5} \rightarrow (0, \sqrt{5})$ Mínim

018 Estudia la concavitat i la convexitat d'aquestes funcions, i calcula els punts d'inflexió:

a) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{-x^2+3}{x+2}$

a) $x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{No presenta punts d'inflexió.}$$

• En $(-\infty, 1) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ còncava

• En $(1, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa

b) $x+2=0 \rightarrow x=-2 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2}{(x+2)^3} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{No presenta punts d'inflexió.}$$

• En $(-\infty, -2) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa

• En $(-2, +\infty) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ còncava

019 Troba els intervals de concavitat i convexitat de les funcions següents, i comprova el resultat gràficament:

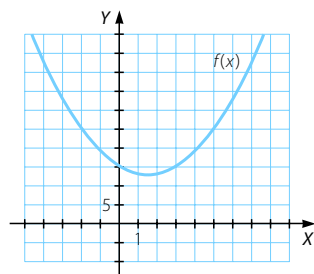
a) $f(x) = x^2 - 3x + 15$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$f''(x) = 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Per tant, es $f(x)$ és convexa en tot el seu domini i no presenta punts d'inflexió.

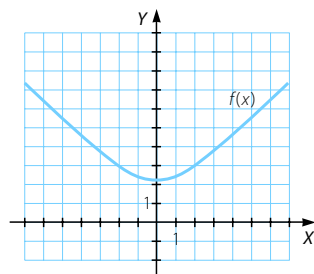


b) $x^2 + 5 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}}$$

$$f''(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 5} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 5}}}{x^2 + 5} =$$

$$= \frac{5}{(x^2 + 5)\sqrt{x^2 + 5}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$



Així, doncs, $f(x)$ és convexa en tot el seu domini i no presenta punts d'inflexió.

Representació de funcions

020

Representa les funcions polinòmiques següents:

a) $f(x) = x^4 - 12x$

b) $g(x) = -2x^3 + 6x$

a) Dom $f = \mathbb{R}$

• Talls amb l'eix :

$$f(x) = 0 \rightarrow x^4 - 12x = 0 \rightarrow x(x^3 - 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{12} \end{cases} \rightarrow (0, 0), (\sqrt[3]{12}, 0)$$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

Com que f és una funció polinòmica, només té branques parabòliques.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 12x) = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 12x) = +\infty$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{3}$$

• En $(-\infty, \sqrt[3]{3}) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

• En $(\sqrt[3]{3}, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

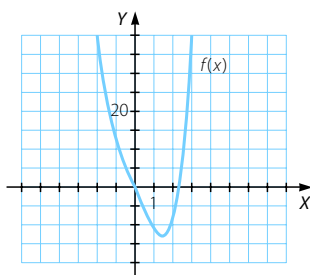
$$x = \sqrt[3]{3} \rightarrow f(\sqrt[3]{3}) = 3\sqrt[3]{3} - 12\sqrt[3]{3} = -9\sqrt[3]{3} \\ \rightarrow (\sqrt[3]{3}, -9\sqrt[3]{3}) \text{ Mínim}$$

$$f''(x) = 12x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

• En $(-\infty, 0) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa

• En $(0, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa

No presenta punts d'inflexió.



b) Dom $g = \mathbb{R}$

• Talls amb l'eix X:

$$g(x) = 0 \rightarrow -2x^3 + 6x = 0 \rightarrow x(-2x^2 + 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases} \\ \rightarrow (-\sqrt{3}, 0), (0, 0), (0, \sqrt{3})$$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

Com que g és una funció polinòmica, només té branques parabòliques.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 6x) = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + 6x) = -\infty$$

$$g'(x) = -6x^2 + 6 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

• En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreixent

• En $(-1, 1) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creixent

$$x = -1 \rightarrow g(-1) = -2(-1)^3 + 6(-1) = -4 \\ \rightarrow (-1, -4) \text{ Mínim}$$

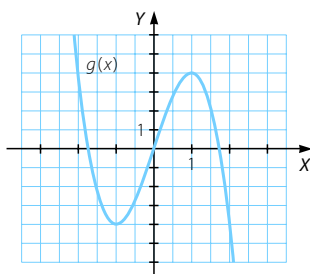
$$x = 1 \rightarrow g(1) = -2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1 = 4 \\ \rightarrow (1, 4) \text{ Màxim}$$

$$g''(x) = -12x = 0 \rightarrow x = 0$$

• En $(-\infty, 0) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ convexa

• En $(0, +\infty) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ còncava

$$x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \text{ Punt d'inflexió}$$



021 Representa aquestes funcions polinòmiques:

a) $f(x) = 6x^5 - 12x^3 - 4x$

b) $g(x) = -x^3 + x$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Talls amb l'eix X:

$$f(x) = 0 \rightarrow 6x^5 - 12x^3 - 4x = 0 \rightarrow x(6x^4 - 12x^2 - 4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1,51 \end{cases}$$

- Tall amb l'eix Y:

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$$

Com que f és una funció polinòmica, només té branques parabòliques.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (6x^5 - 12x^3 - 4x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (6x^5 - 12x^3 - 4x) = +\infty$$

$$f'(x) = 30x^4 - 36x^2 - 4$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = \pm 1,14$$

- En $(-\infty; -1,14) \cup (1,14; +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

- En $(-1,14; 1,14) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

$$x = -1,14 \rightarrow f(-1,14) = 10,79 \rightarrow (-1,14; 10,79) \text{ Màxim}$$

$$x = 1,14 \rightarrow f(1,14) = -10,79 \rightarrow (1,14; -10,79) \text{ Mínim}$$

$$f''(x) = 120x^3 - 72x$$

$$f''(x) = 0 \rightarrow x(120x^2 - 72) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 0,77 \end{cases}$$

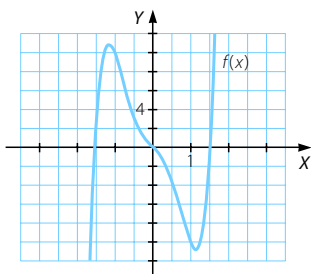
- En $(-\infty; -0,77) \cup (0,77; +\infty) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ còncava

- En $(-0,77; 0) \cup (0,77; +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa

$$x = -0,77 \rightarrow f(-0,77) = 6,93 \rightarrow (-0,77; 6,93) \text{ Punt d'inflexió}$$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \text{ Punt d'inflexió}$$

$$x = 0,77 \rightarrow f(0,77) = -6,93 \rightarrow (0,77; -6,93) \text{ Punt d'inflexió}$$



Representació de funcions

b) Dom $g = \mathbb{R}$

- Talls amb l'eix X:

$$g(x) = -x^3 + x = 0 \rightarrow x(-x^2 + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \rightarrow (-1, 0), (0, 0), (1, 0)$$

- Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

Com que g és una funció polinòmica, només té branques parabòliques.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x) = -\infty$$

$$g'(x) = -3x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- En $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreixent

- En $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creixent

$$x = -\sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow g\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \text{ Mínim}$$

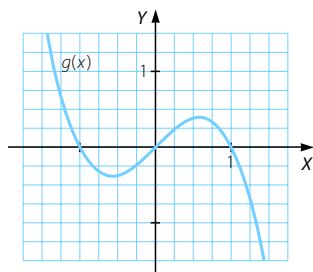
$$x = \sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow g\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \text{ Màxim}$$

$$g''(x) = -6x = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ convexa

- En $(0, +\infty) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ còncava

$$x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \text{ Punt d'inflexió}$$



022 Representa les funcions racionals següents:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 5}{x}$

b) $g(x) = \frac{x^2}{x^3 + x}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

• Talls amb l'eix X:

$$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2 - 5}{x} = 0 \rightarrow x^2 - 5 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{5} \rightarrow (-\sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0)$$

• Tall amb l'eix Y: no en té perquè $f(x)$ no està definida per a $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 5}{x} = \infty \rightarrow \text{Asímtota vertical: } x = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 5}{x} = -\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No té asímtotes horitzontals}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5}{x^2} = 1 \neq 0 \rightarrow m = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5}{x} = 0 \rightarrow n = 0$$

$\rightarrow$ Asímtota obliqua: $y = x$

No té branques parabòliques perquè té asímtota obliqua quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

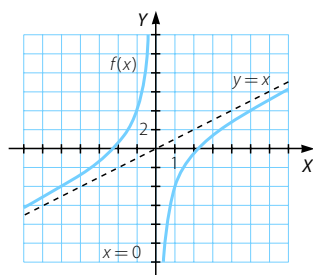
$$f'(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2} > 0 \rightarrow f(x) \text{ creixent}$$

No presenta màxims ni mínims.

$$f''(x) = \frac{-10}{x^3} \neq 0 \rightarrow f(x) \text{ no presenta punts d'inflexió.}$$

• En $(-\infty, 0) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa

• En $(0, +\infty) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ còncava



b) $x^3 + x = 0 \rightarrow x(x^2 + 1) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Dom } g = \mathbb{R} - \{0\}$

• Talls amb l'eix X:

$$g(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2}{x^3 + x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{No en té perquè } g(x) \text{ no està definida per a } x = 0.$$

• Tall amb l'eix Y: no en té perquè $g(x)$ no està definida per a $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^3 + x} \rightarrow \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x^2 + 1} = 0 \rightarrow \text{No té asímtotes verticals.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^3 + x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3 + x} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Asímtota horitzontal: } y = 0$$

No té asímtotes obliques ni branques parabòliques perquè té asímtota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

$$g'(x) = \frac{-x^4 + x^2}{(x^3 + x)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

Representació de funcions

• En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreixent

• En $(-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creixent

$$x = -1 \rightarrow g(-1) = -\frac{1}{2} \rightarrow \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \text{ Mínim}$$

$$x = 1 \rightarrow g(1) = \frac{1}{2} \rightarrow \left(1, \frac{1}{2}\right) \text{ Màxim}$$

$$g''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = 0 \rightarrow 2x^3 - 6x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

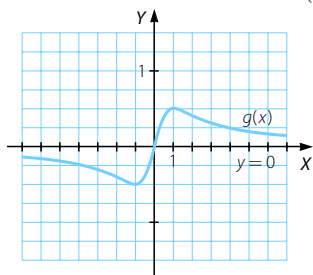
• En $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ còncava

• En $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ convexa

$$x = -\sqrt{3} \rightarrow g(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \text{ Punt d'inflexió}$$

$$x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \text{ Punt d'inflexió}$$

$$x = \sqrt{3} \rightarrow g(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \text{ Punt d'inflexió}$$



023 Representa aquestes funcions racionals:

a) $f(x) = \frac{x^3 - 3}{x}$

b) $g(x) = \frac{x^4 - 3x}{x}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

• Talls amb l'eix X: $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3 - 3}{x} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{3} \rightarrow (\sqrt[3]{3}, 0)$

• Tall amb l'eix Y: no en té perquè $f(x)$ no està definida per a $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3}{x} = \infty \rightarrow \text{Asímtota vertical: } x = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3}{x} = +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No té asímtotes horitzontals.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3}{x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3}{x^2} = -\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No té asímtotes obliqües.}$$

Té branques parabòliques:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3}{x} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^3 + 3 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{-3}{2}} = -1,14$$

$$\bullet \text{ En } \left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{-3}{2}}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ decreixent}$$

$$\bullet \text{ En } \left(\sqrt[3]{\frac{-3}{2}}, 0\right) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ creixent}$$

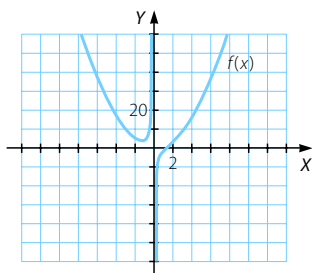
$$x = \sqrt[3]{\frac{-3}{2}} \rightarrow f\left(\sqrt[3]{\frac{-3}{2}}\right) = \frac{3\sqrt[3]{12^2}}{4} = 3,93 \rightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{-3}{2}}, \frac{3\sqrt[3]{12^2}}{4}\right) \text{ Mínim}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6}{x^3} = 0 \rightarrow 2x^3 - 6 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{3} \rightarrow (\sqrt[3]{3}, 0)$$

$$\bullet \text{ En } (-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{3}, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ convexa}$$

$$\bullet \text{ En } (0, \sqrt[3]{3}) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ còncava}$$

$$x = \sqrt[3]{3} \rightarrow f(\sqrt[3]{3}) = 0 \rightarrow (\sqrt[3]{3}, 0) \text{ Punt d'inflexió}$$



b) Dom $g = \mathbb{R} - \{0\}$

• Talls amb l'eix X:

$$g(x) = 0 \rightarrow \frac{x^4 - 3x}{x} = 0 \rightarrow x^4 - 3x = 0 \rightarrow x(x^3 - 3) = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{3} \rightarrow (\sqrt[3]{3}, 0)$$

• Tall amb l'eix Y: no en té perquè $g(x)$ no està definida per a $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 3x}{x} \rightarrow \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 3}{1} = -3 \rightarrow \text{No té asímptotes verticals.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = -\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No té asímptotes horitzontals.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No té asímptotes obliqües.}$$

Representació de funcions

Té branques parabòliques:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 3x}{x} = -\infty$$

$$g'(x) = 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0$$

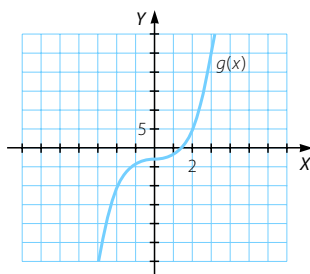
- En $(-\infty, 0) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creixent
- En $(0, +\infty) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ decreixent

No presenta màxims ni mínims.

$$g''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ còncava
- En $(0, +\infty) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ convexa

No presenta punts d'inflexió, perquè en $x = 0$ no està definida la funció.



024 Representa les funcions amb radicals següents:

a) $f(x) = \sqrt{x-3}$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 7x}$

a) $x - 3 \geq 0 \rightarrow x \geq 3 \rightarrow \text{Dom } f = [3, +\infty)$

- Talls amb l'eix X: $f(x) = 0 \rightarrow x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow (3, 0)$
- Tall amb l'eix Y: no en té perquè $f(x)$ no està definida per a $x = 0$.

No té asímptotes verticals perquè a l'extrem del domini la funció està definida.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-3} = +\infty \rightarrow \text{No té asímptotes horitzontals.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-3}}{x} = 0 \rightarrow \text{No té asímptotes obliqües.}$$

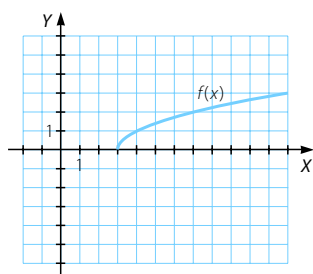
$$\text{Té una branca parabòlica: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-3} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} > 0, \forall x \in (3, +\infty) \rightarrow f(x) \text{ creixent}$$

No presenta màxims ni mínims.

$$f''(x) = \frac{-1}{4(x-3)\sqrt{x-3}} < 0, \forall x \in (3, +\infty) \rightarrow f(x) \text{ còncava}$$

No presenta punts d'inflexió.



b) $x^2 - 7x \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [7, +\infty) \rightarrow \text{Dom } g = (-\infty, 0] \cup [7, +\infty)$

• Talls amb l'eix X: $g(x) = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 - 7x} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (7, 0)$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow (0, 0)$

No té asímptotes verticals.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 7x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 7x} &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No té asímptotes horitzontals.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 7x}}{x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 7x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 7x - x^2}{\sqrt{x^2 - 7x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x}{\sqrt{x^2 - 7x} + x} = \frac{-7}{2} \rightarrow n = \frac{-7}{2} \end{aligned} \right\}$$

$\rightarrow$ Asímtota obliqua: $y = mx + n \rightarrow y = x - \frac{7}{2}$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 7x}}{x} = -1 \rightarrow m = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 7x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 7x - x^2}{\sqrt{x^2 - 7x} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7x}{\sqrt{x^2 - 7x} - x} = \frac{7}{2} \rightarrow n = \frac{7}{2} \end{aligned} \right\}$$

$\rightarrow$ Asímtota obliqua: $y = mx + n \rightarrow y = -x + \frac{7}{2}$

No té branques parabòliques.

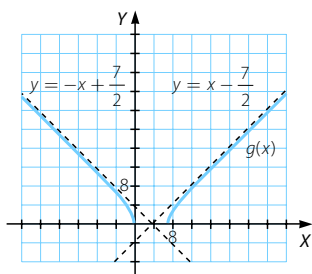
$g'(x) = \frac{2x - 7}{2\sqrt{x^2 - 7x}} = 0 \rightarrow x = \frac{7}{2} \notin \text{Dom } g \rightarrow$ No presenta màxims ni mínims.

• En $(-\infty, 0) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreixent

• En $(7, +\infty) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creixent

$g''(x) = \frac{-49}{4(x^2 - 7x)\sqrt{x^2 - 7x}} < 0, \forall x \in (-\infty, 0) \cup (7, +\infty) \rightarrow g(x)$ còncava

No presenta punts d'inflexió.



Representació de funcions

025 Representa aquestes funcions amb radicals:

a) $f(x) = \sqrt{x^3 - x^2}$

b) $g(x) = x + \sqrt{x}$

a) $x^3 - x^2 \geq 0 \rightarrow x^2(x-1) \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \rightarrow \text{Dom } f = [1, +\infty)$

• Talls amb l'eix X:

$$f(x) = 0 \rightarrow \sqrt{x^3 - x^2} = 0 \rightarrow x^2(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (1, 0)$$

• Tall amb l'eix Y: no en té perquè $f(x)$ no està definida per a $x = 0$.

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 - x^2} = +\infty \rightarrow \text{No té asímptotes horitzontals.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 - x^2}}{x} = +\infty \rightarrow \text{No té asímptotes obliqües.}$$

Té una branca parabòlica:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 - x^2} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{2\sqrt{x^3 - x^2}} = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(3x - 2) = 0$$

$$\rightarrow x = 0, x = \frac{2}{3} \notin \text{Dom } f \rightarrow \text{No presenta màxims ni mínims.}$$

$$f'(x) > 0, \forall x \in (1, +\infty) \rightarrow f(x) \text{ còncava}$$

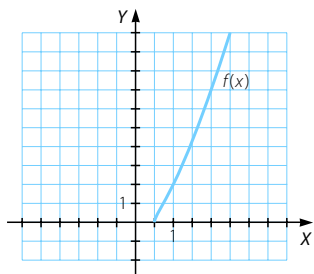
$$f''(x) = \frac{3x^4 - 4x^3}{4(x^3 - x^2)\sqrt{x^3 - x^2}} = \frac{3x^2 - 4x}{4(x-1)\sqrt{x^3 - x^2}} = 0$$

$$\rightarrow x(3x - 4) = 0 \rightarrow x = 0, x = \frac{4}{3}$$

• En $\left(1, \frac{4}{3}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ convexa}$

• En $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ còncava}$

$$x = \frac{4}{3} \rightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9} \rightarrow \left(\frac{4}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{9}\right) \text{ Punt d'inflexió}$$



b) $\text{Dom } g = [0, +\infty)$

- Talls amb l'eix X : $g(x) = 0 \rightarrow x + \sqrt{x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Tall amb l'eix Y : $x = 0 \rightarrow g(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

No té asímptotes verticals.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty \rightarrow$ No té asímptotes horitzontals.

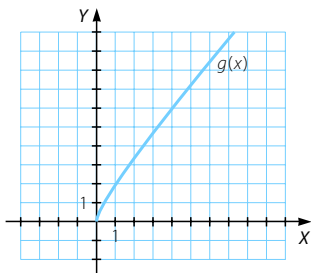
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x} - x) = +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No té asímptotes obliques.}$$

Té una branca parabòlica: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x}) = +\infty$

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \rightarrow g(x) \text{ creixent}$$

No presenta màxims ni mínims.

$$g''(x) = \frac{-1}{4x\sqrt{x}} < 0, \forall x \in (0, +\infty) \rightarrow g(x) \text{ còncava}$$



026 Representa les funcions exponencials següents:

a) $f(x) = e^{-x} + 7$

b) $g(x) = 5 + e^x$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Talls amb l'eix : no en té.
- Tall amb l'eix Y : $x = 0 \rightarrow f(0) = 8 \rightarrow (0, 8)$

No té asímptotes verticals.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + 7) = 7 \rightarrow$ Asímtota horitzontal

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 7) = +\infty \rightarrow$ No té asímtota horitzontal.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} + 7}{x} = +\infty \rightarrow \text{No té asímptotes obliques.}$$

Té una branca parabòlica:

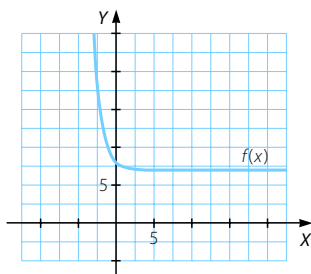
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} + 7) = +\infty$$

$$f'(x) = -e^{-x} < 0 \rightarrow f(x) \text{ decreixent}$$

No presenta màxims ni mínims.

$$f''(x) = e^{-x} > 0 \rightarrow f(x) \text{ convexa}$$

No presenta punt d'inflexió.



Representació de funcions

b) $\text{Dom } g = \mathbb{R}$

- Talls amb l'eix X : no en té.
- Tall amb l'eix Y : $x = 0 \rightarrow g(0) = 6 \rightarrow (0, 6)$

No té asímptotes verticals.

Asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5 + e^x) = +\infty \rightarrow \text{No té asímptota horitzontal.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (5 + e^x) = 5 \rightarrow \text{Asímptota horitzontal: } y = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + e^x}{x} = +\infty \rightarrow \text{No té asímptotes obliqües.}$$

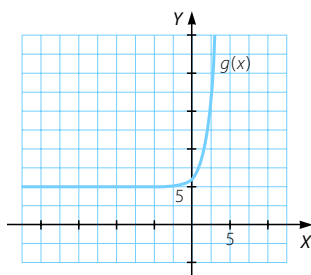
Té una branca parabòlica:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (5 + e^x) = +\infty$$

$$g'(x) = e^x > 0 \rightarrow g(x) \text{ creixent}$$

No presenta màxims ni mínims.

$$g''(x) = e^x > 0 \rightarrow g(x) \text{ convexa i no presenta punts d'inflexió.}$$



027 Representa aquestes funcions exponencials:

a) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ b) $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

a) $\text{Dom } f = [0, +\infty)$

- Talls amb l'eix X : no en té.
- Tall amb l'eix Y : $x = 0 \rightarrow f(0) = e^0 = 1 \rightarrow (0, 1)$

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x}} = +\infty \rightarrow \text{No té asímptotes horitzontals.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} = +\infty \rightarrow \text{No té asímptotes obliqües.}$$

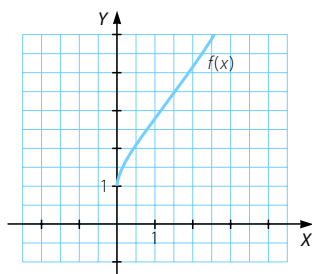
$$\text{Té una branca parabòlica: } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot e^{\sqrt{x}} > 0 \rightarrow f(x) \text{ creixent}$$

No presenta màxims ni mínims.

$$f''(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{4x} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}} = 0 \rightarrow \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}} = 0 \rightarrow e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) = 0 \rightarrow x = 1$$

- En $(0, 1) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ còncava
 - En $(1, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- $x = 1 \rightarrow f(1) = e \rightarrow (1, e)$ Punt d'inflexió



b) Dom $g = \mathbb{R}$

- Talls amb l'eix X : no tiene.
- Tall amb l'eix Y : $x = 0 \rightarrow g(0) = e^0 = 1 \rightarrow (0, 1)$

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \rightarrow \text{Asímptota horitzontal: } y = 0$$

No té asímptotes obliqües ni branques parabòliques.

$$g'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$ creixent
- En $(0, +\infty) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x)$ decreixent

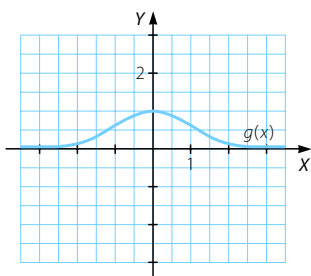
$$x = 0 \rightarrow f(0) = 1 \rightarrow (0, 1) \text{ Màxim}$$

$$g''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} - xe^{-\frac{x^2}{2}}(-x) = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow g''(x) > 0 \rightarrow g(x)$ convexa
- En $(-1, 1) \rightarrow g''(x) < 0 \rightarrow g(x)$ còncava

$$x = -1 \rightarrow f(1) = e^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \left(-1, e^{-\frac{1}{2}}\right) \text{ Punt d'inflexió}$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = e^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \left(1, e^{-\frac{1}{2}}\right) \text{ Punt d'inflexió}$$



Representació de funcions

028

Representa les funcions logarítmiques següents:

a) $f(x) = \ln(x + 4)$

b) $g(x) = \ln(x^2 - 4)$

a) $x + 4 > 0 \rightarrow x > -4 \rightarrow \text{Dom } f = (-4, +\infty)$

• Talls amb l'eix X: $\ln(x + 4) = 0 \rightarrow x + 4 = e^0 = 1 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, 0)$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = \ln 4 \rightarrow (0, \ln 4)$

$\lim_{x \rightarrow -4^+} \ln(x + 4) = -\infty \rightarrow \text{Asíptota vertical: } x = -4$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 4) = +\infty \rightarrow \text{No té asíptotes horitzontals.}$

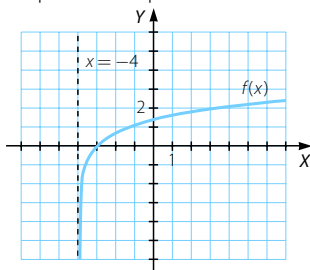
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x + 4)}{x} = 0 \rightarrow \text{No té asíptotes obliques.}$

Té una branca parabòlica:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 4) = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{x + 4} > 0 \rightarrow f(x) \text{ creixent}$

$f''(x) = \frac{-1}{(x + 4)^2} < 0 \rightarrow f(x) \text{ còncava}$



b) $x^2 - 4 > 0 \rightarrow (x - 2)(x + 2) > 0 \rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

$\rightarrow \text{Dom } g = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

• Tall amb l'eix X: $\ln(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x^2 - 4 = e^0 = 1 \rightarrow x^2 = 1 + 4$

$\rightarrow x = \pm\sqrt{5} \rightarrow (-\sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0)$

• Tall amb l'eix Y: no en té perquè $g(x)$ no està definida per a $x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln(x^2 - 4) = -\infty \rightarrow \text{Asíptota vertical: } x = -2$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x^2 - 4) = -\infty \rightarrow \text{Asíptota vertical: } x = 2$

$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 4) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 4) &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No té asíptotes horitzontals.}$

$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 4)}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 - 4)}{x} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No té asíptotes obliques.}$

Té branques parabòliques:

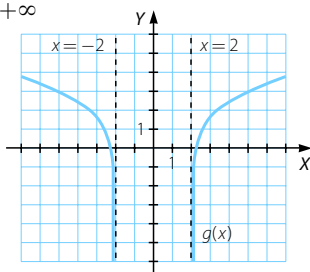
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty$

$g'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow x = 0$

• En $(-\infty, -2) \rightarrow g'(x) < 0 \rightarrow g(x) \text{ decreixent}$

• En $(2, +\infty) \rightarrow g'(x) > 0 \rightarrow g(x) \text{ creixent}$

$g''(x) = \frac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)^2} < 0 \rightarrow g(x) \text{ còncava}$



029 Representa aquesta funció logarítmica: $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$

$$x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Talls amb l'eix } X: \ln(x^2 - x + 1) = 0 &\rightarrow x^2 - x + 1 = e^0 = 1 \rightarrow x^2 - x = 0 \\ &\rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (1, 0) \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Tall amb l'eix } Y: x = 0 \rightarrow y = \ln 1 = 0 \rightarrow (0, 0)$$

No té asímptotes verticals.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - x + 1) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - x + 1) &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No té asímptotes horitzontals.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{x} = 0 \rightarrow \text{No té asímptotes obliques.}$$

Té branques parabòliques:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - x + 1) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - x + 1) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1} = 0 \rightarrow 2x-1=0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \text{ En } \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ decreixent}$$

$$\bullet \text{ En } \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ creixent}$$

$$x = \frac{1}{2} \rightarrow f(x) = \ln \frac{3}{4} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, \ln \frac{3}{4}\right) \text{ Mínim}$$

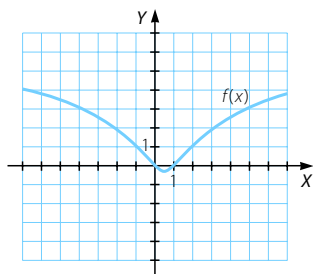
$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{-2} = -0,37; x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{-2} = 1,37$$

$$\bullet \text{ En } \left(-\infty, \frac{-1 + \sqrt{3}}{-2}\right) \cup \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{-2}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ còncava}$$

$$\bullet \text{ En } \left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{-2}, \frac{-1 - \sqrt{3}}{-2}\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ convexa}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{-2} \rightarrow f\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{-2}\right) = 0,41 \rightarrow (-0,37; 0,41) \text{ Punt d'inflexió}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{3}}{-2} \rightarrow f\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{-2}\right) = 0,41 \rightarrow (1,37; 0,41) \text{ Punt d'inflexió}$$



Representació de funcions

030

Representa la funció: $f(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

$f(x) = e^{\sqrt{-x}} \rightarrow$ Està definida per a $x \leq 0 \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$

- Talls amb l'eix X: no en té.
- Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = e^{\sqrt{0}} = 1 \rightarrow (0, 1)$

No té asímptotes verticals.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\sqrt{-x}} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No té asímptotes horitzontals.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\sqrt{-x}}}{x} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-e^{\sqrt{-x}}}{2\sqrt{-x}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \\ \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\sqrt{-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{-x}}}{\frac{-2}{2\sqrt{-x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} e^{\sqrt{-x}} = -\infty \end{array} \right\}$$

$\rightarrow$ No té asímptotes obliques.

Té dues branques parabòliques:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x + 1 = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\sqrt{-x}} = +\infty$$

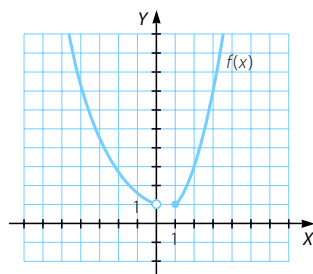
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2\sqrt{-x}} \cdot e^{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 1 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad f'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent
- En $(1, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

$$f''(x) = \begin{cases} e^{\sqrt{-x}} - \frac{e^{\sqrt{-x}}}{\sqrt{-x}} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad f''(x) = 0 \rightarrow x = -1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(-1, 0) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ còncava

$x = -1 \rightarrow f(-1) = e \rightarrow (-1, e)$ Punt d'inflexió



031

Representa la funció: $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ \ln(x^2 - 4) & \text{resta} \end{cases}$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

- Talls amb l'eix X:

$$f(x) = 0 \rightarrow (0, 0), (-\sqrt{5}, 0), (\sqrt{5}, 0)$$

- Tall amb l'eix Y:

$$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln(x^2 - 4) = -\infty \rightarrow \text{Asíptota vertical: } x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x^2 - 4) = -\infty \rightarrow \text{Asíptota vertical: } x = 2$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 4) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 4) &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No té asíptotes horitzontals.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - 4)}{x} = 0 \rightarrow \text{No té asíptotes obliqües.}$$

- Té branques parabòliques:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 4) = +\infty$$

- Creixement

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } -2 < x < 2 \\ \frac{2x}{x^2 - 4} & \text{resta} \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

- En $(-2, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

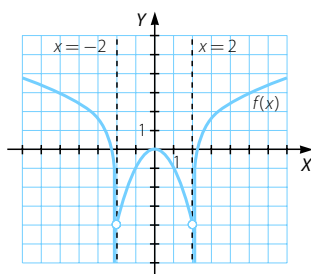
$$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \text{ Màxim}$$

- Concavitat

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -2 < x < 2 \\ \frac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)^2} & \text{resta} \end{cases}$$

- En $(-2, 2) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ còncava

- En $\mathbb{R} - (-2, 2) \rightarrow f''(x) = \frac{-2x^2 - 8}{(x^2 - 4)^2} < 0 \rightarrow f(x)$ còncava



Representació de funcions

032

Representa les funcions amb valor absolut següents:

a) $f(x) = 4x + |-x^2 - 18x|$ b) $g(x) = |x^3 + 2x^2 - 6x|$

$$a) f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 - 18x & \text{si } -x^2 - 18x \geq 0 \\ 4x + x^2 + 18x & \text{si } -x^2 - 18x < 0 \end{cases}$$

$$\text{Per tant: } f(x) = \begin{cases} -x^2 - 14x & \text{si } x \in [-18, 0] \\ x^2 + 22x & \text{si } x \in (-\infty, -18) \cup (0, +\infty) \end{cases}$$

Es tracta de representar dues paràboles en els intervals respectius.

Punts d'intersecció:

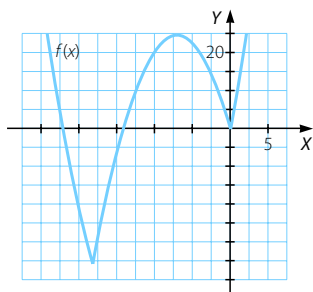
$$-x^2 - 14x = x^2 + 22x \rightarrow 2x^2 + 36x = 0 \rightarrow x(2x + 36) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -18 \end{cases}$$

$$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$x = -18 \rightarrow y = -72 \rightarrow (-18, -72)$$

$$\text{Vèrtex de } f(x) = -x^2 - 14x \rightarrow (-7, 49)$$

$$\text{Vèrtex de } f(x) = x^2 + 22x \rightarrow (-11, -121)$$



- b) Estudem primer la funció $f(x) = x^3 + 2x^2 - 6x$ i, després de representar-la, dibuixem les parts negatives com si fossin positives per mitjà d'una simetria respecte de l'eix X.

Domini $f = \mathbb{R}$

- Talls amb l'eix X:

$$x^3 + 2x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(x^2 + 2x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

- Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

Com que f és una funció polinòmica, només té branques parabòliques.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{22}}{3} \rightarrow \begin{cases} x = -2,23 \\ x = 0,9 \end{cases}$$

- En $\left(-\infty, \frac{-2 - \sqrt{22}}{3}\right) \cup \left(\frac{-2 + \sqrt{22}}{3}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

- En $\left(\frac{-2 - \sqrt{22}}{3}, \frac{-2 + \sqrt{22}}{3}\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

$$x = -2,23 \rightarrow f(-2,23) = 12,24 \rightarrow (-2,23; 12,24) \text{ Màxim}$$

$$x = 0,9 \rightarrow f(0,9) = -3,05 \rightarrow (0,9; -3,05) \text{ Mínim}$$

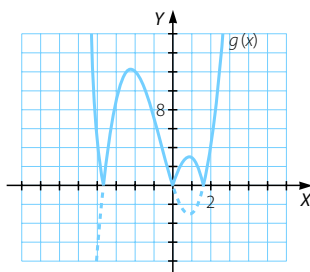
$$f''(x) = 6x + 4 = 0 \rightarrow x = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} = -0,67$$

$$\bullet \text{ En } \left(-\infty, \frac{-2}{3}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ còncava}$$

$$\bullet \text{ En } \left(\frac{-2}{3}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ convexa}$$

$$x = \frac{-2}{3} \rightarrow f\left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{124}{27} = 4,59$$

$$\rightarrow \left(\frac{-2}{3}, \frac{124}{27}\right) \text{ Punt d'inflexió}$$



033

Representa aquesta funció: $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 3x & \text{si } x \leq 0 \\ -e^x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- Representem $f(x) = -x^2 - 3x$ en l'interval $(-\infty, 0]$.

Es tracta d'una paràbola de vèrtex $\left(\frac{-3}{2}, \frac{9}{4}\right)$.

$$\text{Talls amb l'eix X: } -x^2 - 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (-3, 0)$$

$$\text{Tall amb l'eix Y: } x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$$

En $(-\infty, -3)$ la funció és negativa; així, doncs, per aconseguir el valor absolut dibuixem la simètrica respecte de l'eix X.

- Representem $f(x) = -e^x$ en l'interval $(0, +\infty)$.

No talla l'eix X.

$$\text{Tall amb l'eix Y: } x = 0 \rightarrow y = -e^0 = -1 \rightarrow (0, -1)$$

No té asímptotes verticals.

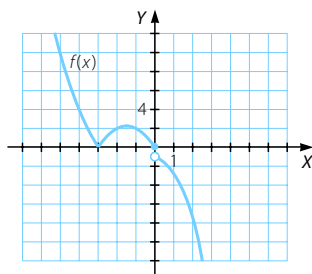
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -e^x = -\infty \rightarrow \text{No té asímptotes horitzontals.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^x}{x} = -\infty \rightarrow \text{No té asímptotes obliqües.}$$

$$\text{Té una branca parabòlica: } \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^x = -\infty$$

$$f'(x) = -e^x < 0 \rightarrow f(x) \text{ decreixent}$$

$$f''(x) = -e^x < 0 \rightarrow f(x) \text{ còncava}$$



Representació de funcions

034 Troba el domini de les funcions polinòmiques següents:

a) $y = 1 - 2x$ b) $y = x^2 - 2x - 3$ c) $y = x^3 + 4x$ d) $y = (x^2 - 4)^2$

El domini de qualsevol funció polinòmica és $\mathbb{R}$.

035 Calcula el domini d'aquestes funcions racionals:

a) $y = \frac{x-2}{x-3}$ b) $y = \frac{3x}{x^2-9}$ c) $y = \frac{x^2}{x-1}$

a) $x-3=0 \rightarrow x=3 \rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R} - \{3\}$

b) $x^2-9=0 \rightarrow x=\pm 3 \rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

c) $x-1=0 \rightarrow x=1 \rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R} - \{1\}$

036 Determina el domini de les funcions amb radical següents:

a) $y = \sqrt{3-x} + 3$

c) $y = \sqrt{x^2+25}$

b) $y = \sqrt{16-x^2}$

d) $y = \sqrt{x^2-2x-3}$

a) $3-x \geq 0 \rightarrow x \leq 3 \rightarrow \text{Domini} = (-\infty, 3]$

b) $16-x^2 \geq 0 \rightarrow (4-x)(4+x) \geq 0 \rightarrow x \in [-4, 4] \rightarrow \text{Domini} = [-4, 4]$

c) $x^2+25 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R}$

d) $x^2-2x-3 \geq 0 \rightarrow (x-3)(x+1) \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$
 $\rightarrow \text{Domini} = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

037 Troba el domini d'aquestes funcions exponencials i logarítmiques:

a) $y = x^2 e^x$ b) $y = 4^{-\frac{1}{x^2}}$ c) $y = \ln(x^2+4)$ d) $y = \frac{x}{\log_3 x}$

a) $\text{Domini} = \mathbb{R}$

b) $x \neq 0 \rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R} - \{0\}$

c) $x^2+4 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R}$

d) $\log_3 x = 0 \rightarrow x = 3^0 = 1$. Com que $x > 0 \rightarrow \text{Domini} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

038 Determina el domini de les funcions següents:

a) $y = \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x}$

c) $y = \sqrt{-x^2-2x+3}$

e) $y = 2^{-x^2+7}$

b) $y = \sqrt[3]{x^2+4x-1}$

d) $y = \ln(5x+x^2)$

f) $y = \frac{e^x}{(x+1)^2}$

a) $\text{Domini} = \mathbb{R} - \{0\}$

b) $\text{Domini} = \mathbb{R}$

c) $-x^2-2x+3 \geq 0 \rightarrow -(x+3)(x-1) \geq 0 \rightarrow x \in [-3, 1] \rightarrow \text{Domini} = [-3, 1]$

d) $5x+x^2 > 0 \rightarrow x(5+x) > 0 \rightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$
 $\rightarrow \text{Domini} = (-\infty, -5) \cup (0, +\infty)$

e) $\text{Domini} = \mathbb{R}$

f) $\text{Domini} = \mathbb{R} - \{-1\}$

039 Troba el domini d'aquestes funcions:

a) $y = \frac{\sin x}{x - \pi}$ b) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{x - 1}$ c) $y = \arccos(x^2 - 3)$ d) $y = x - \sin x$

a) Domini = $\mathbb{R} - \{\pi\}$

b) $\frac{x}{x - 1} = \frac{\pi}{2} \rightarrow 2x = \pi x - \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{\pi - 2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2 - \pi} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

A més, $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$.

Domini = $\mathbb{R} - \left\{1, \frac{\pi}{2 - \pi} + k\pi\right\}$ amb $k \in \mathbb{Z}$

c) $y = \arccos x$ està definida en:

$[-1, 1] \rightarrow -1 \leq x^2 - 3 \leq 1 \rightarrow 2 \leq x^2 \leq 4$

$\rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty) \\ x^2 - 4 \leq 0 \rightarrow x \in [-2, 2] \end{cases}$

La zona comuna dels dos intervals és $[-2, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 2]$, que és el domini de la funció.

d) Domini = $\mathbb{R}$

040 Calcula els punts en els quals les gràfiques de les funcions següents tallen els eixos de coordenades:

a) $y = -x^2 - x + 12$ c) $y = x^4 - 8x^2 + 7$ e) $y = \frac{3x^2}{x^2 - 1}$
 b) $y = x^3 - 4x^2 - x + 4$ d) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

a) • Talls amb l'eix X:

$y = 0 \rightarrow -x^2 - x + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow (-4, 0), (3, 0)$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 12 \rightarrow (0, 12)$

b) • Talls amb l'eix X:

$y = 0 \rightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow (-1, 0), (1, 0), (4, 0)$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$

c) • Talls amb l'eix X:

$y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{7} \end{cases} \rightarrow (-1, 0), (1, 0), (-\sqrt{7}, 0), (\sqrt{7}, 0)$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow (0, 7)$

d) • Talls amb l'eix X: $y = 0 \rightarrow \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

e) • Talls amb l'eix X: $y = 0 \rightarrow \frac{3x^2}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

Representació de funcions

041 Troba els punts de tall amb els eixos de les gràfiques d'aquestes funcions:

a) $y = \frac{2x-1}{x-x^2}$ b) $y = \frac{x^2-9}{e^{x^2}}$ c) $y = \frac{\ln x}{x^2-4}$ d) $y = x + e^{-x}$

a) • Talls amb l'eix X:

$$y = 0 \rightarrow \frac{2x-1}{x-x^2} = 0 \rightarrow 2x-1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

• Tall amb l'eix Y: no en té perquè la funció no està definida per a $x = 0$.

b) • Talls amb l'eix X:

$$y = 0 \rightarrow \frac{x^2-9}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow x^2-9 = 0 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow (-3, 0), (3, 0)$$

• Tall amb l'eix Y: si $x = 0 \rightarrow y = -9 \rightarrow (0, -9)$

c) • Talls amb l'eix X:

$$y = 0 \rightarrow \frac{\ln x}{x^2-4} = 0 \rightarrow \ln x = 0 \rightarrow x = e^0 = 1 \rightarrow (1, 0)$$

• Tall amb l'eix Y: no en té perquè la funció no està definida per a $x = 0$.

d) • Talls amb l'eix X: $y = 0 \rightarrow x + e^{-x} = 0$. Per resoldre aquesta equació estudiem y' .

$$y' = 1 - e^{-x} = 0 \rightarrow e^{-x} = 1 \rightarrow -x = \ln 1 = 0 \rightarrow x = 0$$

En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

Així, doncs, en $x = 0$ assoleix l'únic mínim, $(0, 1)$; per tant, no hi pot haver punts de tall amb l'eix X.

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 1)$

042 Justifica a què és igual el domini de la funció següent: $f(x) = \frac{2x-2}{x+1}$

(Activitat de Selectivitat)

$$x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

043 Digues quin és el domini de la funció: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2-4}$

(Activitat de Selectivitat)

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ x \neq \pm 2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Dom } f = (0, +\infty) - \{+2\}$$

044 Donada la corba $y = \frac{2x-1}{x+1}$, calcula'n els punts de tall amb els eixos de coordenades.

(Activitat de Selectivitat)

• Talls amb l'eix X: $y = 0 \rightarrow \frac{2x-1}{x+1} = 0 \rightarrow 2x-1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

• Tall amb l'eix Y: si $x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

045 Donada la funció $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x$, determina'n:

- a) El domini de definició.
b) Els punts de tall amb els eixos.

(Activitat de Selectivitat)

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- b) • Talls amb l'eix X:

$$y = 0 \rightarrow -x^3 - 2x^2 + 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \rightarrow (-3, 0), (0, 0), (1, 0)$$

• Tall amb l'eix Y: si $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

046 Analitza si aquestes funcions són simètriques respecte de l'eix d'ordenades o respecte de l'origen:

a) $y = x^3 + x$ c) $y = x^2 - x + 3$ e) $y = \frac{\ln |x|}{x + 4}$

b) $y = x^4 - 2x^2 + 5$ d) $y = \frac{3x}{x^2 - 9}$ f) $y = (2x^2 - 1)^2$

a) $f(-x) = (-x)^3 - x = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -f(x)$
→ Simètrica respecte de l'origen.

b) $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 5 = x^4 - 2x^2 + 5 = f(x)$
→ Simètrica respecte de l'eix Y.

c) $f(-x) = (-x)^2 - (-x) + 3 = x^2 + x + 3 \rightarrow$ No és simètrica.

d) $f(-x) = \frac{3(-x)}{(-x)^2 - 9} = \frac{-3x}{x^2 - 9} = -\frac{3x}{x^2 - 9} = -f(x)$
→ Simètrica respecte de l'origen.

e) $f(-x) = \frac{\ln |-x|}{-x + 4} = \frac{\ln |x|}{-x + 4} \rightarrow$ No és simètrica.

f) $f(-x) = (2(-x)^2 - 1)^2 = (2x^2 - 1)^2 = f(x) \rightarrow$ Simètrica respecte de l'eix Y.

047 Estudia si les funcions següents són periòdiques i, en cas afirmatiu, determina'n el període:

a) $y = \cos 3x$ d) $y = 3 \cos x$

b) $y = \sin^2 x$ e) $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$

c) $y = \sin 4x$ f) $y = x^2 - \sin^2 x$

a)

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$
f(x)	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1

La funció és periòdica de període $\frac{2\pi}{3}$.

Representació de funcions

b)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	0	1	0	1	0

La funció és periòdica de període π .

c)

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{8}$
$f(x)$	0	1	0	-1	0	1

La funció és periòdica de període $\frac{2\pi}{4}$.

d)

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(x)$	3	0	-3	0	3

La funció és periòdica de període 2π .

e)

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$
$f(x)$	0	1	0	-1	0	1

La funció és periòdica de període $\frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi$.

f) Aquesta funció no és periòdica.

048 Troba el domini d'aquestes funcions i els punts de tall amb els eixos. Justifica si són parelles o imparelles, o bé si no són simètriques:

a) $y = \frac{x-1}{x^2}$

d) $y = \sqrt{4-x^2}$

b) $y = x^2 e^{-x}$

e) $y = 7 - 2x^2$

c) $y = \sqrt{25-x^2}$

f) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 7}$

a) Domini = $\mathbb{R} - \{0\}$

• Talls amb l'eix X: $y = 0 \rightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$

• Tall amb l'eix Y: no en té perquè la funció no està definida per a $x = 0$.

$f(-x) = \frac{-x-1}{(-x)^2} = \frac{-x-1}{x^2} \rightarrow$ No és simètrica.

b) Domini = $\mathbb{R}$

• Talls amb l'eix X: $y = 0 \rightarrow \frac{x^2}{e^x} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$f(-x) = \frac{(-x)^2}{e^{-x}} = x^2 e^x \rightarrow$ No és simètrica.

c) $25 - x^2 \geq 0 \rightarrow (5 - x)(5 + x) \geq 0 \rightarrow x \in [-5, 5] \rightarrow \text{Domini} = [-5, 5]$

• Talls amb l'eix X: $y = 0 \rightarrow \sqrt{25 - x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 5 \rightarrow (-5, 0), (5, 0)$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow (0, 5)$

$f(-x) = \sqrt{25 - (-x)^2} = \sqrt{25 - x^2} = f(x) \rightarrow \text{Simètrica respecte de l'eix Y}$

d) $4 - x^2 \geq 0 \rightarrow (2 - x)(2 + x) \geq 0 \rightarrow x \in [-2, 2] \rightarrow \text{Domini} = [-2, 2]$

• Talls amb l'eix X: $y = 0 \rightarrow \sqrt{4 - x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 2 \rightarrow (-2, 0), (2, 0)$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow (0, 2)$

$f(-x) = \sqrt{4 - (-x)^2} = \sqrt{4 - x^2} = f(x) \rightarrow \text{Simètrica respecte de l'eix Y}$

e) Domini = $\mathbb{R}$

• Talls amb l'eix X: $y = 0 \rightarrow 7 - 2x^2 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{7}{2}} \rightarrow \left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right), \left(\sqrt{\frac{7}{2}}, 0\right)$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow (0, 7)$

$f(-x) = 7 - 2(-x)^2 = 7 - 2x^2 = f(x) \rightarrow \text{Simètrica respecte de l'eix Y}$

f) $x^2 - 2x + 7 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R}$

• Talls amb l'eix X: $y = 0 \rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 7} = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 7 = 0$

$\rightarrow$ No té solucions per a cap x real $\rightarrow$ No talla l'eix X.

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = \sqrt{7} \rightarrow (0, \sqrt{7})$

$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 - 2(-x) + 7} = \sqrt{x^2 + 2x + 7} \rightarrow$ No és simètrica.

049 Determina les branques parabòliques d'aquestes funcions:

a) $f(x) = 9x + 6x^2 - x^4$ b) $g(x) = x^3 + 6x^2 - x + 4$ c) $h(x) = -x^4 - 7x^2 + x$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (9x + 6x^2 - x^4) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (9x + 6x^2 - x^4) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 6x^2 - x + 4) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 6x^2 - x + 4) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 - 7x^2 + x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 - 7x^2 + x) = -\infty$

050 Troba les asímptotes i les branques infinites de les funcions següents:

a) $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} - 1}$ b) $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ c) $h(x) = \frac{3x^3}{x^2 - 4}$ d) $v(x) = \frac{x^2 - 9}{x}$

a) $e^{2x} - 1 = 0 \rightarrow e^{2x} = 1 \rightarrow 2x = \ln 1 = 0 \rightarrow x = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} = \infty \rightarrow$ Asímtota vertical: $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^{2x} - 1} = 0 \rightarrow$ Asímtota horitzontal: $y = 0$

No té asímptotes obliqües ni branques parabòliques, perquè té asímtota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

Representació de funcions

b) $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+1} = \infty \rightarrow \text{Asíptota vertical: } x = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Asíptota horitzontal: } y = 1$$

No té asíptotes obliques ni branques parabòliques, perquè té asíptota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

c) $x^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^3}{x^2 - 4} = \infty \rightarrow \text{Asíptota vertical: } x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3}{x^2 - 4} = \infty \rightarrow \text{Asíptota horitzontal: } x = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3}{x^2 - 4} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3}{x^2 - 4} = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No té asíptotes horitzontals.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3}{x(x^2 - 4)} = 3 \rightarrow m = 3 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (h(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3}{x^2 - 4} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array} \right\}$$

$\rightarrow$ Asíptota obliqua: $y = 3x$

No té branques parabòliques, perquè té asíptota obliqua quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 9}{x} = \infty \rightarrow \text{Asíptota vertical: } x = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 9}{x} = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No té asíptotes horitzontals.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{v(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 9}{x^2} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (v(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 9}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-9}{x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array} \right\}$$

$\rightarrow$ Asíptota obliqua: $y = x$

No té branques parabòliques, perquè té asíptota obliqua quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

- 051 Digues quantes asímptotes verticals té aquesta funció: $f(x) = \frac{x+4}{x^2-16}$?

(Activitat de Selectivitat)

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{x^2-16} = \infty \rightarrow \text{Asímtota vertical: } x = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+4}{x^2-16} = \infty \rightarrow \text{Asímtota vertical: } x = 4$$

- 052 Donada la funció: $f(x) = 5 - \frac{x}{x^2-4}$, determina'n:

a) Les asímptotes verticals (calcula'n els límits laterals).

b) Les asímptotes horitzontals i les obliqües.

$$a) f(x) = 5 - \frac{x}{x^2-4} = \frac{5x^2-20-x}{x^2-4} \quad x^2-4=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{5x^2-20-x}{x^2-4} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{5x^2-20-x}{x^2-4} &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Asímtota vertical: } x = -2$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x^2-20-x}{x^2-4} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5x^2-20-x}{x^2-4} &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Asímtota vertical: } x = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-20-x}{x^2-4} = 5 \rightarrow \text{Asímtota horitzontal: } y = 5$$

No té asímptotes obliqües, perquè té asímtota horitzontal quan $x \rightarrow \infty$.

- 053 Considera la funció real de variable real definida per: $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2-4}$, $x \neq \pm 2$.
Determina les asímptotes de f .

(Activitat de Selectivitat)

$$x^2-4=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2+2}{x^2-4} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2+2}{x^2-4} &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Asímtota vertical: } x = -2$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+2}{x^2-4} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+2}{x^2-4} &= -\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Asímtota vertical: } x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2}{x^2-4} = 1 \rightarrow \text{Asímtota horitzontal: } y = 1$$

No té asímptotes obliqües, perquè té asímtota horitzontal quan $x \rightarrow \infty$.

Representació de funcions

054

Considera la funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per: $x \rightarrow \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
Calcula les asímptotes de $f(x)$.

Estudiem el domini de $f(x)$:

$$\frac{1+x}{1-x} \geq 0 \rightarrow \left. \begin{array}{l} 1+x \geq 0 \\ 1-x > 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq -1 \\ 1 < x \end{array} \right\} \rightarrow x \in [-1, 1) \\ \left. \begin{array}{l} 1+x \leq 0 \\ 1-x < 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x \leq -1 \\ 1 < x \end{array} \right\} \rightarrow \emptyset \quad \left. \vphantom{\frac{1+x}{1-x} \geq 0} \right\} \rightarrow \text{Dom } f = [-1, 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = +\infty \rightarrow \text{Asímtota vertical: } x = 1$$

En $x = -1$ no té asímtota vertical, perquè la funció està definida.

No té asímptotes horitzontals ni obliqües, perquè té el domini restringit.

055

Donada la funció $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$, calcula les asímptotes verticals

i les horitzontals, quan n'hi hagi.

(Activitat de Selectivitat)

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array} \right. \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \infty \rightarrow \text{Asímtota vertical: } x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \infty \rightarrow \text{Asímtota vertical: } x = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} = 0 \rightarrow \text{Asímtota horitzontal: } y = 0$$

No té asímptotes obliqües ni branques parabòliques ja que té una asímtota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

056

Considera la funció $f(x) = \frac{6x^2 - x^4}{8}$:

a) Calcula'n el domini.

b) Determina'n les asímptotes i els talls amb els eixos.

(Activitat de Selectivitat)

a) Domini = $\mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{6}{8}x^2 - \frac{1}{8}x^4$ és una funció polinòmica i, per tant, no té asímptotes.

• Tall amb l'eix X:

$$y = 0 \rightarrow 6x^2 - x^4 = 0 \rightarrow x^2(6 - x^2) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{6} \end{array} \right. \rightarrow (-\sqrt{6}, 0), (0, 0), (\sqrt{6}, 0)$$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

057 Considera la funció definida per a $x \neq -4$ per: $f(x) = \frac{4x^2 + 4}{x + 4}$

- a) Calcula'n el domini.
 b) Troba les asímptotes de la gràfica de f .
 c) Estudia la posició relativa de la gràfica de f respecte de les seves asímptotes.

a) $x + 4 = 0 \rightarrow x = -4 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-4\}$

b) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{4x^2 + 4}{x + 4} = \infty \rightarrow \text{Asímtota vertical: } x = -4$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 4}{x + 4} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 4}{x + 4} = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No té asímptotes horitzontals.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 4}{x(x + 4)} = 4 \rightarrow m = 4$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 4}{x + 4} - 4x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-16x + 4}{x + 4} = -16 \rightarrow n = -16 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Asímtota obliqua: } y = 4x - 16$$

- c) • Situació de la gràfica respecte de l'asímtota vertical:

Per l'esquerra: $\lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{4x^2 + 4}{x + 4} = -\infty$

Per la dreta: $\lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{4x^2 + 4}{x + 4} = +\infty$

- Situació de la gràfica respecte de l'asímtota obliqua:

$$x \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{4x^2 + 4}{x + 4} - (4x - 16) = \frac{68}{x + 4} > 0$$

$\rightarrow f(x)$ està per sobre de l'asímtota

$$x \rightarrow -\infty \rightarrow \frac{4x^2 + 4}{x + 4} - (4x - 16) = \frac{68}{x + 4} < 0$$

$\rightarrow f(x)$ està per sota de l'asímtota

058 Troba les asímptotes i les branques infinites de la funció següent i determina la posició relativa de la seva gràfica respecte de cadascuna:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x - 1}$$

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 1}{x - 1} = \infty \rightarrow \text{Asímtota vertical: } x = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 1}{x - 1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{x - 1} = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No té asímptotes horitzontals.}$$

Representació de funcions

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x(x-1)} = 2 \rightarrow m = 2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 1}{x-1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x-1} = 2 \rightarrow n = 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Asímtota obliqua: } y = 2x + 2$$

No té branques infinites, perquè hi ha asímtota obliqua.

- Situació de la gràfica respecte de l'asímtota vertical:

Per l'esquerra: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + 1}{x-1} = -\infty$ Per la dreta: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 + 1}{x-1} = +\infty$

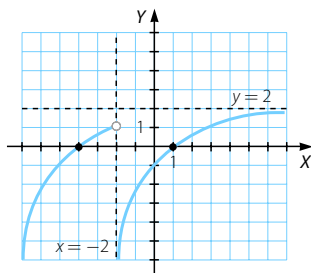
- Situació de la gràfica respecte de l'asímtota obliqua:

$$x \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{2x^2 + 1}{x-1} - (2x + 2) = \frac{3}{x-1} > 0 \rightarrow f(x) \text{ està per sobre de l'asímtota.}$$

$$x \rightarrow -\infty \rightarrow \frac{2x^2 + 1}{x-1} - (2x + 2) = \frac{3}{x-1} < 0 \rightarrow f(x) \text{ està per sota de l'asímtota.}$$

059 Dibuixa la gràfica d'una funció que tingui les característiques següents:

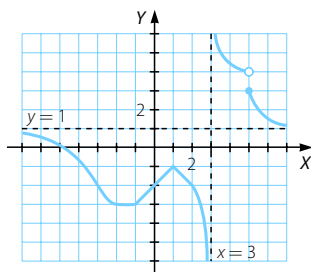
- El domini és tots els nombres reals.
- Talla l'eix X en els punts $x = 1$ i $x = -4$.
- Té com a asímtota vertical la recta $x = -2$.
- La recta $y = 2$ és una asímtota horitzontal si $x \rightarrow +\infty$.
- Té una branca infinita quan $x \rightarrow -\infty$.



060 Construeix una funció que verifiqui simultàniament aquestes característiques:

- És discontinua en $x = 3$ i $x = 5$.
- No és derivable en $x = 1$, $x = 3$ i $x = 5$.
- Té una asímtota vertical en $x = 3$.
- Té una asímtota horitzontal en $y = 1$.

(Activitat de Selectivitat)



061 Determina els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius de les funcions següents:

a) $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 3$

d) $y = x^4 - 24x^3$

b) $y = \frac{4x^2 + 1}{x}$

e) $y = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$

c) $y = \frac{1}{(x-3)^2}$

f) $y = \frac{x^4 + 2}{x}$

a) Domini = $\mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 + 12x - 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases}$$

• En $(-\infty, -5) \cup (1, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

• En $(-5, 1) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

En $x = -5$ presenta un màxim, i en $x = 1$, un mínim.

b) Domini = $\mathbb{R} - \{0\}$

$$y' = \frac{4x^2 - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

• En $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

• En $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

En $x = -\frac{1}{2}$ presenta un màxim, i en $x = \frac{1}{2}$, un mínim.

c) Domini = $\mathbb{R} - \{3\}$

$$y' = \frac{-2}{(x-3)^3} \neq 0 \text{ en tot el domini} \rightarrow \text{No té màxims ni mínims.}$$

• En $(-\infty, 3) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

• En $(3, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

d) Domini = $\mathbb{R}$

$$y' = 4x^3 - 72x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 18 \end{cases} \quad y'' = 12x^2 - 144x$$

En $x = 18 \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ presenta un mínim.

Per tant, en $(-\infty, 18)$ la funció és decreixent i en $(18, +\infty)$ és creixent.

e) Domini = $\mathbb{R}$

$$y' = \frac{3^x \ln 3 - 3^{-x} \ln 3}{2} = 0 \rightarrow 3^x - \frac{1}{3^x} = 0 \rightarrow (3^x)^2 - 1 = 0 \rightarrow 3^x = \pm 1$$

Només és possible $3^x = 1 \rightarrow x = \log_3 1 \rightarrow x = 0$

• En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

• En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

En $x = 0$ presenta un mínim.

Representació de funcions

f) Domini = $\mathbb{R} - \{0\}$

$$y' = \frac{3x^4 - 2}{x^2} = 0 \rightarrow 3x^4 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$$

• En $\left(-\infty, -\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right) \cup \left(\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

• En $\left(-\sqrt[4]{\frac{2}{3}}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

En $x = -\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ presenta un màxim, i en $x = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}$, un mínim.

062 Troba el creixement, el decreixement, els màxims i els mínims d'aquestes funcions:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$

b) $y = \frac{\ln x}{x^2}$

c) $y = \frac{x+4}{x-4}$

d) $y = \frac{x^2}{3^x}$

a) $x^2 - 2x \geq 0 \rightarrow x(x-2) \geq 0 \rightarrow$ Domini = $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

$$y' = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = 0 \rightarrow x = 1 \text{ que no es troba al domini}$$

• En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

• En $(2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

b) Domini = $(0, +\infty)$

$$y' = \frac{1-2\ln x}{x^3} = 0 \rightarrow 2\ln x = 1 \rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \sqrt{e}$$

• En $(0, \sqrt{e}) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

• En $(\sqrt{e}, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

En $x = \sqrt{e}$ presenta un màxim.

c) Domini = $\mathbb{R} - \{4\}$

$$y' = \frac{-8}{(x-4)^2} < 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \text{Funció decreixent}$$

d) Domini = $\mathbb{R}$

$$y' = \frac{2x - x^2 \ln 3}{3^x} = 0 \rightarrow x(2 - x \ln 3) = 0 \rightarrow x = 0, x = \frac{2}{\ln 3}$$

• En $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{\ln 3}, +\infty\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

• En $\left(0, \frac{2}{\ln 3}\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

En $x = \frac{2}{\ln 3}$ presenta un màxim.

- 063 Donada la funció $f(x) = 2 - \frac{x}{x^2 - 16}$, calcula'n els intervals de creixement i decreixement i els extrems relatius.

$$f(x) = 2 - \frac{x}{x^2 - 16} = \frac{2x^2 - 32 - x}{x^2 - 16}$$

$$x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm 4 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-4, 4\}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 16}{(x^2 - 16)^2} > 0 \rightarrow f(x) \text{ creixent en } \mathbb{R} - \{-4, 4\}$$

No presenta màxims ni mínims.

- 064 De la funció $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$, determina'n els intervals de monotonia i els extrems.

(Activitat de Selectivitat)

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

- En $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent
- En $(-2, 2) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

En $x = -2$ presenta un màxim, i en $x = 2$, un mínim.

- 065 Estudia la monotonia de

$$f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 7}$$

Determina si té màxims o mínims.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 1}{(x^2 - 4x + 7)^2} = 0 \rightarrow -x^2 + 4x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{3} = 0,27 \\ x = 2 + \sqrt{3} = 3,73 \end{cases}$$

- En $(-\infty, 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ Funció decreixent
- En $(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ Funció creixent

En $x = 2 - \sqrt{3}$ $f(x)$ presenta un mínim, i en $x = 2 + \sqrt{3}$, un màxim.

- 066 Considera la funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida per: $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x+2}$
Determina'n els intervals de creixement i decreixement, i també els màxims i els mínims.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2} = 0 \rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$$

- En $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ Funció creixent
- En $(-3, -2) \cup (-2, -1) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ Funció decreixent

$x = -3 \rightarrow f(-3) = -4 \rightarrow (-3, -4)$ Màxim

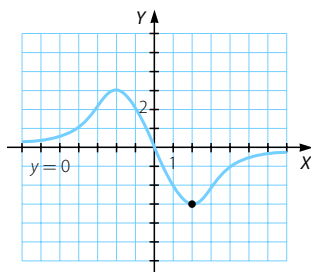
$x = -1 \rightarrow f(-1) = 0 \rightarrow (-1, 0)$ Mínim

Representació de funcions

067

Dibuixa la gràfica d'una funció que compleixi les propietats següents:

- Està definida en tota la recta real.
- És simètrica respecte de l'origen.
- L'eix X és una asímptota horitzontal.
- Té un mínim en el punt $(2, -3)$.



068

Considera la funció següent: $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$

Determina'n:

- El domini.
- Els punts de tall amb els eixos de coordenades.
- Si la gràfica és simètrica respecte de l'origen o respecte de l'eix Y .
- Les asímptotes.
- Els intervals de creixement i decreixement.
- Els màxims i els mínims.

a) $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b) Talls amb l'eix X : $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2}{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
Tall amb l'eix Y : $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

c) $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1} = f(x) \rightarrow$ És simètrica respecte de l'eix Y .

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ Asímptota vertical: $x = -1$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \infty \rightarrow$ Asímptota vertical: $x = 1$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1 \rightarrow$ Asímptota horitzontal: $y = 1$

No té asímptotes obliqües ni branques parabòliques, perquè té asímptota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

e) $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

- En $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent
- En $(0, 1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

f) $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$ Màxim

No presenta mínims.

069 Considera la funció: $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

- Estudia'n el domini.
- Troba els punts en els quals la gràfica talla els eixos de coordenades.
- Analitza si la gràfica és simètrica respecte de l'origen o respecte de l'eix Y.
- Calcula les asímptotes.
- Determina els intervals de creixement i de decreixement.
- Troba els màxims i els mínims.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

b) Talls amb l'eix X: $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x+1}{x^2} = 0 \rightarrow x+1=0 \rightarrow x=-1 \rightarrow (-1, 0)$

Tall amb l'eix Y: no en té.

c) $f(-x) = \frac{-x+1}{(-x)^2} = \frac{-x+1}{x^2}$

$\rightarrow$ No és simètrica perquè $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$.

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x^2} = \infty \rightarrow$ Asímtota vertical: $x=0$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x^2} = 0 \rightarrow$ Asímtota horitzontal: $y=0$

No té asímptotes obliqües ni branques parabòliques, perquè té asímtota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

e) $f'(x) = \frac{-x-2}{x^3} = 0 \rightarrow x=-2$

- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent
- En $(-2, 0) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

f) $x=-2 \rightarrow f(-2) = \frac{-1}{4} \rightarrow \left(-2, \frac{-1}{4}\right)$ Mínim

No presenta màxims.

070 Donada la funció $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$, calcula, si existeixen:

- Els intervals de creixement i els de decreixement.
- Els màxims relatius i els mínims relatius.

(Activitat de Selectivitat)

a) $x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

$f'(x) = \frac{-2x+2}{(x^2-2x-3)^2} = 0 \rightarrow 2x=2 \rightarrow x=1$

- En $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent
- En $(1, 3) \cup (3, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

- b) En $x=1$ s'aconsegueix un màxim.

No hi ha mínims.

Representació de funcions

071

Determina els intervals de concavitat i convexitat i els punts d'inflexió de les funcions següents:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 6$

b) $y = \frac{x-2}{x+2}$

c) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

d) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

a) Dominio = $\mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 - 6x + 2$$

$$y'' = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$$

• En $(-\infty, 1) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

• En $(1, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

En $x = 1$ presenta un punt d'inflexió.

b) Domini = $\mathbb{R} - \{-2\}$

$$y' = \frac{4}{(x+2)^2}$$

$$y'' = \frac{-8}{(x+2)^3} \neq 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{-2\}$$

No presenta punts d'inflexió.

• En $(-\infty, -2) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

• En $(-2, +\infty) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

c) Domini = $\mathbb{R}$

$$y' = 4x^3 - 16x$$

$$y'' = 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{16}{12}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

• En $\left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

• En $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

En $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ presenta punts d'inflexió.

d) Domini = $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$y' = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$y'' = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3} \neq 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

No presenta punts d'inflexió.

• En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

• En $(-1, 1) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

072 Troba la concavitat i la convexitat i les punts d'inflexió d'aquestes funcions:

a) $y = x^2 e^x$ b) $y = \frac{x}{\ln x}$ c) $y = x - \sin x$ d) $y = \sqrt{x^2 - 16}$

a) Domini = $\mathbb{R}$

$$y' = e^x(2x + x^2) \quad y'' = e^x(2 + 4x + x^2) = 0 \rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$$

• En $(-\infty, -2 - \sqrt{2}) \cup (-2 + \sqrt{2}, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

• En $(-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

En $x = -2 \pm \sqrt{2}$ presenta punts d'inflexió.

b) Domini = $(0, +\infty) - \{1\}$

$$y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$$y'' = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} = 0 \rightarrow \ln x = 2 \rightarrow x = e^2$$

• En $(0, 1) \cup (e^2, +\infty) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

• En $(1, e^2) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

En $x = e^2$ presenta un punt d'inflexió.

c) Domini = $\mathbb{R}$

$$y' = 1 - \cos x \quad y'' = \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \text{ amb } k \in \mathbb{Z}$$

• En $(2k', 2k' + 1)$ amb $k' \in \mathbb{Z} \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

• En $(2k' + 1, 2k')$ amb $k' \in \mathbb{Z} \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

En els punts $x = k\pi$ amb $k \in \mathbb{Z}$ presenta punts d'inflexió.

d) Domini = $\mathbb{R} - \{-4, 4\}$

$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}$$

$$y'' = \frac{-16}{(x^2 - 16)\sqrt{x^2 - 16}} < 0 \text{ en } (-\infty, -4) \cup (4, +\infty) \rightarrow \text{Funció còncava}$$

No presenta punts d'inflexió.

073 Determina els intervals de creixement, de decreixement, de concavitat i de convexitat de la funció $y = \ln(x^2 + 1)$; troba'n també els màxims, els mínims i els punts d'inflexió.

$$\text{Domini} = \mathbb{R} \quad y' = \frac{2x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 0$$

• En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

• En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

En $x = 0$ presenta un mínim.

$$y'' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

• En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

• En $(-1, 1) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

En $x = -1$ i en $x = 1$ presenta punts d'inflexió.

Representació de funcions

074 Per a la funció $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la forma $f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x$, determina'n:

a) La monotonia i els extrems relatius.

b) La curvatura i el punt d'inflexió.

(Activitat de Selectivitat)

$$a) f'(x) = 24x^2 - 168x + 240 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

• En $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

• En $(2, 5) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

En $x = 2$ s'aconsegueix un màxim, i en $x = 5$, un mínim.

$$b) f''(x) = 48x - 168 = 0 \rightarrow x = \frac{7}{2}$$

• En $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ còncava

• En $\left(\frac{7}{2}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa

En $x = \frac{7}{2}$ s'aconsegueix un punt d'inflexió.

075 Calcula els intervals de creixement i decreixement, els extrems relatius, els intervals de concavitat i convexitat i els punts d'inflexió de la funció $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$.

$$\text{Domini} = \mathbb{R} \quad y' = 3x^2 - 6x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$$

• En $\left(-\infty, \frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{6}}{3}, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

• En $\left(\frac{3 - \sqrt{6}}{3}, \frac{3 + \sqrt{6}}{3}\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

En $x = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}$ presenta un màxim, i en $x = \frac{3 + \sqrt{6}}{3}$, un mínim.

$$y'' = 6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1$$

• En $(-\infty, 1) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

• En $(1, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

En $x = 1$ presenta un punt d'inflexió.

076 Estudia en quins intervals la funció $f(x) = 3x^3 + x^2 - 1$ és creixent o decreixent i en quins intervals és còncava o convexa.

Digues si té cap màxim o mínim. Presenta punts d'inflexió? En cas afirmatiu, determina les coordenades de cadascun dels punts.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 9x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(9x + 2) = 0 \rightarrow x = 0, x = -\frac{2}{9}$$

$$\bullet \text{ En } \left(-\infty, -\frac{2}{9}\right) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ creixent}$$

$$\bullet \text{ En } \left(-\frac{2}{9}, 0\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ decreixent}$$

$$x = -\frac{2}{9} \rightarrow f\left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{-239}{243} \rightarrow \left(-\frac{2}{9}, \frac{-239}{243}\right) \text{ Màxim}$$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = -1 \rightarrow (0, -1) \text{ Mínim}$$

$$f''(x) = 18x + 2 = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{18} = -\frac{1}{9}$$

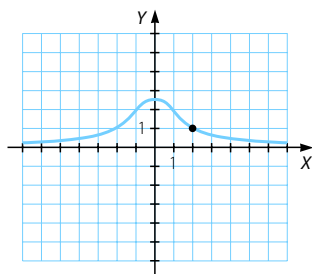
$$\bullet \text{ En } \left(-\infty, -\frac{1}{9}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ còncava}$$

$$\bullet \text{ En } \left(-\frac{1}{9}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ convexa}$$

$$x = -\frac{1}{9} \rightarrow f\left(-\frac{1}{9}\right) = \frac{-241}{243} \rightarrow \left(-\frac{1}{9}, \frac{-241}{243}\right) \text{ punt d'inflexió.}$$

077 Dibuixa la gràfica d'una funció que compleixi aquestes característiques:

- Està definida en tota la recta real.
- És simètrica respecte de l'eix d'ordenades.
- L'eix X és una asímptota horitzontal.
- Té un punt d'inflexió en $(2, 1)$.



078 Estudia el creixement i la concavitat de la funció $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = \frac{Lx}{x}$. (L és logaritme neperià.)

(Activitats de Selectivitat)

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

$$\bullet \text{ En } (0, e) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ creixent}$$

$$\bullet \text{ En } (e, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ decreixent}$$

En $x = e$ presenta un màxim.

Representació de funcions

$$f''(x) = \frac{\frac{-1}{x}x^2 - (1 - \ln x)2x}{x^4} = \frac{-1 - (1 - \ln x)2}{x^3} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3} = 0$$

$$\rightarrow \ln x = \frac{3}{2} \rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \rightarrow x = \sqrt{e^3}$$

- En $(0, \sqrt{e^3}) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ còncava
- En $(\sqrt{e^3}, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa

En $x = \sqrt{e^3}$ presenta un punt d'inflexió.

079

Considera $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x-1}{x + \frac{1}{2}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

Calcula els intervals de creixement, de decreixement, la concavitat i la convexitat de $f(x)$.

(Activitat de Selectivitat)

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x-1}{x + \frac{1}{2}} = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 2 = -2 \end{array} \right\} \rightarrow f(x) \text{ contínua en } x = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \frac{2\left(x + \frac{1}{2}\right) - (2x-1)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent
- En $(0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

En $x = 0$ s'aconsegueix un màxim.

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ \frac{-4}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(0, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa

080

Dibuixa la gràfica de les funcions polinòmiques següents, després que n'hagis analitzat les característiques:

a) $y = x^3 - 4x^2 - x + 4$

c) $y = x^3 + 3x$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$

d) $y = x^4 - 8x^2 + 7$

a) Domini = $\mathbb{R}$

- Talls amb l'eix X: $y = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow (-1, 0), (1, 0), (4, 0)$
- Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$

Com que és una funció polinòmica, només té branques parabòliques.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 4x^2 - x + 4) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 4x^2 - x + 4) = +\infty$$

$$y' = 3x^2 - 8x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{19}}{3}$$

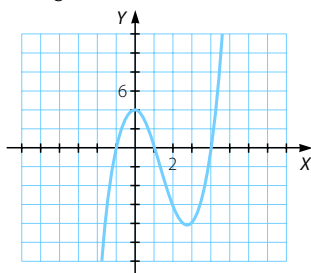
- En $\left(-\infty, \frac{4 - \sqrt{19}}{3}\right) \cup \left(\frac{4 + \sqrt{19}}{3}, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent
- En $\left(\frac{4 - \sqrt{19}}{3}, \frac{4 + \sqrt{19}}{3}\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

En $x = \frac{4 - \sqrt{19}}{3}$ presenta un màxim, i en $x = \frac{4 + \sqrt{19}}{3}$, un mínim.

$$y'' = 6x - 8 = 0 \rightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

- En $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava
- En $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

En $x = \frac{4}{3}$ presenta un punt d'inflexió.



b) Domini = $\mathbb{R}$

- Talls amb l'eix X: no podem resoldre l'equació per Ruffini; així, doncs, l'analitzarem després.
- Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$

Com que és una funció polinòmica, només té branques parabòliques.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 12x + 4) = -\infty \qquad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 6x^2 + 12x + 4) = +\infty$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 12 = 0 \rightarrow x = 2$$

- En $(-\infty, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent
- En $(2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

No presenta màxims ni mínims.

$$y'' = 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$$

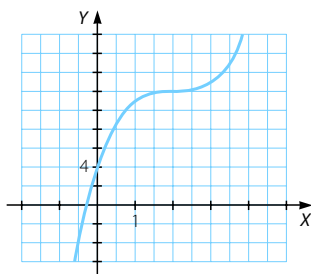
- En $(-\infty, 2) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava
- En $(2, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

En $x = 2$ presenta un punt d'inflexió.

Finalment, com que en $(-\infty, 2)$ la funció és creixent, la imatge de 0 és positiva

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 6x^2 + 12x + 4) = -\infty,$$

hi ha un punt de tall en $(-\infty, 0)$.



Representació de funcions

c) Domini = $\mathbb{R}$

- Talls amb l'eix X: $x^3 + 3x = 0 \rightarrow x(x^2 + 3) = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

Com que és una funció polinòmica, només té branques parabòliques.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 3x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x) = +\infty$$

$$y' = 3x^2 + 3 \neq 0 \rightarrow \text{Funció creixent}$$

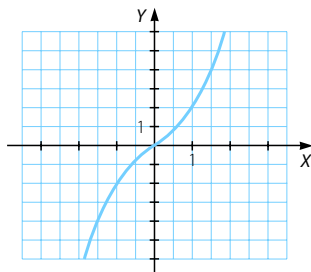
No presenta màxims ni mínims.

$$y'' = 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

• En $(-\infty, 0) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

• En $(0, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

En $x = 0$ presenta un punt d'inflexió.



d) Domini = $\mathbb{R}$

- Talls amb l'eix X: $y = 0 \rightarrow x^4 - 8x^2 + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{7} \end{cases}$
- Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 7 \rightarrow (0, 7)$

Com que és una funció polinòmica, només té branques parabòliques.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 8x^2 + 7) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 8x^2 + 7) = +\infty$$

$$y' = 4x^3 - 16x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

• En $(-\infty, -2) \cup (0, 2) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

• En $(-2, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

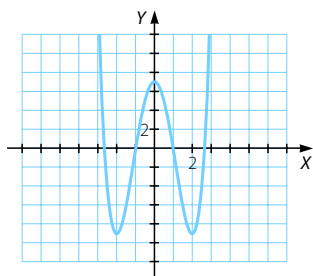
En $x = -2$ i en $x = 2$ presenta dos mínims, i en $x = 0$, un màxim.

$$y'' = 12x^2 - 16 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{16}{12}} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

• En $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{4}{3}}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

• En $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}, \sqrt{\frac{4}{3}}\right) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

En $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ presenta punts d'inflexió.



081 Donada la funció $y = x^3 + x^2 - 5x + 3$, determina'n:

- El domini i els punts de tall amb els eixos de coordenades.
- Els intervals de creixement i decreixement.
- Els màxims i els mínims locals.
- La representació gràfica a partir de la informació dels apartats anteriors.

(Activitat de Selectivitat)

a) Domini = $\mathbb{R}$

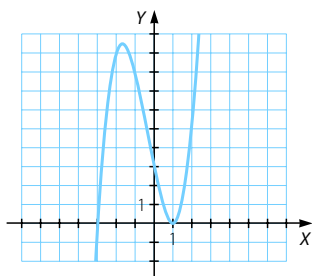
- Talls amb l'eix X : $y = 0 \rightarrow x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$
- Talls amb l'eix Y : $x = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow (0, 3)$

b) $y' = 3x^2 + 2x - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{5}{3} \end{cases}$

- En $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (1, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent
- En $\left(-\frac{5}{3}, 1\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

c) En $x = -\frac{5}{3}$ s'aconsegueix un màxim, i en $x = 1$, un mínim.

d)



082 Calcula els valors dels paràmetres a i b perquè la funció:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

tingui un extrem relatiu en $x = 2$, un punt d'inflexió en $x = 0$ i passi pel punt $(1, -5)$.

Representa gràficament aquesta funció.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

Té un extrem relatiu en $x = 2$:

$$f'(2) = 0 \rightarrow 12 + 4a + b = 0$$

Té un punt d'inflexió en $x = 0$:

$$f''(0) = 0 \rightarrow 2a = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow b = -12$$

Representació de funcions

Passa pel punt $(1, -5)$:

$$f(1) = -5 \rightarrow 1 + a + b + c = -5 \rightarrow 1 - 12 + c = -5 \rightarrow c = 6$$

Per tant, la funció és:

$$f(x) = x^3 - 12x + 6$$

Per aconseguir la representació gràfica, n'analitzem les característiques.

$\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Talls amb l'eix X :

$$f(x) = 0 \rightarrow x^3 - 12x + 6 = 0$$

No podem resoldre l'equació per Ruffini, perquè no té com a arrel cap dels divisors de 6.

- Tall amb l'eix Y :

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 6 \rightarrow (0, 6)$$

Com que f és una funció polinòmica, només té branques parabòliques.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 12x + 6) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 12x + 6) = +\infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

- En $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

- En $(-2, 2) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

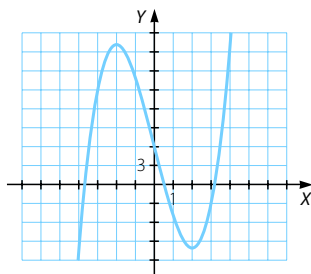
En $x = -2$ presenta un màxim, i en $x = 2$, un mínim.

$$f''(x) = 6x = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ còncava

- En $(0, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa

En $x = 0$ presenta un punt d'inflexió.



083

En un model de cotxe, el consum de combustible, per a velocitats incloses entre 20 i 160 km/h, està determinat per $C(x) = 8 - 0,045x + 0,00025x^2$ i l'expressem en litres consumits cada 100 km, recorreguts a una velocitat constant de x km/h.

a) Quants litres cada 100 km consumeix el cotxe si el condueixen a una velocitat de 120 km/h?

b) A quina velocitat consumeix menys? I quant consumeix?

c) A quines velocitats l'han de conduir perquè consumeixi 10 litres cada 100 km?

(Activitat de Selectivitat)

a) $C(120) = 8 - 5,4 + 3,6 = 6,2$

Si condueixen a una velocitat de 120 km/h, consumirà 6,2 litres cada 100 km.

b) $C'(x) = -0,045 + 0,0005x = 0 \rightarrow x = 90$

$C''(x) = 0,0005 > 0 \rightarrow$ En $x = 90$ s'aconsegueix un mínim; així doncs, a 90 km/h consumeix menys.

A aquesta velocitat consumirà: $C(90) = 8 - 4,05 + 2,025 = 5,975$ litres

c) $10 = 8 - 0,045x + 0,00025x^2 \rightarrow 0,00025x^2 - 0,045x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -36,886 \\ x = 216,89 \end{cases}$

Aquestes velocitats no es troben entre $[0, 160]$, per tant, no és possible consumir 10 litres de gasolina si condueixen a les velocitats de definició de la funció.

084

Els beneficis mensuals d'un artesà, expressats en euros, quan fabrica i ven x objectes, estan determinats per la funció $B(x) = -0,5x^2 + 50x - 800$, en la qual $20 \leq x \leq 60$.

- Troba el benefici que aconseguir de fabricar i vendre 20 objectes i el de fabricar i vendre 60 objectes.
- Troba el nombre d'objectes que ha de fabricar i vendre per aconseguir el benefici màxim, i també aquest benefici màxim.
- Fes un esbós de la gràfica de la funció $B(x)$.

(Activitat de Selectivitat)

a) $B(20) = -200 + 1.000 - 800 = 0$

Així doncs, de fabricar i vendre 20 objectes no hi ha benefici.

$B(60) = -1.800 + 3.000 - 800 = 400$

Per tant, de fabricar i vendre 60 objectes obté 400 € de beneficis.

b) $B'(x) = -x + 50 = 0 \rightarrow x = 50$

$B''(x) = -1 < 0 \rightarrow$ En $x = 50$ s'aconsegueix un màxim.

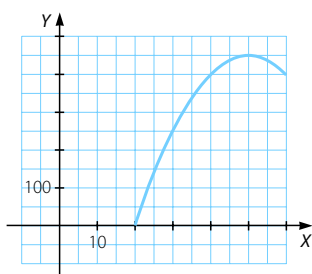
$B(50) = -1.250 + 2.500 - 800 = 450$

Així doncs, per obtenir el benefici màxim ha de fabricar i vendre 50 objectes, i aquest benefici màxim és de 450 €.

- c) Representem gràficament la funció en l'interval $(20, 60)$.

- En $(0, 50) \rightarrow B'(x) > 0 \rightarrow B(x)$ creixent
- En $(50, 60) \rightarrow B'(x) < 0 \rightarrow B(x)$ decreixent

Passa per $(20, 0)$ i per $(60, 400)$, i el màxim és $(50, 450)$.



Representació de funcions

085

Han comprovat que el nombre de passatgers de la terminal internacional d'un aeroport està determinat, com a funció de l'hora del dia, per mitjà de l'expressió:
 $N(t) = -5(\alpha - t)^2 + \beta$, $0 \leq t \leq 24$

- a) Calcula α i β . Justifica la resposta.
b) Representa la funció que has obtingut.

(Activitat de Selectivitat)

a) Passa per $(12, 1.200) \rightarrow N(12) = 1.200 \rightarrow -5(\alpha - 12)^2 + \beta = 1.200$

$$N'(t) = 10(\alpha - t) \rightarrow N'(12) = 10(\alpha - 12) = 0 \rightarrow \alpha = 12$$

Així doncs, $\beta = 1.200$.

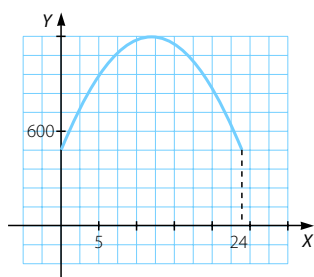
b) $N(t) = -5(12 - t)^2 + 1.200$

$$N(0) = -720 + 1.200 = 480$$

$$N(24) = -720 + 1.200 = 480$$

El màxim s'aconsegueix en el punt $(12, 1.200)$.

És creixent en $(0, 12)$ i decreixent en $(12, 24)$.



086

Un estudi indica que, entre les 12.00 i les 19.00 hores d'un dia laborable típic, la velocitat, en km/h, del trànsit en una sortida de l'autopista està determinada per:
 $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 20$ si $0 \leq x \leq 7$

Representa gràficament $f(x)$ i estudia: el punt de tall amb l'eix Y, els intervals de creixement i decreixement, i els intervals de concavitat i convexitat. Calcula les hores en les quals presenta màxims, mínims i punts d'inflexió per a la velocitat del trànsit.

(Activitat de Selectivitat)

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 20 \rightarrow (0, 20)$

$$f'(x) = 6x^2 - 42x + 60 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

Tal com indica l'enunciat, només analitzem la funció en l'interval $[0, 7]$.

• En $(0, 2) \cup (5, 7) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

• En $(2, 5) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

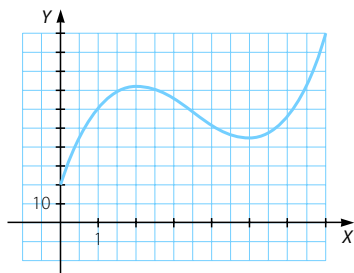
$$f''(x) = 12x - 42 = 0 \rightarrow x = \frac{42}{12} = \frac{7}{2}$$

• En $\left(0, \frac{7}{2}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ còncava

• En $\left(\frac{7}{2}, 7\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa

Al cap de 2 hores la velocitat és màxima i al cap de 5 hores la velocitat és mínima.

Al cap de 3 hores i mitja la velocitat aconsegueix un punt d'inflexió.



- 087 Un dirigent d'un partit polític determinat diu que dimitirà si el percentatge de votants del partit no arriba al 20 %. Estimen que el percentatge de participació en la consulta serà almenys del 40 %, i que el percentatge de votants al partit dependrà del percentatge de participació segons aquesta funció (P indica el percentatge de votants al partit, i x , el de participació):

$$P(x) = -0,00025x^3 + 0,045x^2 - 2,4x + 50 \quad \text{si } 40 \leq x \leq 100$$

- a) Indica quant creix el percentatge de votants al partit i quant decreix.

D'acord amb la funció, és possible que el dirigent no hagi de dimitir?

- b) Dibuixa la gràfica de la funció.

(Activitat de Selectivitat)

$$a) \quad P'(x) = -0,00075x^2 + 0,09x - 2,4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ x = 80 \end{cases}$$

$$P''(x) = -0,0015x + 0,09$$

$$P''(40) = 0,0276 > 0 \rightarrow \text{En } x = 40 \text{ presenta un mínim.}$$

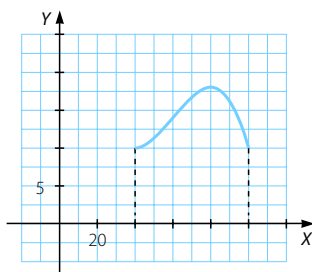
$$P''(80) = -0,0348 < 0 \rightarrow \text{En } x = 80 \text{ presenta un màxim.}$$

Així doncs, en $(40, 80)$ el percentatge de votants al partit creix, i en $(80, 100)$, decreix, per la qual cosa en $x = 100$ presenta un altre mínim.

El dirigent no haurà de dimitir si el valor màxim que agafa la funció és més gran o igual que 20.

Com que $P(80) = 18$ el dirigent sí que haurà de dimitir.

$$b) \quad P(40) = 10 \quad P(100) = 10$$



Representació de funcions

088

Dibuixa la gràfica d'aquestes funcions racionals, després que n'hagis analitzat les característiques:

a) $y = \frac{x-1}{x^2}$ b) $y = \frac{x-2}{x-3}$ c) $y = \frac{x^2}{x+1}$ d) $y = \frac{x}{x^2+1}$

a) $x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R} - \{0\}$

- Talls amb l'eix X: $y = 0 \rightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$
- Tall amb l'eix Y: no en té perquè no està definida per a $x = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2} = \infty \rightarrow \text{Asímtota vertical: } x = 0$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow \text{Asímtota horitzontal: } y = 0$

No té asímtotes obliqües ni branques parabòliques, perquè té una asímtota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

$y' = \frac{-x+2}{x^3} = 0 \rightarrow x = 2$

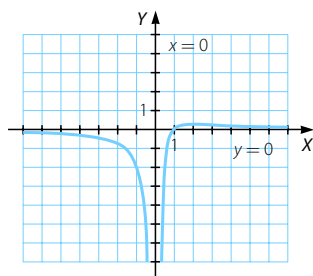
- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow \text{Funció decreixent}$
- En $(0, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow \text{Funció creixent}$

En $x = 2$ presenta un màxim.

$y'' = \frac{2x-6}{x^4} = 0 \rightarrow x = 3$

- En $(-\infty, 0) \cup (0, 3) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow \text{Funció còncava}$
- En $(3, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow \text{Funció convexa}$

En $x = 3$ presenta un punt d'inflexió.



b) $x-3 = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R} - \{3\}$

- Talls amb l'eix X: $y = 0 \rightarrow \frac{x-2}{x-3} = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$
- Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = \frac{2}{3} \rightarrow \left(0, \frac{2}{3}\right)$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x-3} = \infty \rightarrow \text{Asímtota vertical: } x = 3$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x-3} = 1 \rightarrow \text{Asímtota horitzontal: } y = 1$

No té asímtotes obliqües ni branques parabòliques, perquè té una asímtota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

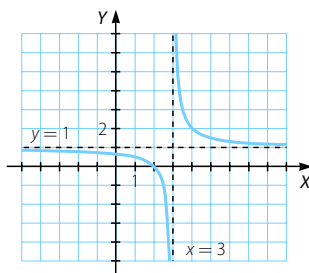
$$y' = \frac{-1}{(x-3)^2} < 0 \rightarrow \text{Funció decreixent}$$

No presenta màxims ni mínims.

$$y'' = \frac{2}{(x-3)^3} \neq 0$$

No presenta punts d'inflexió.

- En $(-\infty, 3) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava
- En $(3, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa



c) $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R} - \{-1\}$

- Talls amb l'eix X: $y = 0 \rightarrow \frac{x^2}{x+1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x+1} = \infty \rightarrow \text{Asíntota vertical: } x = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x+1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No té asíntotes horitzontals.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \rightarrow n = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Asíntota obliqua: } y = x - 1$$

No té branques parabòliques, perquè té una asíntota obliqua quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

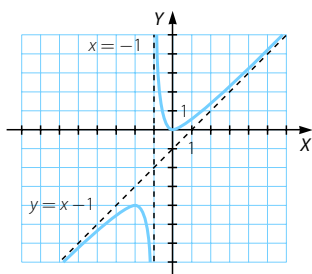
$$y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

- En $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent
- En $(-2, -1) \cup (-1, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

En $x = -2$ presenta un màxim, i en $x = 0$ un mínim.

$$y'' = \frac{2}{(x+1)^3} \neq 0 \rightarrow \text{No presenta punts d'inflexió.}$$

- En $(-\infty, -1) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava
- En $(-1, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa



Representació de funcions

d) Domini = $\mathbb{R}$

- Talls amb l'eix X: $y = 0 \rightarrow \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow \text{Asíptota horitzontal: } y = 0$$

No té asímptotes obliqües ni branques parabòliques, perquè té una asíptota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

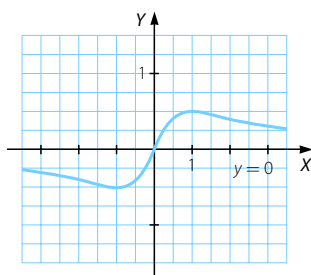
$$y' = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent
- En $(-1, 1) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

En $x = 1$ presenta un màxim, i en $x = -1$, un mínim.

$$y'' = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = 0 \rightarrow x(2x^2 - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

- En $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava
 - En $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa
- En $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ i $x = \sqrt{3}$ presenta punts d'inflexió.



089 Representa aquesta funció: $f(x) = \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1}$

Dom $f = \mathbb{R}$

- Talls amb l'eix X: no en té perquè $\frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1} \neq 0$ en $\mathbb{R}$.
- Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow (0, 3)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + 3}{x^2 + 1} = 3 \rightarrow \text{Asíptota horitzontal: } y = 3$$

No té asímptotes obliqües ni branques parabòliques, perquè té una asíptota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent
- En $(-1, 1) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

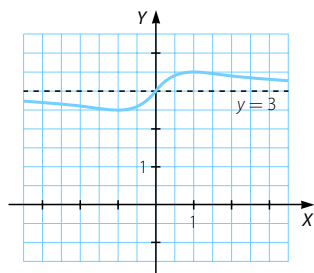
En $x = 1$ presenta un màxim, i en $x = -1$, un mínim.

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

• En $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ còncava

• En $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa

En $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ i $x = \sqrt{3}$ presenta punts d'inflexió.



090

Considera la funció $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

a) Calcula les asímptotes i el domini de definició de la funció.

b) Determina'n els intervals de creixement i decreixement.

c) Representa gràficament la funció $f(x)$.

(Activitat de Selectivitat)

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

• Talls amb l'eix X: $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x}{x-2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

• Talls amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2} = \infty \rightarrow$ Asímtota vertical: $x = 2$

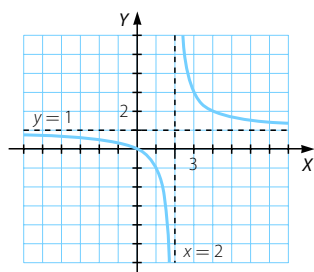
$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-2} = 1 \rightarrow$ Asímtota horitzontal: $y = 1$

No té asímptotes obliqües ni branques parabòliques perquè té asímtota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

b) $f'(x) = \frac{-2}{(x-2)^2} < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent en $\mathbb{R} - \{2\}$

No presenta màxims ni mínims.

c)



Representació de funcions

091

Considera la funció real de variable real $f(x) = \frac{2x+1}{x}$.

- Determina el domini de la funció i els intervals en els quals és creixent o decreixent.
- Troba'n les asímptotes.
- Dibuixa un esbós de la gràfica de la funció.

(Activitat de Selectivitat)

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

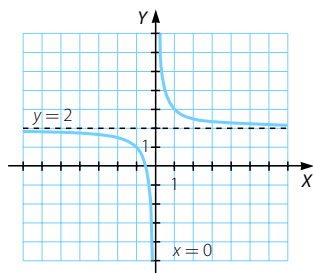
$$f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0 \rightarrow f(x) \text{ decreixent en } \mathbb{R} - \{0\} \text{ i no té extrems relatius.}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x+1}{x} = \infty \rightarrow$ Asímtota vertical: $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x} = 2 \rightarrow \text{Asímtota horitzontal: } y = 2$$

No té asímptotes obliqües ni branques parabòliques perquè té asímtota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

- c) • Talls amb l'eix X: $f(x) = 0 \rightarrow \frac{2x+1}{x} = 0 \rightarrow x = \frac{-1}{2} \rightarrow \left(\frac{-1}{2}, 0\right)$
• Talls amb l'eix Y: no en té.



092

Donada la corba d'equació $y = \frac{1}{2(x+1)}$:

- Determina'n els punts de tall amb els eixos de coordenades.
- Determina'n les asímptotes.
- Fes una representació gràfica aproximada de la corba.

(Activitat de Selectivitat)

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1\}$

• Talls amb l'eix X: $f(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{2(x+1)} \neq 0 \rightarrow$ No en té.

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{1}{2} \rightarrow \left(0, \frac{1}{2}\right)$

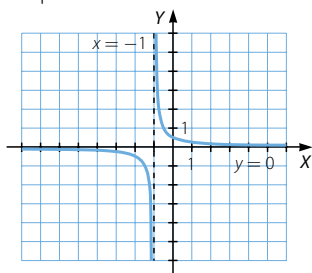
$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{2(x+1)} = 0 \rightarrow \text{Asímtota vertical: } x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2(x+1)} = 0 \rightarrow \text{Asímtota horitzontal: } y = 0$$

No té asímtotes obliques ni branques parabòliques perquè té asímtota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

$$c) y' = \frac{-1}{2(x+1)^2} < 0 \rightarrow \text{Funció decreixent en } \mathbb{R} - \{-1\}$$

No presenta màxims ni mínims.



093 Donada la funció $f(x) = \frac{4x^2 + x + 3}{3 + 4x^2}$:

- Troba els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$, i també els possibles màxims, mínims i punts d'inflexió.
- Representa la gràfica de la funció $y = f(x)$, i indica de manera detallada quin és el domini i quines són les asímtotes.

(Activitat de Selectivitat)

$$a) f'(x) = \frac{3 - 4x^2}{(3 + 4x^2)^2} = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\bullet \text{ En } \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, +\infty\right) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ decreixent}$$

$$\bullet \text{ En } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ creixent}$$

$$\text{En } x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ presenta un mínim, i en } x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ un màxim.}$$

$$f''(x) = \frac{32x^3 - 72x}{(3 + 4x^2)^3} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ En } \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(0, \frac{3}{2}\right) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ còncava}$$

$$\bullet \text{ En } \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ convexa}$$

$$\text{En } x = 0 \text{ i } x = \pm \frac{3}{2} \text{ presenta punts d'inflexió.}$$

Representació de funcions

b) Dom $f = \mathbb{R}$

• Talls amb l'eix X : no en té perquè $\frac{4x^2 + x + 3}{4x^2 + 3} \neq 0$ en $\mathbb{R}$.

• Tall amb l'eix Y : $x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 1)$

No té asímptotes verticals.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + x + 3}{4x^2 + 3} = 1 \rightarrow$ Asímtota horitzontal: $y = 1$

Posició de la corba respecte de l'asímtota:

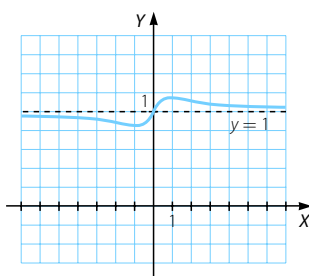
$x \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{4x^2 + x + 3}{3 + 4x^2} - 1 = \frac{x}{3 + 4x^2} > 0$

$\rightarrow f(x)$ està per sobre de l'asímtota.

$x \rightarrow -\infty \rightarrow \frac{4x^2 + x + 3}{3 + 4x^2} - 1 = \frac{x}{3 + 4x^2} < 0$

$\rightarrow f(x)$ està per sota de l'asímtota.

No té asímptotes obliques ni branques parabòliques perquè té asímtota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.



094

Donada la funció $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$, determina'n:

a) El domini i els punts de tall amb els eixos de coordenades.

b) L'equació de les asímptotes verticals i horitzontals.

c) Els intervals de creixement i de decreixement.

d) Els màxims i els mínims locals.

e) La representació gràfica a partir de la informació dels apartats anteriors.

(Activitat de Selectivitat)

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

• Talls amb l'eix X : $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3}{1-x^2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

• Talls amb l'eix Y : $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{1-x^2} = \infty \rightarrow$ Asímtota vertical: $x = 1$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3}{1-x^2} = \infty \rightarrow$ Asímtota vertical: $x = -1$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow$ No té asímptotes horitzontals.

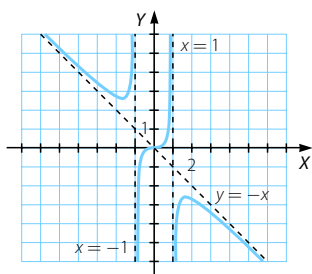
$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(1-x^2)} = -1 \rightarrow m = -1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{1-x^2} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x^2} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$ Asímtota obliqua: $y = -x$

$$c) f'(x) = \frac{-x^4 + 3x^2}{(1-x^2)^2} = 0 \rightarrow x^2(3-x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

- En $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent
- En $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3}) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

d) En $x = -\sqrt{3}$ presenta un mínim, i en $x = \sqrt{3}$, un màxim.

e)



095 Considera la funció $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.

- Determina'n el domini, els punts de tall amb els eixos, les asíptotes i la monotonia.
- Representa gràficament aquesta funció.

(Activitat de Selectivitat)

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2\}$

- Talls amb l'eix X : $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x+1}{x+2} = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow (-1, 0)$
- Talls amb l'eix Y : $x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 1)$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x+2} = \infty \rightarrow \text{Asíptota vertical: } x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x+2} = 1 \rightarrow \text{Asíptota horitzontal: } y = 1$$

No té asíptotes obliqües ni branques parabòliques.

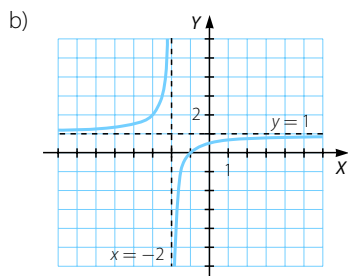
$$f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0 \rightarrow f(x) \text{ creixent}$$

No presenta màxims ni mínims.

$$f''(x) = \frac{-2}{(x+2)^3} \neq 0 \rightarrow \text{No presenta punts d'inflexió.}$$

- En $(-\infty, -2) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa
- En $(-2, +\infty) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ còncava

Representació de funcions



- 096 El grau d'estrès (puntuat de 0 a 10) durant les 8 hores de treball d'un agent de borsa està determinat per mitjà de la funció:

$$f(t) = \frac{-2t(t-10)}{5}, 0 \leq t \leq 8$$

- a) En quin instant de la seva jornada laboral el grau d'estrès és màxim?
Justifica la resposta.
- b) Representa la funció anterior.

(Activitat de Selectivitat)

a) $f(t) = \frac{-2}{5}(t^2 - 10t)$

$$f'(t) = \frac{-2}{5}(2t - 10) = 0 \rightarrow t = 5$$

$$f''(t) = \frac{-4}{5} < 0 \rightarrow \text{En } t = 5 \text{ s'aconsegueix un màxim.}$$

El grau d'estrès és màxim al cap de 5 hores.

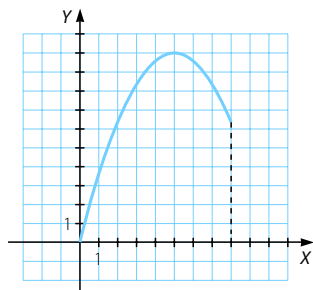
b) • Talls amb l'eix X: $f(t) = 0 \rightarrow \frac{-2t(t-10)}{5} = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 10 \end{cases}$

Per a $t = 10$ la funció no està definida.

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 0)$

Es tracta d'una funció polinòmica definida en l'interval $[0, 8]$, creixent en $(0, 5)$ i decreixent en $(5, 8)$.

$$f(0) = 0 \quad f(8) = \frac{32}{5}$$



097

Dibuixa la gràfica d'aquestes funcions amb radicals, després que n'hagis analitzat les característiques:

a) $y = \sqrt{2-x}$ b) $y = 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{25}x^2}$ c) $y = \sqrt{x^2 - 9}$ d) $y = -\sqrt{x+3}$

a) $2 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 2 \rightarrow \text{Domini} = (-\infty, 2]$

• Talls amb l'eix X: $\sqrt{2-x} = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$

• Talls amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = \sqrt{2} \rightarrow (0, \sqrt{2})$

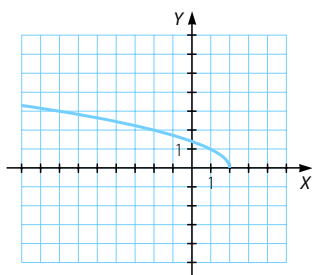
No té asímptotes verticals.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2-x} = +\infty \rightarrow$ No té asímptotes horitzontals.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2-x}}{x} = 0 \rightarrow$ No té asímptotes obliques.

$y' = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

$y'' = \frac{-1}{2(2-x)\sqrt{2-x}} < 0 \rightarrow$ Funció còncava



b) $1 - \frac{x^2}{25} \geq 0 \rightarrow x \in [-5, 5] \rightarrow \text{Domini} = [-5, 5]$

• Talls amb l'eix X: $\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}} = 0 \rightarrow 25 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 5 \rightarrow (-5, 0), (5, 0)$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow (0, 2)$

No té asímptotes.

$y' = \frac{-4x}{10\sqrt{25-x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$

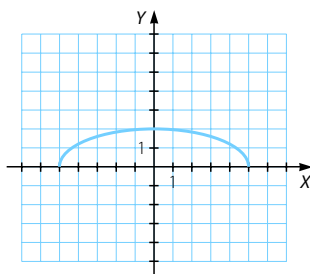
• En $(-5, 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

• En $(0, 5) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

En $x = 0$ presenta un màxim.

$y'' = \frac{-100}{10(25-x^2)\sqrt{25-x^2}} < 0$

$\rightarrow$ Funció còncava



Representació de funcions

c) $x^2 - 9 \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \rightarrow \text{Domini} = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

- Talls amb l'eix X: $\sqrt{x^2 - 9} = 0 \rightarrow x = \pm 3 \rightarrow (-3, 0), (3, 0)$
- Tall amb l'eix Y: no en té perquè $f(x)$ no està definida per a $x = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 9} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 9} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No té asímptotes horitzontals.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 9} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} + x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Asímtota obliqua: } y = x$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = 1 \rightarrow m = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 9} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} - x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Asímtota obliqua: } y = -x$$

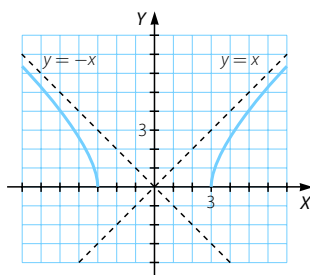
$$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 9}} = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, -3) \rightarrow y' < 0$
→ Funció decreixent
- En $(3, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

$$y'' = \frac{-9}{(x^2 - 9)\sqrt{x^2 - 9}} < 0$$

→ Funció còncava

No presenta punts d'inflexió.



d) $x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3 \rightarrow \text{Domini} = [-3, +\infty)$

- Talls amb l'eix X: $-\sqrt{x + 3} = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow (-3, 0)$
- Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = -\sqrt{3} \rightarrow (0, -\sqrt{3})$

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x + 3} = -\infty \rightarrow \text{No té asímptotes horitzontals.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{x + 3}}{x} = 0$$

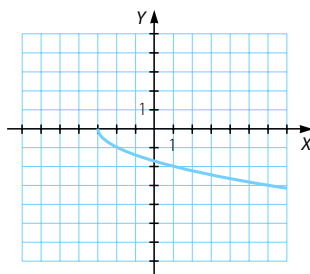
→ No té asímptotes obliques.

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{x + 3}} < 0 \rightarrow \text{Funció decreixent}$$

$$y'' = \frac{1}{4(x + 3)\sqrt{x + 3}} > 0$$

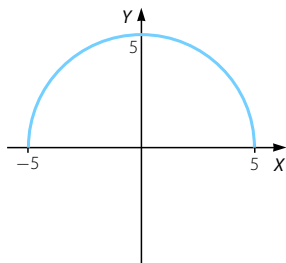
→ Funció convexa

No presenta punts d'inflexió.

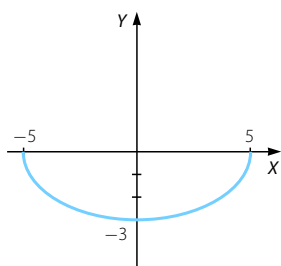


098 Escriu la funció a la qual correspon cadascuna de les gràfiques següents:

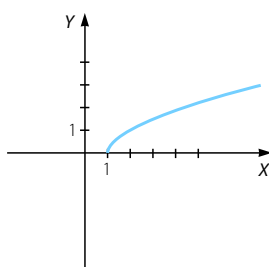
GRÀFICA 1



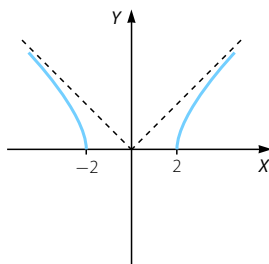
GRÀFICA 2



GRÀFICA 3



GRÀFICA 4



Gràfica 1: $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$

Gràfica 2: $g(x) = -3\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}$

Gràfica 3: $h(x) = \sqrt{x - 1}$

Gràfica 4: $j(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Representació de funcions

099

Dibuixa la gràfica d'aquestes funcions, després que n'hagis analitzat les característiques:

a) $y = xe^x$

d) $y = \frac{x^2 - 1}{e^{x^2}}$

b) $y = \frac{e^{-x} + e^x}{2}$

e) $y = \frac{(x+1)^2}{e^x}$

c) $y = 3x^2e^{-x}$

f) $y = e^{1-x^2}$

a) Domini = $\mathbb{R}$

- Talls amb l'eix X: $xe^x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

No té asímptotes verticals.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty \rightarrow$ No té asímptota horitzontal.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x \rightarrow \infty \cdot 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = 0$$

$\rightarrow$ Asímptota horitzontal: $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \rightarrow \text{No té asímptotes obliqües.}$$

$$y' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$$y' = 0 \rightarrow x = -1$$

- En $(-\infty, -1) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent
- En $(-1, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

En $x = -1$ presenta un mínim.

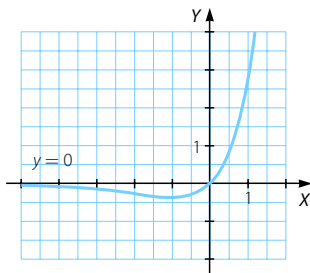
$$y'' = e^x(1+x) + e^x$$

$$y'' = 0 \rightarrow 1+x+1 = 0$$

$$\rightarrow x = -2$$

- En $(-\infty, -2) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava
- En $(-2, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

En $x = -2$ presenta un punt d'inflexió.



b) Domini = $\mathbb{R}$

- Talls amb l'eix X: no en té perquè $\frac{e^{-x} + e^x}{2} = 0 \rightarrow \frac{1}{e^x} + e^x \neq 0$.
- Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = \frac{1+1}{2} = 1 \rightarrow (0, 1)$

No té asímptotes verticals.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} + e^x}{2} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} + e^x}{2} &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No té asímptotes horitzontals.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} + e^x}{2x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} + e^x}{2x} &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No té asímptotes obliqües.}$$

Té branques parabòliques.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} + e^x}{2} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} + e^x}{2} = +\infty$$

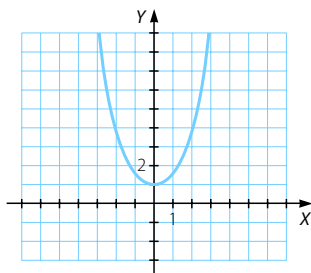
$$y' = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = 0 \rightarrow e^x = e^{-x} \rightarrow x = -x \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0$
→ Funció decreixent
- En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

En $x = 0$ presenta un mínim.

$$y'' = \frac{e^{-x} + e^x}{2} > 0 \rightarrow \text{Funció convexa}$$

No presenta punts d'inflexió.



c) Domini = $\mathbb{R}$

• Talls amb l'eix X: $3x^2e^{-x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = 0 \rightarrow \text{Asímtota horitzontal: } y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2e^{-x} = +\infty \rightarrow \text{No té asímtota horitzontal quan } x \rightarrow -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3xe^{-x} = -\infty \rightarrow \text{No té asímtota obliqua.}$$

$$\text{Té una branca parabòlica: } \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^2e^{-x} = +\infty$$

$$y' = e^{-x}(6x - 3x^2) = 0 \rightarrow x(6 - 3x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

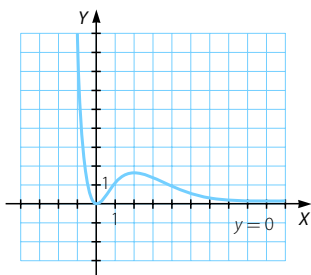
- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent
- En $(0, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

En $x = 0$ presenta un mínim, i en $x = 2$, un màxim.

$$y'' = e^{-x}(3x^2 - 12x + 6) = 0 \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$$

- En $(-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa
- En $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

En $x = 2 \pm \sqrt{2}$ presenta dos punts d'inflexió.



Representació de funcions

d) Domini = $\mathbb{R}$

- Talls amb l'eix X: $\frac{x^2 - 1}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow x = \pm 1 \rightarrow (-1, 0), (1, 0)$

- Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = -1 \rightarrow (0, -1)$

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow \text{Asímtota horitzontal: } y = 0$$

No té asímptotes obliqües ni branques parabòliques.

$$y' = \frac{2x - (x^2 - 1)2x}{e^{x^2}} = \frac{4x - 2x^3}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow x(4 - 2x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

- En $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2}) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

- En $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

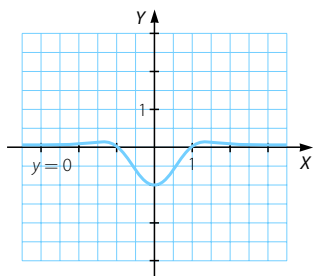
En $x = \pm\sqrt{2}$ presenta dos màxims, i en $x = 0$, un mínim.

$$y'' = \frac{4x^4 - 14x^2 + 4}{e^{x^2}} = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm 0,56 \\ x = 3,17 \end{cases}$$

- En $(-\infty; -3,17) \cup (-0,56; 0,56) \cup (3,17; +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

- En $(-3,17; -0,56) \cup (0,56; 3,17) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

En $x = -0,56$; $x = 0,56$ i $x = 3,17$ presenta punts d'inflexió.



e) Domini = $\mathbb{R}$

- Talls amb l'eix X: $y = 0 \rightarrow \frac{(x+1)^2}{e^x} = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow (-1, 0)$

- Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 1 \rightarrow (0, 1)$

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = 0 \rightarrow \text{Asímtota horitzontal: } y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty \rightarrow \text{No té asímtota horitzontal quan } x \rightarrow -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2}{xe^x} = -\infty \rightarrow \text{No té asímtota obliqua.}$$

Té una branca parabòlica: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = +\infty$

$$y' = \frac{2x + 2 - (x+1)^2}{e^x} = \frac{-x^2 + 1}{e^x} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

• En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

• En $(-1, 1) \rightarrow y' > 0 \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

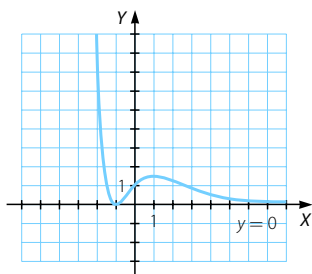
En $x = -1$ presenta un mínim, i en $x = 1$ un màxim.

$$y'' = \frac{-2x + x^2 - 1}{e^x} = 0 \rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

• En $(-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

• En $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

En $x = 1 \pm \sqrt{2}$ presenta punts d'inflexió.



f) Domini = $\mathbb{R}$

• Talls amb l'eix X: no en té.

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = e \rightarrow (0, e)$

No té asímptotes verticals.

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{1-x^2} = 0 \rightarrow$ Asímtota horitzontal: $y = 0$

No té asímptotes obliques ni branques parabòliques.

$$y' = (-2x)e^{1-x^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

• En $(-\infty, 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

• En $(0, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

En $x = 0$ presenta un màxim.

$$y'' = -2e^{1-x^2} - 2x(-2x)e^{1-x^2} = 0 \rightarrow 4x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

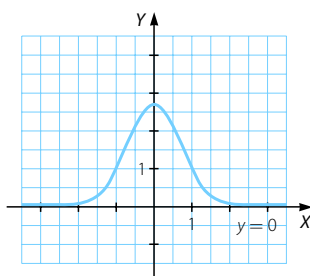
• En $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right) \rightarrow y'' > 0$

$\rightarrow$ Funció convexa

• En $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right) \rightarrow y'' < 0$

$\rightarrow$ Funció còncava

En $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ presenta punts d'inflexió.



Representació de funcions

100

Considera la funció $f(x) = 2x^2e^x$. Calcula'n les asímptotes, els intervals de creixement i decreixement, els màxims, els mínims i els punts d'inflexió. Representa-la gràficament.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

$$\bullet \text{ Talls amb l'eix } X: 2x^2e^x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$\bullet \text{ Talls amb l'eix } Y: x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$$

No té asímptotes verticals.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2e^x = +\infty \rightarrow \text{No té asímptota horitzontal.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2e^x = 0 \rightarrow \text{Asímtota horitzontal: } y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^x = +\infty \rightarrow \text{No té asímptota obliqua.}$$

$$\text{Té una branca parabòlica: } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2e^x = +\infty$$

$$f'(x) = 2e^x(2x + x^2) = 0 \rightarrow 2x(2 + x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ En } (-\infty, -2) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ creixent}$$

$$\bullet \text{ En } (-2, 0) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ decreixent}$$

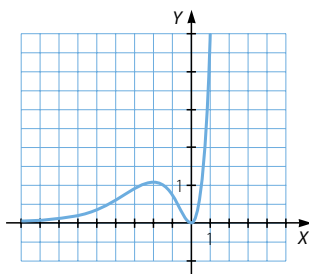
En $x = -2$ presenta un mínim, i en $x = 0$, un màxim.

$$f''(x) = 2e^x(x^2 + 4x + 2) = 0 \rightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$$

$$\bullet \text{ En } (-\infty, -2 - \sqrt{2}) \cup (-2 + \sqrt{2}, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ convexa}$$

$$\bullet \text{ En } (-2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x) \text{ còncava}$$

En $x = -2 \pm \sqrt{2}$ presenta punts d'inflexió.



101

Analitza, primer, les característiques d'aquestes funcions i dibuixa'n, després, la gràfica:

$$\text{a) } y = x \ln x \quad \text{b) } y = \log_2(x^2 + 1) \quad \text{c) } y = \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{d) } y = \frac{x}{\ln x}$$

$$\text{a) Domini} = (0, +\infty)$$

• Talls amb l'eix $X: x \ln x = 0 \rightarrow x = 0$, com que no es troba al domini, no té talls amb aquest eix.

• Tall amb l'eix Y : no en té perquè no està definida per a $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \rightarrow \text{No té asímptotes verticals.}$$

$$y' = \frac{2x}{\ln 2(x^2 + 1)} = 0 \rightarrow x = 0$$

• En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

• En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

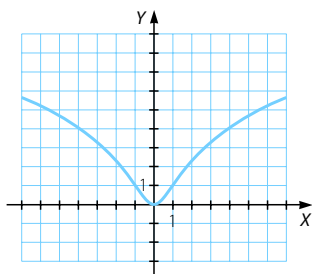
En $x = 0$ presenta un mínim.

$$y'' = \frac{2 - 2x^2}{\ln 2(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

• En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

• En $(-1, 1) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

En $x = \pm 1$ presenta dos punts d'inflexió.



c) Domini = $\mathbb{R}$

• Talls amb l'eix X:

$$\begin{aligned} \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 &\rightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^0 = 1 \rightarrow e^x + e^{-x} = 2 \\ &\rightarrow e^{2x} - 2e^x + 1 = 0 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = \ln 1 = 0 \rightarrow (0, 0) \end{aligned}$$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = \ln \frac{1+1}{2} = \ln 1 = 0 \rightarrow (0, 0)$

No té asímptotes verticals.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No té asímptotes horitzontals.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}}{x} &= 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} - x \right) &= -0,69 \rightarrow n = -0,69 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Asímtota obliqua: } y = x - 0,69$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln \frac{e^x + e^{-x}}{2}}{x} &= -1 \rightarrow m = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln \frac{e^x + e^{-x}}{2} + x \right) &= -0,69 \rightarrow n = -0,69 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Asímtota obliqua: } y = -x - 0,69$$

Representació de funcions

$$y' = \frac{2 \left(\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \right)}{e^x + e^{-x}} = 0 \rightarrow e^x - \frac{1}{e^x} = 0 \rightarrow e^{2x} = 1 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = \ln 1 = 0$$

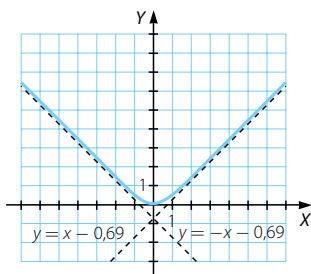
- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0$
→ Funció decreixent
- En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0$
→ Funció creixent

En $x = 0$ presenta un mínim.

$$y'' = \frac{4e^{-x}e^x}{e^{-2x} + 2e^{-x}e^x + e^{2x}} > 0$$

→ Funció convexa

No presenta punts d'inflexió.



d) Domini = $(0, +\infty) - \{1\}$

- Talls amb l'eix X: $\frac{x}{\ln x} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$
- Tall amb l'eix Y: no en té perquè no està definida per a $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\ln x} = \infty \rightarrow \text{Asíptota vertical: } x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0 \rightarrow \text{No té asíptota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty \rightarrow \text{No té asíptotes horitzontals.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \rightarrow \text{No té asíptotes obliqües.}$$

$$\text{Té una branca parabòlica: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$$

$$y' = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} = 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$$

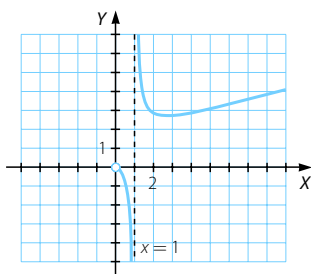
- En $(0, 1) \cup (1, e) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent
- En $(e, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

En $x = e$ presenta un mínim.

$$y'' = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3} = 0 \rightarrow \ln x = 2 \rightarrow x = e^2$$

- En $(0, 1) \cup (e^2, +\infty) \rightarrow y'' < 0$
→ Funció còncava
- En $(1, e^2) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

En $x = e^2$ presenta un punt d'inflexió.



102 Considera $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x^2}$ amb $x \in (0, +\infty)$.

Calcula'n els intervals de creixement i decreixement, els extrems relatius i les asímptotes. Dibuixa'n la gràfica.

$$\text{Dom } f = (0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{\ln x}{x^2} \right) = -\infty \rightarrow \text{Asímtota vertical: } x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x^2} \right) = 1 \rightarrow \text{Asímtotes horitzontals: } y = 1$$

No té asímptotes obliqües ni branques parabòliques.

$$f'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = 0 \rightarrow 1 = 2 \ln x \rightarrow x = \sqrt{e}$$

• En $(0, \sqrt{e}) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

• En $(\sqrt{e}, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

En $x = \sqrt{e}$ presenta un màxim.

$$f''(x) = \frac{6 \ln x - 5}{x^4} = 0 \rightarrow x = \sqrt[6]{e^5}$$

• En $(0, \sqrt[6]{e^5}) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ còncava

• En $(\sqrt[6]{e^5}, +\infty) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa

En $x = \sqrt[6]{e^5}$ presenta un punt d'inflexió.

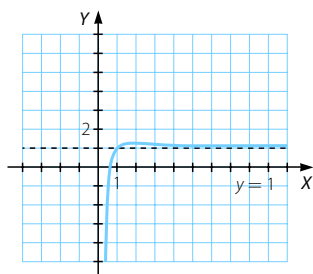
• Talls amb l'eix X:

$$f(x) = 0 \rightarrow 1 + \frac{\ln x}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 + \ln x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0,1) < 0 \\ f(1) > 0 \\ f(x) \text{ contínua } [0,1; 1] \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{T. Bolzano}} \text{Hi ha una arrel en aquest interval.}$$

Aquesta arrel és única perquè $f(x)$ és creixent en $(0, \sqrt{e})$ i decreixent en $(\sqrt{e}, +\infty)$, i té una asímtota horitzontal en $y = 1$.

• Tall amb l'eix Y: no en té perquè no està definida per a $x = 0$.



Representació de funcions

103 Estudia les característiques d'aquesta funció definida a trossos i dibuixa'n la gràfica:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

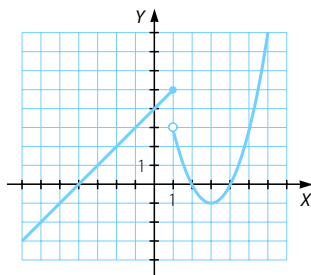
$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 6x + 8) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 4) = 5 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Discontinuitat de salt finit en } x = 1$$

- En $(-\infty, 1] \rightarrow$ Recta que passa per $(-4, 0)$ i $(1, 5)$
- En $(1, +\infty) \rightarrow$ Paràbola de vèrtex $(3, -1)$

$$\text{Talls amb l'eix } X: x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{En } x = 1 \rightarrow f(1) = 5$$



104 Considera la funció següent: $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Dibuixa'n la gràfica.

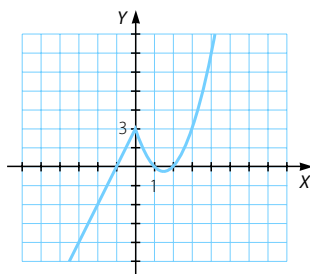
(Activitat de Selectivitat)

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 3x + 2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + 2) = 2 \end{array} \right\} \rightarrow f(x) \text{ contínua en } x = 0$$

- En $(-\infty, 0] \rightarrow$ Recta que passa per $(0, 2)$ i per $(-1, 0)$.
- En $(0, +\infty) \rightarrow$ Paràbola de vèrtex $\left(\frac{3}{2}, \frac{-1}{4}\right)$.

$$\text{Talls amb l'eix } X: x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$



105

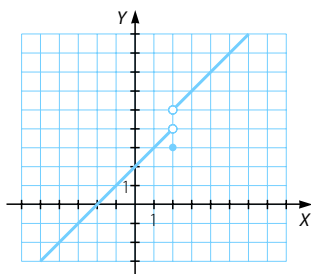
Donada aquesta funció: $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < 2 \\ x+3 & \text{si } x > 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ representa-la gràficament.

(Activitat de Selectivitat)

Dom $f = \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+3) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+2) = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Discontinuitat inevitable de salt finit en } x = 2$$

- En $(-\infty, 2) \rightarrow$ Recta que passa per $(0, 2)$ i per $(-2, 0)$.
- En $(2, +\infty) \rightarrow$ Recta que passa per $(3, 6)$ i per $(4, 7)$.



106

Donada la funció següent: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ representa f gràficament.

(Activitat de Selectivitat)

Dom $f = \mathbb{R}$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 3x + 2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Contínua en } x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 4x + 5) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Contínua en } x = 1$$

- En $(-\infty, 0] \rightarrow$ Paràbola de vèrtex $\left(\frac{-3}{2}, \frac{-1}{4}\right)$.

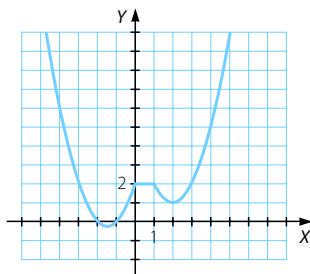
$$\text{Talls amb l'eix X: } x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$f(0) = 2$$

- En $(0, 1] \rightarrow$ Funció constant igual a 2.
- En $(1, +\infty) \rightarrow$ Paràbola de vèrtex $(2, 1)$.

$$\text{Talls amb l'eix X: no en té.}$$

$$f(1) = 2$$



Representació de funcions

107

Un article de consum ha estat a la venda durant 8 anys, i el preu $P(t)$, en milers d'euros, ha variat amb el temps t , en anys, que ha estat al mercat d'acord amb la funció següent:

$$P(t) = \begin{cases} 4t^2 + 4 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ -\frac{5}{2}t + 25 & \text{si } 2 < t \leq 8 \end{cases}$$

Representa la funció gràficament.

(Activitat de Selectivitat)

$$\text{Dom } P = [0, 8]$$

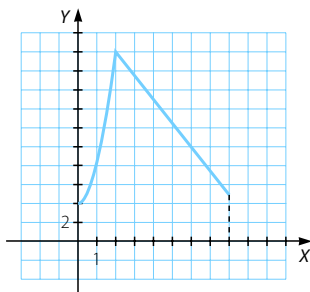
$$P(2) = 20$$

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} (4t^2 + 4) = 20$$

$$\lim_{t \rightarrow 2^+} \left(-\frac{5}{2}t + 25 \right) = 20$$

→ Contínua en $t = 2$

- En $[0, 2] \rightarrow$ Paràbola de vèrtex $(0, 4)$ que passa per $(2, 20)$, no talla l'eix X .
- En $(2, 8] \rightarrow$ Recta que uneix els punts $(2, 20)$ i $(8, 5)$.



108

Dibuixa la gràfica de la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{25 - x^2} & \text{si } -5 \leq x < 4 \\ x^2 - 2x - 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

- En $(-\infty, -5)$ la funció no està definida.

$$f(4) = 16 - 8 - 5 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} (x^2 - 2x - 5) = 16 - 8 - 5 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$$

→ $f(x)$ contínua en $x = 4$

- En $[-5, 4) \rightarrow f(x) = \sqrt{25 - x^2}$:

$$x = -5 \rightarrow y = 0 \rightarrow (-5, 0)$$

$$x = 4 \rightarrow y = 3 \rightarrow (4, 3)$$

No té asímptotes en l'interval en el qual està definida.

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$$

En $[-5, 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

En $(0, 4) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

En $x = 0$ presenta un màxim.

$$y'' = \frac{-25}{\sqrt{25 - x^2}} < 0 \rightarrow$$
 Funció còncava

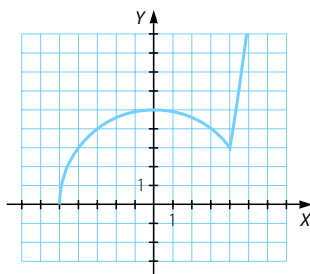
- En $[4, +\infty) \rightarrow f(x) = x^2 - 2x - 5$

Paràbola de vèrtex $(1, -6)$.

No té talls amb els eixos en l'interval en el qual està definida.

$$x = 4 \rightarrow y = 3 \rightarrow (4, 3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x - 5) = +\infty$$



- 109 El benefici que espera obtenir una empresa, en milions d'euros, durant els 8 anys vinents està determinat per la funció B , definida per:

$$B(t) = \begin{cases} -t^2 + 7t & \text{si } 0 \leq t < 5 \\ 10 & \text{si } 5 \leq t \leq 8 \end{cases}$$

en què t indica el temps transcorregut en anys.

- Representa gràficament la funció B i explica com és l'evolució del benefici que esperen durant aquests 8 anys.
- Calcula quan el benefici que esperen és d'11,25 milions d'euros.

(Activitat de Selectivitat)

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} B(5) = 10 \\ \lim_{t \rightarrow 5^-} (-t^2 + 7t) = 10 \\ \lim_{t \rightarrow 5^+} 10 = 10 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Contínua en } t = 5$$

- En $[0, 5)$:

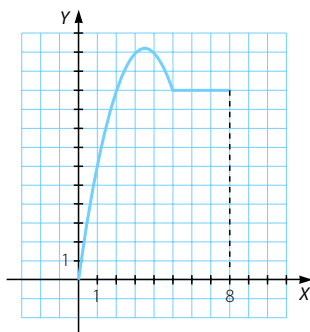
$$B'(t) = -2t + 7 = 0 \rightarrow t = \frac{7}{2}$$

$$B''(t) = -2 < 0 \rightarrow \text{En } t = \frac{7}{2} \text{ s'aconsegueix}$$

un màxim i, per tant, en $\left(0, \frac{7}{2}\right)$ és creixent

i en $\left(\frac{7}{2}, 5\right)$ decreixent.

$$B(0) = 0 \quad B\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{49}{4}$$



- En $[5, 8]$: $B(t) = 10$

El benefici que esperen augmenta durant els tres anys i mig primers fins a aconseguir un valor de 12,25 milions d'euros. Després disminueix fins al cinquè any, quan arriba als 10 milions d'euros, i a partir d'aquí queda constant fins al vuitè any.

$$\text{b) } B(t) = 11,25 \rightarrow -t^2 + 7t = 11,25 \rightarrow t^2 - 7t + 11,25 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2,5 \\ x = 4,5 \end{cases}$$

El benefici que esperen és d'11,25 milions al cap de dos anys i mig i al cap de quatre anys i mig.

Representació de funcions

- 110 Un article determinat el venen a un preu o a un altre segons la quantitat que en compren, d'acord amb aquestes dades:

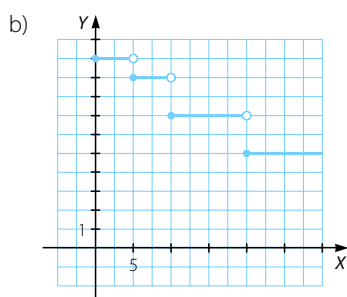
A 10 €/kg si $0 \leq x < 5$
 A 9 €/kg si $5 \leq x < 10$
 A 7 €/kg si $10 \leq x < 20$
 A 5 €/kg si $20 \leq x$

en què x és el pes en kg de la quantitat que en compren.

- a) Escriu la funció que representa el preu de l'article.
 b) Fes-ne la representació gràfica.

(Activitat de Selectivitat)

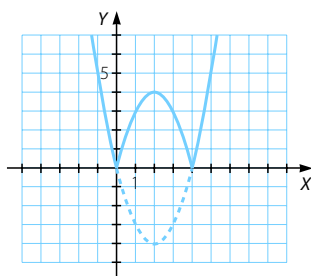
$$a) P(x) = \begin{cases} 10 & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ 9 & \text{si } 5 \leq x < 10 \\ 7 & \text{si } 10 \leq x < 20 \\ 5 & \text{si } 20 \leq x \end{cases}$$



- 111 Estudia i representa de manera gràfica la funció següent: $g(x) = |-x^2 + 4x|$

La funció $y = -x^2 + 4x$ té com a gràfica una paràbola de vèrtex (2, 4) que talla l'eix Y en el punt (0, 0), i l'eix X en els punts (0, 0) i (4, 0).

La funció pren valors negatius en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$; així, doncs, si fem una simetria respecte de l'eix X, obtenim la gràfica que ens demanen.



- 112 Donada la funció: $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x \leq -1 \\ |x - 2| & \text{si } x > -1 \end{cases}$ dibuixa'n la gràfica.

(Activitat de Selectivitat)

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} |x - 2| = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} -x^2 + 4 = 3 \end{array} \right\} \rightarrow f(x) \text{ contínua en } x = -1$$

- En $(-\infty, -1] : f'(x) = -2x > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 + 4 = -\infty$$

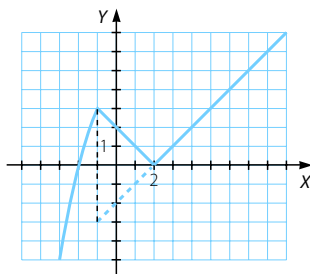
$f(-1) = 3$ i talla l'eix X en el punt $(-2, 0)$.

- En $(-1, +\infty) : y = x - 2$ és la recta que passa per $(3, 1)$ i per $(-1, -3)$.

Tall amb l'eix $X : f(x) = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow (2, 0)$

Tall amb l'eix $Y : x = 0 \rightarrow y = -2 \rightarrow (0, -2)$

Com que es tracta d'una funció amb valor absolut, en l'interval $(-1, 2)$ fem una simetria de la recta respecte de l'eix X .



113 Estudia i representa les funcions següents:

a) $y = -x^4 + 6x^2 - 5$

d) $y = 8x^2 - x^4$

b) $y = \frac{4x^2 + 1}{2x}$

e) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$

c) $y = \sqrt{16 - x^2}$

f) $y = \sqrt{x^3 - 4x}$

a) Domini = $\mathbb{R}$

- Talls amb l'eix $X : f(x) = 0 \rightarrow -x^4 + 6x^2 - 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{5} \end{cases}$
- Tall amb l'eix $Y : x = 0 \rightarrow y = -5 \rightarrow (0, -5)$

Com que és una funció polinòmica, només té branques parabòliques.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + 6x^2 - 5) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 6x^2 - 5) = -\infty$$

$$f'(x) = -4x^3 + 12x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

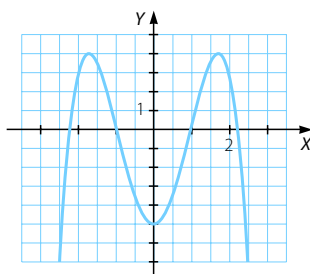
- En $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent
- En $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

En $x = -\sqrt{3}$ i $x = \sqrt{3}$ presenta dos màxims, i en $x = 0$, un mínim.

$$f''(x) = -12x^2 + 12 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ còncava
- En $(-1, 1) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa

En $x = -1$ i $x = 1$ presenta punts d'inflexió.



Representació de funcions

b) Domini = $\mathbb{R} - \{0\}$

• Talls amb l'eix X: $y = 0 \rightarrow \frac{4x^2 + 1}{2x} = 0 \rightarrow 4x^2 + 1 \neq 0$
 $\rightarrow$ No té punts de tall amb aquest eix.

• Tall amb l'eix Y: no en té perquè no està definida per a $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 + 1}{2x} = \infty \rightarrow \text{Asíptota vertical: } x = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 1}{2x} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 1}{2x} &= -\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No té asíptotes horitzontals.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 1}{2x^2} &= 2 \rightarrow m = 2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 1}{2x} - 2x \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Asíptota obliqua: } y = 2x$$

$$y' = \frac{8x^2 - 2}{4x^2} = \frac{4x^2 - 1}{2x^2} = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

• En $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

• En $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

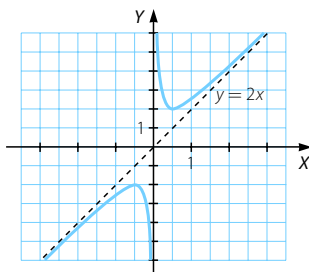
En $x = -\frac{1}{2}$ presenta un màxim, i en $x = \frac{1}{2}$, un mínim.

$$y'' = \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3}$$

• En $(-\infty, 0) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

• En $(0, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

No hi ha punts d'inflexió.



c) $16 - x^2 \geq 0 \rightarrow (4 - x)(4 + x) \geq 0 \rightarrow x \in [-4, 4] \rightarrow$ Domini = $[-4, 4]$

• Talls amb l'eix X: $\sqrt{16 - x^2} = 0 \rightarrow 16 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 4$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow (0, 4)$

No té asíptotes.

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$$

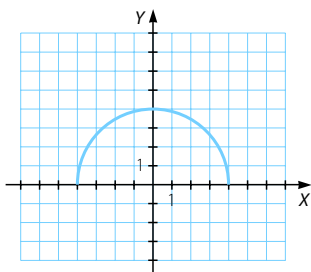
• En $(-4, 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

• En $(0, 4) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

En $x = 0$ presenta un màxim.

$$y'' = \frac{-16}{(16 - x^2)\sqrt{16 - x^2}} = \frac{16}{(x^2 - 16)\sqrt{16 - x^2}} < 0 \rightarrow \text{Funció còncava}$$

No presenta punts d'inflexió.



d) Domini = $\mathbb{R}$

$$\bullet \text{ Talls amb l'eix } X: 8x^2 - x^4 = 0 \rightarrow x^2(8 - x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{8} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Tall amb l'eix } Y: x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$$

Només té branques parabòliques:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (8x^2 - x^4) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (8x^2 - x^4) = -\infty$$

$$y' = 16x - 4x^3 = 0 \rightarrow x(16 - 4x^2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ En } (-\infty, -2) \cup (0, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow \text{Funció creixent}$$

$$\bullet \text{ En } (-2, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow \text{Funció decreixent}$$

En $x = -2$ i $x = 2$ presenta dos màxims, i en $x = 0$, un mínim.

$$y'' = 16 - 12x^2 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{16}{12} = \frac{8}{6} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{8}{6}}$$

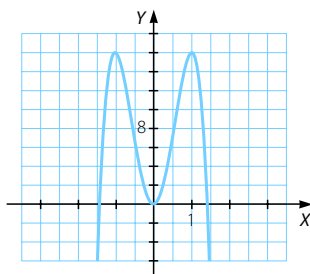
$$\bullet \text{ En } \left(-\infty, -\sqrt{\frac{8}{6}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{8}{6}}, +\infty\right) \rightarrow y'' < 0$$

→ Funció còncava

$$\bullet \text{ En } \left(-\sqrt{\frac{8}{6}}, \sqrt{\frac{8}{6}}\right) \rightarrow y'' > 0$$

→ Funció convexa

$$\text{En } x = -\sqrt{\frac{8}{6}} \text{ y } x = \sqrt{\frac{8}{6}} \text{ presenta dos punts d'inflexió.}$$



e) Domini = $\mathbb{R} - \{2\}$

$$\bullet \text{ Talls amb l'eix } X: \text{no en té.}$$

$$\bullet \text{ Tall amb l'eix } Y: x = 0 \rightarrow y = \frac{1}{4} \rightarrow \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty \rightarrow \text{Asíptota vertical: } x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow \text{Asíptota horitzontal: } y = 0$$

No té asíptotes obliqües ni branques parabòliques.

Representació de funcions

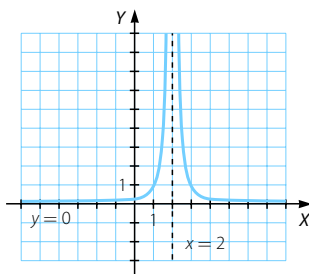
$$y' = \frac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$$

• En $(-\infty, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

• En $(2, +\infty) \rightarrow y' < 0$
 $\rightarrow$ Funció decreixent

$$y'' = \frac{6}{(x-3)^4} > 0 \rightarrow \text{Funció convexa}$$

No presenta punts d'inflexió.



f) $x^3 - 4x \geq 0 \rightarrow x(x-2)(x+2) \geq 0 \rightarrow x \in [-2, 0] \cup [2, +\infty)$

$\rightarrow$ Domini $= [-2, 0] \cup [2, +\infty)$

• Talls amb l'eix X: $\sqrt{x^3 - 4x} = 0 \rightarrow x = 0, x = \pm 2$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

No té asíptotes verticals.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 - 4x} = +\infty \rightarrow$ No té asíptotes horitzontals.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3 - 4x}}{x} = +\infty \rightarrow$ No té asíptotes obliques.

$$y' = \frac{3x^2 - 4}{2\sqrt{x^3 - 4x}} = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{4}{3}}$$

• En $\left(-2, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

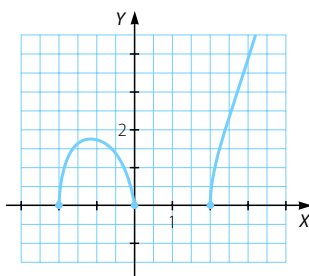
• En $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}}, 0\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

En $x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ presenta un màxim.

$$y'' = \frac{3x^4 - 24x^2 - 16}{4(x^3 - 4x)\sqrt{x^3 - 4x}} < 0$$

$\rightarrow$ Funció còncava

No presenta punts d'inflexió.



114 Donada la funció $f(x) = \frac{2x^3}{1+x^2}$, determina'n:

- El domini.
- Els punts de tall amb els eixos.
- Els punts de discontinuïtat, els tipus de discontinuïtat i les asíptotes verticals (calcula'n els límits laterals).
- Les asíptotes horitzontals i les obliques.
- Els intervals de creixement i de decreixement i els extrems relatius.
- Els intervals de concavitat i de convexitat i els punts d'inflexió.
- La representació gràfica a partir dels resultats dels apartats anteriors.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

b) • Talls amb l'eix X : $f(x) = 0 \rightarrow \frac{2x^3}{1+x^2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

• Talls amb l'eix Y : $x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

c) La funció és contínua en $\mathbb{R}$ i no té asímptotes verticals.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{1+x^2} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{1+x^2} = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No té asímptotes horitzontals.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{x(1+x^2)} = 2 \rightarrow m = 2 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3}{1+x^2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x}{1+x^2} = 0 \rightarrow n = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Asímtota obliqua: } y = 2x$$

e) $f'(x) = \frac{2x^4 + 6x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \rightarrow x^2(2x^2 + 6) = 0 \rightarrow x = 0$

• En $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

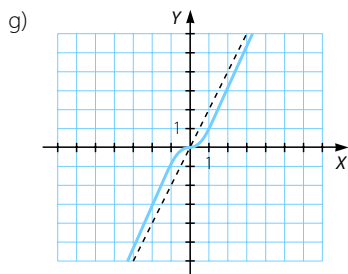
No presenta màxims ni mínims.

f) $f''(x) = \frac{-4x^3 + 12x}{(1+x^2)^3} = 0 \rightarrow x(-4x^2 + 12) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$

• En $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3}) \rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow f(x)$ convexa

• En $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty) \rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow f(x)$ còncava

En $x = 0$ i $x = \pm\sqrt{3}$ s'aconsegueixen punts d'inflexió.



115

En la construcció d'un túnel, el percentatge de roca fragmentada o de mala qualitat està determinat pel model matemàtic següent:

$$R(x) = \frac{x^3}{3} - 4,5x^2 + 18x + 15 \quad 0 \leq x \leq 7$$

$R(x)$ representa aquest percentatge quan la distància a la boca del túnel és x , en quilòmetres.

Si en algun tram de la perforació el percentatge supera el 40%, hauran de reforçar les mesures de sosteniment i de seguretat de l'estructura. Dibuixa la gràfica de la funció. Caldrà que reforcin les mesures esmentades?

(Activitat de Selectivitat)

Representació de funcions

Es tracta d'una funció polinòmica definida en $[0, 7]$.

$$R(0) = 15 \quad R(7) = 34,83$$

$$R'(x) = x^2 - 9x + 18 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$R''(x) = 2x - 9$$

$R''(3) = -3 < 0 \rightarrow$ En $x = 3$ s'aconsegueix un màxim.

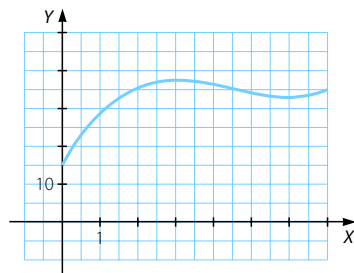
$R''(6) = 3 > 0 \rightarrow$ En $x = 6$ s'aconsegueix un mínim.

• En $(0, 3) \cup (6, 7)$ la funció és creixent.

• En $(3, 6)$ la funció és decreixent.

$$R(3) = 9 - 40,5 + 54 + 15 = 37,5$$

Com que no supera el 40%, no caldrà reforçar les mesures esmentades.



116 Estudia i representa aquestes funcions:

a) $y = \frac{8}{x^2 - 4}$

c) $y = x + \frac{1}{x}$

b) $y = e^{(x^2 + 17x^4)}$

d) $y = \ln(16 - x^2 - x^4)$

a) Domini = $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

• Talls amb l'eix X: no en té.

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = \frac{8}{-4} = -2 \rightarrow (0, -2)$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8}{x^2 - 4} = \infty \rightarrow$ Asíptota vertical: $x = 2$

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{8}{x^2 - 4} = \infty \rightarrow$ Asíptota vertical: $x = -2$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow$ Asíptota horitzontal: $y = 0$

No té asíptotes obliqües ni branques parabòliques

$$y' = \frac{-16x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \rightarrow x = 0$$

• En $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

• En $(0, 2) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

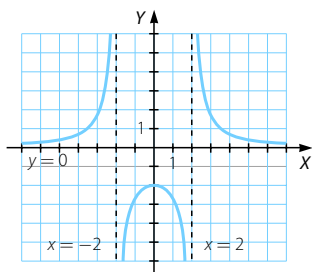
En $x = 0$ presenta un màxim.

$$y'' = \frac{48x^2 + 64}{(x^2 - 4)^3}$$

• En $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \rightarrow y'' > 0$

$\rightarrow$ Funció convexa

- En $(-2, 2) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava
- No presenta punts d'inflexió.



b) Domini = $\mathbb{R}$

- Talls amb l'eix X: no en té.
- Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = e^0 = 1 \rightarrow (0, 1)$

No té asímptotes verticals.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2+17x^4} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2+17x^4} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No té asímptotes horitzontals.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2+17x^4}}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x^2+17x^4}}{x} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No té asímptotes obliqües.}$$

Té branques parabòliques:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2+17x^4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2+17x^4} = +\infty$$

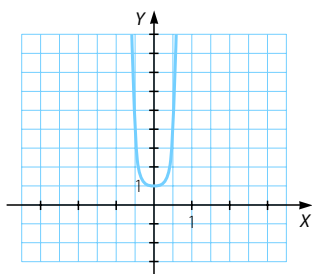
$$y' = (2x + 68x^3)e^{x^2+17x^4} = 0 \rightarrow 2x + 68x^3 = 0 \rightarrow x(2 + 68x^2) = 0 \rightarrow x = 0$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent
- En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

En $x = 0$ presenta un mínim.

$$y'' = e^{x^2+17x^4} (2 + 204x^2 + (2x + 68x^3)^2) > 0 \rightarrow \text{Funció convexa}$$

No presenta punts d'inflexió.



Representació de funcions

c) Domini = $\mathbb{R} - \{0\}$

- Talls amb l'eix X:

$$f(x) = 0 \rightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x} \neq 0 \rightarrow \text{No té punts de tall amb aquest eix.}$$

- Tall amb l'eix Y: no en té perquè no està definida per a $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x + \frac{1}{x} \right) = \infty \rightarrow \text{Asíptota vertical: } x = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right) &= -\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No té asíptotes horitzontals.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) &= 1 \rightarrow m = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \rightarrow n = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Asíptota obliqua: } y = x$$

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

- En $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

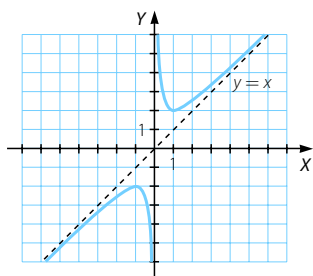
- En $(-1, 0) \cup (0, 1) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

En $x = -1$ presenta un màxim, i en $x = 1$, un mínim.

$$y'' = \frac{2}{x^3}$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció còncava

- En $(0, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció convexa



d) $16 - x^2 - x^4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x^2 = 3,53 \\ x^2 = -4,53 \end{cases} \rightarrow x = \pm\sqrt{3,53} = \pm 1,88$

$$16 - x^2 - x^4 > 0 \rightarrow x \in (-1,88; 1,88) \rightarrow \text{Domini} = (-1,88; 1,88)$$

- Talls amb l'eix X:

$$\ln(16 - x^2 - x^4) = 0 \rightarrow 16 - x^2 - x^4 = 1 \rightarrow x^4 + x^2 - 15 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x^2 = -4,41 \\ x^2 = 3,41 \end{cases} \rightarrow x = \pm\sqrt{3,41} \rightarrow x = \pm 1,85$$

- Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = \ln 106 = 2,77$

$$\lim_{x \rightarrow -1,88} \ln(16 - x^2 - x^4) = \infty \rightarrow \text{Asíptota vertical: } x = -1,88$$

$$\lim_{x \rightarrow 1,88} \ln(16 - x^2 - x^4) = \infty \rightarrow \text{Asíptota vertical: } x = 1,88$$

No té asíptotes horitzontals ni obliqües.

$$y' = \frac{-2x - 4x^3}{16 - x^2 - x^4} = 0 \rightarrow -2x - 4x^3 = 0 \rightarrow x(-2 - 4x^2) = 0 \rightarrow x = 0$$

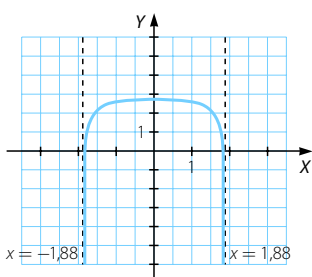
- En $(-1,88; 0) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

- En $(0; 1,88) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

En $x = 0$ presenta un màxim.

$$y'' = \frac{-4x^6 - 2x^4 - 194x^2 - 32}{(16 - x^2 - x^4)^2} < 0 \rightarrow \text{Funció còncava}$$

No presenta punts d'inflexió.



117

En una comarca, un riu té la forma de la corba $y = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$ i la talla

un camí segons l'eix X. Fes un esquema de la posició del riu i del camí, i calcula per a la corba el tall amb els eixos de coordenades, els extrems relatius i els intervals de creixement.

(Activitat de Selectivitat)

$$\text{Domini} = \mathbb{R}$$

- Tall amb l'eix X: $\frac{x^3}{4} - x^2 + x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

- Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

És una funció polinòmica i, per tant, només té branques parabòliques.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{4} - x^2 + x \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{4} - x^2 + x \right) = +\infty$$

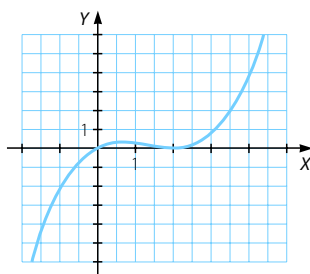
$$y' = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Representació de funcions

• En $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

• En $\left(\frac{2}{3}, 2\right) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent

En $x = \frac{2}{3}$ presenta un màxim, i en $x = 2$, un mínim.



- 118 Donada la funció $f(x) = \frac{x-7}{2x+1}$, determina'n el domini, les asímptotes, els intervals de creixement i decreixement, els de concavitat i convexitat, i també els màxims, els mínims i els punts d'inflexió. Amb la informació que has aconseguit, dibuixa'n la gràfica.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

• Tall amb l'eix X: $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x-7}{2x+1} = 0 \rightarrow x = 7 \rightarrow (7, 0)$

• Tall amb l'eix Y: $x = 0 \rightarrow f(0) = -7 \rightarrow (0, -7)$

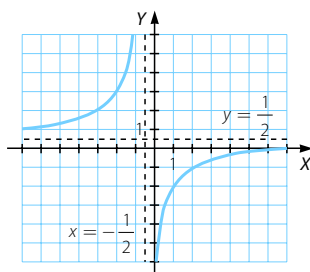
$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x-7}{2x+1} = \infty \rightarrow$ Asímtota vertical: $x = -\frac{1}{2}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-7}{2x+1} = \frac{1}{2} \rightarrow$ Asímtota horitzontal: $y = \frac{1}{2}$

No té asímptotes obliqües ni branques parabòliques perquè té asímtota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

$$f'(x) = \frac{15}{(2x+1)^2} > 0 \rightarrow f(x) \text{ creixent}$$

No presenta màxims ni mínims.



- 119 Considera la funció $f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$.

- Troba'n el domini i les asímptotes.
- Determina'n la monotonia i la curvatura, i també els màxims, els mínims i els punts d'inflexió.
- Representa gràficament la funció.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$

- Tall amb l'eix X : $\frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow x^3 + 2x = 0 \rightarrow x(x^2 + 2) = 0 \rightarrow x = 0$
- Tall amb l'eix Y : $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

No té asímptotes verticals.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} &= -\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No hi ha asímptotes horitzontals.}$$

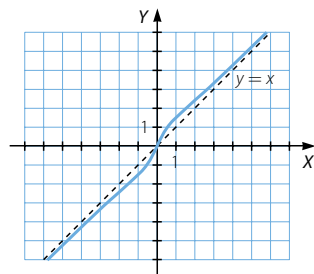
$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x}{x(x^2 + 1)} = 1 \neq 0 \rightarrow m = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x - x^3 - x}{x^2 + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0 \rightarrow n = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Asímtota obliqua: } y = mx + n \rightarrow y = x$$

b) $f'(x) = \frac{x^4 + x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} > 0 \rightarrow f(x)$ és creixent i no té extrems relatius.

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = 0 \rightarrow x^2(2x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$f'''(x) = \frac{-6x^4 + 36x^2 - 6}{(x^2 + 1)^4}$$

Com que $f'''(0) \neq 0$ i $f'''(\pm\sqrt{3}) \neq 0$, en aquests punts s'aconsegueixen punts d'inflexió.



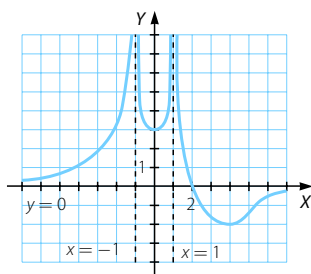
120 La funció $y = f(x)$ té les propietats següents:

- Té com a domini la recta real tret dels punts -1 i 1 .
- És contínua en tot el domini i talla l'eix X en el punt $(2, 0)$.
- Té una asímtota horitzontal en $y = 0$, amb $f(x) < 0$ si $x > 2$ i $f(x) > 0$ si $x < 2, x \neq 1, x \neq -1$.
- Té una asímtota vertical en $x = 1$, amb $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.
- Té una asímtota vertical en $x = -1$, amb $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$.
- Té un mínim en $(4, -2)$ i en $(0, 3)$. No té màxims.

Representa gràficament aquesta funció.

(Activitat de Selectivitat)

Representació de funcions



PREPARA LA SELECTIVITAT

(Activitats de Selectivitat)

- 1 Considera la funció $f(x) = (x^2 + a) \cdot e^{ax}$ en què a és un paràmetre real.
- Justifica a què és igual el domini de $f(x)$.
 - Determina el valor de a perquè la gràfica de $f(x)$ passi pel punt $(0, -4)$.
 - Per a $a = -2$, determina els intervals de creixement i de decreixement de $f(x)$. Hi ha màxims i mínims relatius de $f(x)$? En cas afirmatiu, digues on s'assoleixen i quin valor tenen.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$ perquè es tracta del producte d'una funció polinòmica i una d'exponencial.

b) $f(0) = -4 \rightarrow ae^0 = a = -4$

c) $f(x) = (x^2 - 2)e^{-2x}$

$$f'(x) = 2xe^{-2x} + (x^2 - 2)(-2)e^{-2x} = 0 \rightarrow 2x - 2x^2 + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

• En $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decreixent

• En $(-1, 2) \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ creixent

En $x = -1$ s'aconsegueix un mínim que té com a valor $f(-1) = -e^2$ i en $x = 2$ s'aconsegueix un màxim que té com a valor $f(2) = 2e^{-4}$.

- 2 Estudia i representa la funció següent: $f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^2}$

$\text{Domini} = \mathbb{R} - \{2\}$

• Talls amb l'eix X : $f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 0)$

• Tall amb l'eix Y : $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{(x-2)^2} = \infty \rightarrow$ Asíptota vertical: $x = 2$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} = 1 \rightarrow$ Asíptota horitzontal: $y = 1$

No té asímptotes obliques ni branques parabòliques.

$$y' = \frac{-4x}{(x-2)^3} = 0 \rightarrow x = 0$$

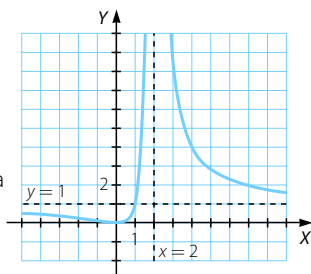
- En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \rightarrow y' < 0 \rightarrow$ Funció decreixent
- En $(0, 2) \rightarrow y' > 0 \rightarrow$ Funció creixent

En $x = 0$ s'aconsegueix un mínim.

$$y'' = \frac{8x+8}{(x-2)^4} = 0 \rightarrow x = -1$$

- En $(-\infty, 0) \rightarrow y'' < 0 \rightarrow$ Funció còncava
- En $(0, 2) \cup (2, +\infty) \rightarrow y'' > 0 \rightarrow$ Funció convexa

En $x = -1$ s'aconsegueix un punt d'inflexió.



- 3 La funció $f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}$ representa la concentració d'oxigen en un estany contaminat per residus orgànics en un temps t (mesurat en setmanes).

- a) Troba els intervals de creixement i decreixement de $f(t)$ per a $t \geq 0$ i també els instants en els quals la concentració d'oxigen és màxima i mínima.
- b) De manera justificada i d'acord amb les dades anteriors, representa gràficament la funció per a $t \geq 0$, i estudia'n amb detall les asímptotes.

- a) Estudiem la funció per a $t \geq 0$.

$$y' = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \text{ (no vàlida)} \end{cases}$$

- En $(1, +\infty) \rightarrow f'(t) > 0 \rightarrow f(t)$ creixent
- En $(0, 1) \rightarrow f'(t) < 0 \rightarrow f(t)$ decreixent

En $t = 1$ s'aconsegueix un mínim.

La concentració d'oxigen és màxima quan $t = 0$ i val 1, i és mínima si $t = 1$ i val $\frac{1}{2}$.

- b) Asímptotes verticals: no en té.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1} = 1$$

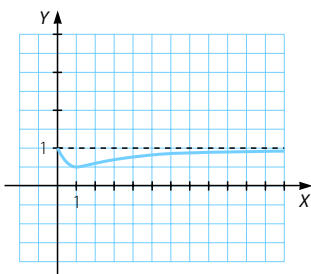
$\rightarrow$ Asímptota horitzontal: $y = 1$

Posició de la corba respecte de l'asímtota:

$$t \rightarrow +\infty \rightarrow \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1} - 1 = \frac{-t}{t^2 + 1} < 0$$

$\rightarrow f(t)$ està per sota de l'asímtota.

No té asímptotes obliques ni branques parabòliques quan $x \rightarrow +\infty$.



Representació de funcions

- 4 Una funció $f(t)$, $0 \leq t \leq 10$, en la qual el temps t està expressat en anys, representa els beneficis d'una empresa (en centenars de milers d'euros) entre els anys 1990 ($t = 0$) i 2000 ($t = 10$):

$$f(t) = \begin{cases} t + 1 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ t^2 - 8t + 15 & \text{si } 2 \leq t < 6 \\ \frac{3}{4}(-t + 10) & \text{si } 6 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

- a) Representa gràficament $f(t)$, i estudia'n els punts de tall i els intervals de creixement i de decreixement.
b) En quins anys l'empresa va tenir el benefici màxim? De quant és aquest benefici? Durant quant de temps va tenir pèrdues?

- a) Dom $f = [0, 10]$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 2^-} t + 1 = 3 \\ \lim_{t \rightarrow 2^+} t^2 - 8t + 15 = 3 \\ f(2) = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Contínua en } t = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} f(6) = 3 \\ \lim_{t \rightarrow 6^-} t^2 - 8t + 15 = 36 - 48 + 15 = 3 \\ \lim_{t \rightarrow 6^+} \frac{3}{4}(-t + 10) = \frac{3}{4}(-6 + 10) = 3 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Contínua en } t = 6$$

Així doncs, $f(t)$ és contínua en $[0, 10]$.

$$f'(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 2 \\ 2t - 8 & \text{si } 2 < t < 6 \\ -\frac{3}{4} & \text{si } 6 < t < 10 \end{cases}$$

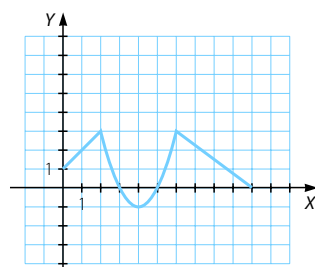
- En $(0, 2) \rightarrow f'(t) > 0 \rightarrow f(t)$ creixent
En $(0, 1)$ presenta un mínim, i en $(2, 3)$, un màxim.
- En $(2, 6): f'(t) = 0 \rightarrow t = 4$
En $(2, 4) \rightarrow f'(t) < 0 \rightarrow f(t)$ decreixent
En $(4, 6) \rightarrow f'(t) > 0 \rightarrow f(t)$ creixent
En els punts $(2, 3)$ i $(6, 3)$ presenta dos màxims, i en $(4, -1)$, un mínim.

Talls amb l'eix X:

$$t^2 - 8t + 15 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 5 \end{cases}$$

- En $(6, 10) \rightarrow f'(t) = -\frac{3}{4} < 0$
 $\rightarrow f(t)$ decreixent

En el punt $(6, 3)$ presenta un màxim,
i en $(10, 0)$, un mínim.



- b) El benefici màxim el va obtenir per a $t = 2$ i $t = 6$, és a dir, els anys 1992 i 1996, amb un valor de 3.000 €.

Va tenir pèrdues entre l'any 1993 i l'any 1995.

- 5 El rendiment (expressat en percentatge) d'un motor determinat durant 60 minuts de funcionament segueix aquesta funció:

$$f(t) = \begin{cases} At^2 + Bt + C & \text{si } 0 \leq t \leq 20 \\ 100 & \text{si } 20 < t \leq 60 \end{cases}$$

Si saps que a l'inici el rendiment és del 0%, que quan fa 10 minuts que funciona és del 75 % i que el 100 % de rendiment l'aconsegueix als 20 minuts:

- a) Determina les constants A , B i C . Justifica la resposta.
b) Representa la funció.

a) $f(0) = 0 \rightarrow C = 0$

$$f(10) = 75 \rightarrow 100A + 10B + C = 75 \rightarrow 100A + 10B = 75$$

$$f(20) = 100 \rightarrow 400A + 20B = 100$$

$$\left. \begin{array}{l} 100A + 10B = 75 \\ 400A + 20B = 100 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{-1}{4} \\ B = 10 \end{cases}$$

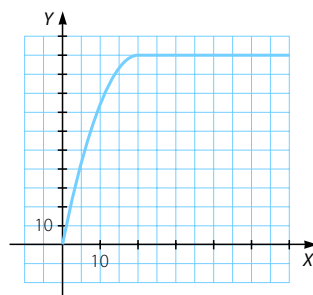
b) $f(t) = \begin{cases} \frac{-1}{4}t^2 + 10t & \text{si } 0 \leq t \leq 20 \\ 100 & \text{si } 20 < t \leq 60 \end{cases}$

- En $[0, 20]$:

$$f'(t) = \frac{-1}{2}t + 10 \geq 0 \rightarrow f(t) \text{ creixent}$$

$$f(0) = 0 \quad f(10) = 75 \quad f(20) = 100$$

- En $[20, 60]$ es tracta d'una funció constant.



- 6 Si saps que la derivada de la funció $f(x)$ està determinada per $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

- a) Calcula els intervals de creixement i decreixement de la funció original $f(x)$.
Digues on aconsegueix la funció $f(x)$ els màxims i els mínims locals.
b) Troba la recta tangent a $f(x)$ en el punt $x = 2$ si saps que $f(2) = 5$.

a) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f''(1) = -6 < 0 \rightarrow \text{En } x = 1 \text{ s'aconsegueix un màxim}$$

$$f''(3) = 6 > 0 \rightarrow \text{En } x = 3 \text{ s'aconsegueix un mínim}$$

- En $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ la funció és creixent.
- En $(1, 3)$ la funció és decreixent.

b) $f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$

Equació de la recta tangent

$$y - 5 = -3(x - 2) \rightarrow y = -3x + 6 + 5 \rightarrow y = -3x + 11$$

NOTES:

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

[illegible]

NOTES:

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

Direcció d'art: **José Crespo**

Projecte gràfic:

Coberta: **Carrió/Sánchez/Lacasta**

Interiors: **Manuel García, Rosa Barriga**

Il·lustració: **José María Valera**

Cap de projecte: **Rosa Marín**

Coordinació d'il·lustració: **Carlos Aguilera**

Cap de desenvolupament de projecte: **Javier Tejeda**

Desenvolupament gràfic: **Rosa María Barriga, José Luis García, Raúl de Andrés**

Direcció tècnica: **Ángel García Encinar**

Coordinació tècnica: **Félix Rotella, Marisa Valbuena**

Confecció i muntatge: **Luis González, Javier Pulido**

Correcció: **Josep Llongueras**

Documentació i selecció fotogràfica: **Nieves Marinas**

Fotografies: J. Jaime; J. M. Escudero; Krauel; Michele di Piccione; P. López;
S. Padura; CORDON PRESS/CORBIS/Blue Lantern Studio; EFE/EPA/Eliot J. Schechter;
GETTY IMAGES SALES SPAIN; I. PREYSLER; ISTOCKPHOTO/Eric Isselée;
MUSEUM ICONOGRAFIA/The Bridgeman Art Library; EFE/A. Estévez;
BIBLIOTECA NACIONAL D'ESPANYA/Laboratori Biblioteca Nacional; J. E. Casariego;
MARIE CLAIRE; MATTON-BILD; PIERPOINT MORGAN LIBRARY, NEW YORK;
VAN GOGH MUSEUM, AMSTERDAM; ARXIU SANTILLANA

2009 by Grup Promotor / Santillana Educación, S. L.

Frederic Mompou, 11 (Vila Olímpica).

08005 Barcelona

Imprès per

ISBN: 978-84-7918-347-9

CP: 917486

Dipòsit legal:

Qualsevol forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només es pot fer amb l'autorització dels seus titulars, llevat d'excepció prevista per la llei. Si en necessiteu fotocopiar o escanejar algun fragment, adreueu-vos a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org).

